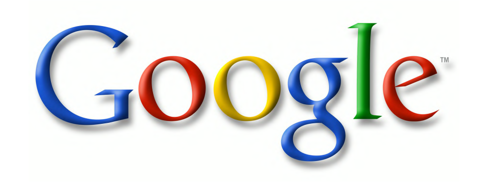
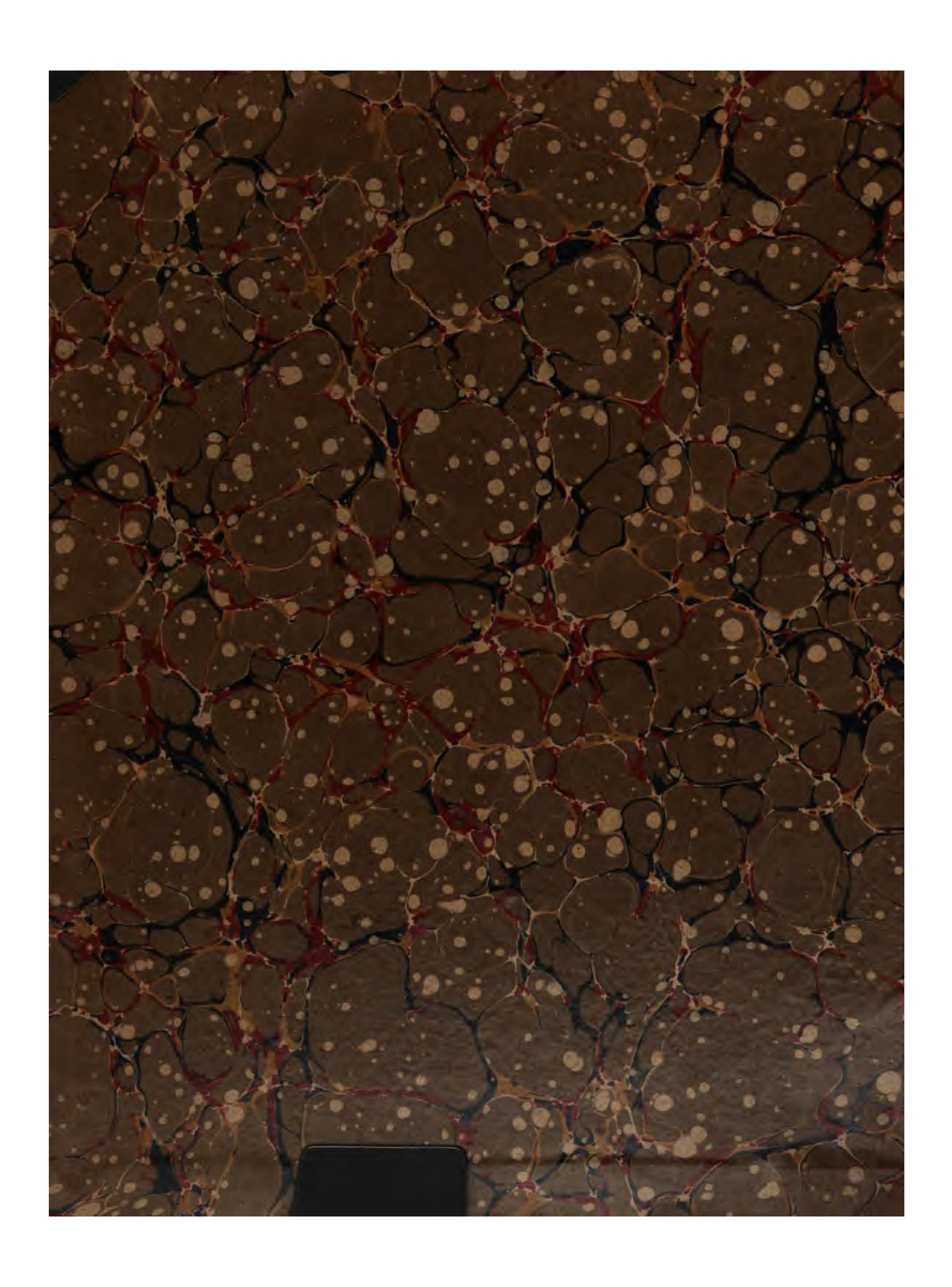
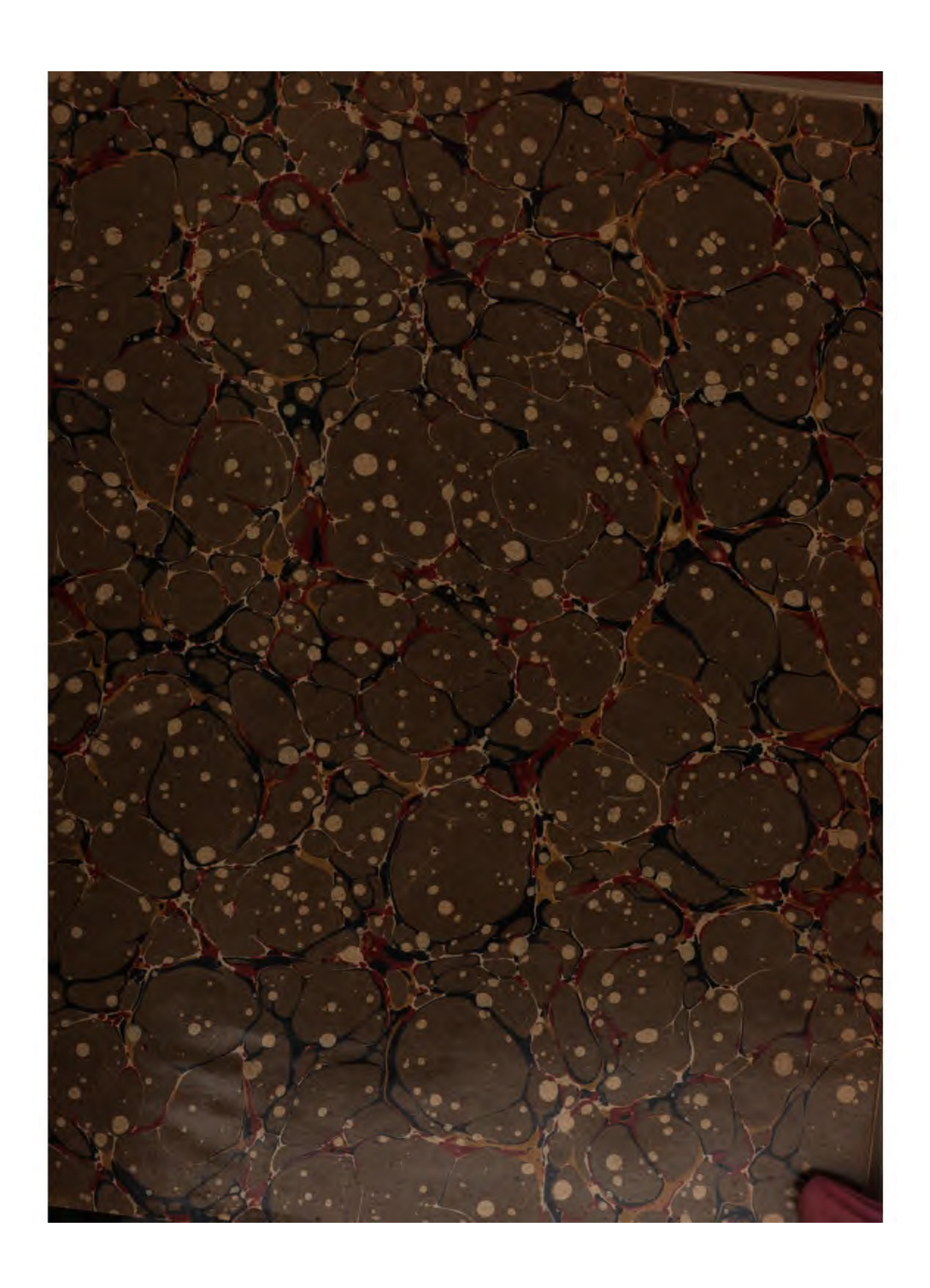
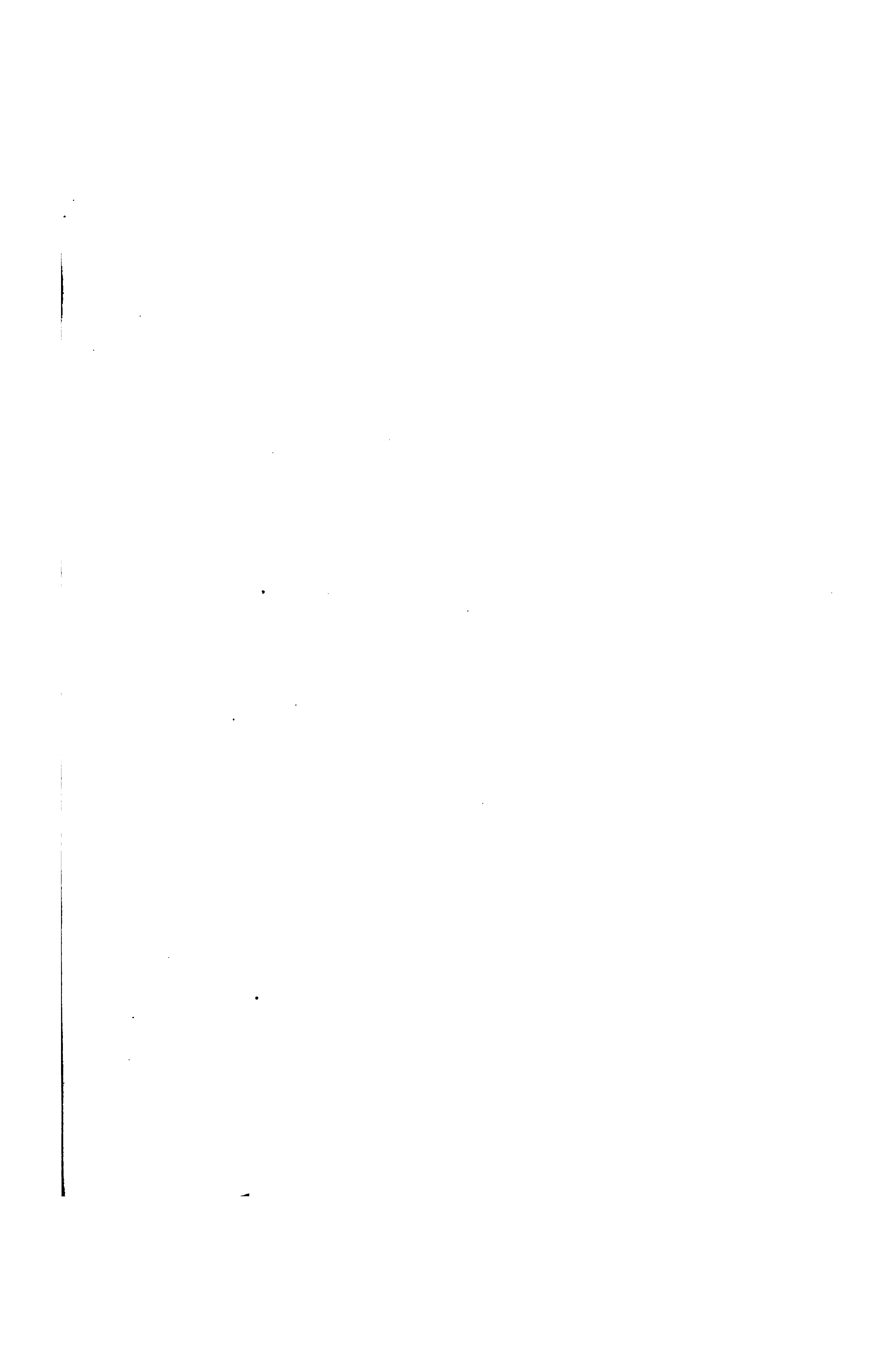














ANNALES

DE LA

FACULTÉ DES SCIENCES

DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE,

POUR LES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET LES SCIENCES PHYSIQUES.

ANNALES

DE LA

FACULTÉ DES SCIENCES

DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE,

POUR LES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET LES SCIENCES PHYSIQUES.

ANNALES

DE LA

FACULTÉ DES SCIENCES

DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE,

POUR LES

SCIENCES MATHÉMATIQUES ET LES SCIENCES PHYSIQUES,

PUBLIÉES

SOUS LES AUSPICES DU MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE,

PAR UN COMITÉ DE RÉDACTION COMPOSÉ DES PROFESSEURS DE MATHÉMATIQUES, DE PHYSIQUE ET DE CHIMIE DE LA FACULTÉ.

DEUXIÈME SÉRIE.

TOME IV. — ANNÉE 1902.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS,
IMPRIMEUR-ÉDITEUR.

TOULOUSE,
ED. PRIVAT,
IMPRIMEUR-LIBRAIRE.

1902

ANNALES

DE LA

FACULTÉ DES SCIENCES

DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE.

SUR LE CHAMP ÉLECTROMAGNÉTIQUE

ENGENDRÉ PAR LA

TRANSLATION UNIFORME D'UNE CHARGE ÉLECTRIQUE

PARALLÈLEMENT A UN PLAN CONDUCTEUR INDÉFINI,

PAR M. T. LEVI-CIVITA,

à Padoue.

PRÉFACE.

Dans une Conférence [1] tenue en septembre dernier, M. Righi a renseigné la Société italienne de Physique sur la question, si discutée aujourd'hui, de la production d'un champ magnétique par la convection électrique.

Après avoir rappelé les différentes expériences (depuis celles de Rowland jusqu'aux dernières de M. Crémieu et de M. Adams), il les a analysées avec sa critique pénétrante, en signalant les points faibles et ceux qui restent simplement douteux.

Parmi ceux-ci l'éminent physicien compte les perturbations du champ magnétique provenant du conducteur, que l'on emploie généralement dans ces expériences pour mettre l'aiguille aimantée à l'abri des actions électrostatiques.

Il est évident, dit-il, qu'un diaphragme métallique de conductivité finie n'arrête pas les actions magnétiques, mais il exerce sans doute une influence et l'on

---

(1) Voir *Nuovo Cimento*, 5e série, t. II; octobre 1901.

n'a pas le droit de la négliger. Malheureusement nous ne sommes pas en mesure d'apprécier cette influence, comme il serait nécessaire pour une bonne discussion des résultats expérimentaux.

Ceux qui cultivent la Physique mathématique pourraient fournir à cet égard des indications assez précises en déterminant, ne fût-ce autre chose, le champ électromagnétique engendré par une charge électrique qui se meut avec une vitesse constante sur une droite parallèle à un plan conducteur indéfini.

Peu après sa conférence M. Righi a bien voulu attirer mon attention sur cette recherche. Voilà l'origine du présent Mémoire.

On y trouvera une solution rigoureuse du problème énoncé et une solution approchée, qui, tout en différant de la première par des quantités absolument insignifiantes au point de vue pratique, prête mieux à l'étude soit qualitative, soit quantitative du champ.

On est conduit aux résultats suivants :

Soient a le rapport entre la vitesse de convection et celle de la lumière; $30k$ la résistance ohmique de l'unité de surface du plan conducteur (exprimée en ohms); $h = \frac{2\pi a}{k}$; de façon que, dans les conditions expérimentales ordinaires, a et k sont des nombres très petits (de l'ordre de 10^{-6} dans l'exemple cité au n° 18), pendant que h est généralement fini.

Au delà de l'écran conducteur, les forces électrique et magnétique dérivent l'une et l'autre d'un potentiel (aux termes en a^2 près).

La force électrique est négligeable; la force magnétique est à peu près égale au produit par $\frac{1}{1+\sqrt{1+h^2}}$ de celle qui s'exercerait si le plan conducteur n'existait pas (*voir*, pour plus d'exactitude, le n° 18). Elle est donc réduite au moins de la moitié et pourrait être interceptée, à l'instar de la force électrique, seulement pour une conductivité infinie ($k = 0$, $h = \infty$).

C'est justement ce que prévoyait M. Righi.

Quelques mots encore sur la position analytique du problème.

Les équations de Hertz à elles seules ne suffiraient pas, tout en tenant compte des conditions (de continuité, régularité, etc.) qui sont imposées aux composantes des forces électromagnétiques.

Une discussion facile montre en effet que, pour rendre la question déterminée, il faut se donner (parmi les conditions dites *aux limites*) deux relations qui devront être vérifiées sur le plan conducteur et qui traduiront précisément cette qualité. Nous ne pourrons y parvenir sans sortir de la théorie hertzienne pure.

En effet, ce qui caractérise un conducteur est sans contredit la loi de Ohm. Mais, au point de vue de Hertz, on n'a là que la définition du courant (de ses deux composantes dans notre cas), et il n'en résulte naturellement aucune relation nouvelle entre les composantes des forces électromagnétiques.

Il faut donc avoir recours à quelque autre hypothèse.

Or l'expérience ne nous donne à cet égard aucun renseignement; bien au contraire, il s'agit en quelque sorte de la devancer.

D'autre part, on n'entrevoit même pas, parmi les éléments de la théorie de Hertz, deux relations qui puissent paraître justifiées *a priori*.

D'après cela, j'ai été conduit à m'appuyer sur une théorie un peu plus restreinte que celle de Hertz, où l'on a affaire non pas précisément aux équations différentielles de Hertz, mais à un certain système de leurs intégrales.

C'est ce qui arrive dans la théorie originale de Maxwell, dans celles de M. Lorentz et de M. Larmor (1), qui, d'ailleurs, n'en diffèrent pas, tant qu'il s'agit, comme à présent, de milieux isotropes en repos.

C'est ce qui arrive aussi dans la théorie de Helmholtz, dès qu'on lui ajoute simplement l'hypothèse que les actions à distance se propagent avec une vitesse finie (*voir* Chap. I).

On a bien, dans le cadre de ces théories, tout ce qu'il faut pour que notre question et d'autres analogues deviennent parfaitement déterminées.

J'ai préféré la dernière (celle de Helmholtz modifiée) parce que les principes sont peut-être plus simples, et à mon avis très suggestifs.

Ce ne serait pas une raison suffisante. Mais on peut démontrer qu'on serait conduit à la même solution aussi en partant des intégrales de Maxwell. Je me borne à signaler cette conclusion, qui se rattache à la remarque suivante, d'ordre plus général :

Les deux théories intégrales ne sont pas identiques. Elles s'accordent naturellement dans le domaine différentiel, mais elles s'accordent encore sur quelques détails importants non envisagés par la théorie de Hertz.

On a besoin de ces compléments pour toutes les questions qui appartiennent au même type du problème simple étudié ici. Parmi ces questions, il y en a une notamment (celle de l'influence d'un écran conducteur sur le champ magnétique d'un courant *variable*) où l'on peut s'attendre à ce que les résultats obtenus par la théorie seront accessibles sans peine au contrôle de l'expérience (pendant que dans le cas actuel on se trouve presque à la limite des quantités appréciables par l'observation).

Je me propose de revenir prochainement sur ce point.

---

(1) Elles sont résumées dans la seconde édition du Traité classique de M. Poincaré : *Électricité et Optique*. Voici les citations des Ouvrages des deux savants contenant l'exposé de leurs théories : LORENTZ, *Versuch einer Theorie der elektrischen und optischen Erscheinungen in bewegten Körpern*, Leyde; 1895. — LARMOR, *Aether and matter*, Cambridge; 1900.

CHAPITRE I.

RAPPEL DE QUELQUES NOTIONS D'ÉLECTRODYNAMIQUE.

1. J'ai démontré autrefois (¹) qu'on peut retrouver les traits essentiels de la théorie de Maxwell même en partant des lois classiques. Il suffit de les compléter par l'hypothèse que les actions à distance se propagent avec une vitesse finie.

La théorie de Helmholtz conduit alors aux équations de Hertz.

Voici, en peu de mots, cette déduction.

2. *Généralités.* — Envisageons un milieu homogène S, indéfini et en repos, siège de phénomènes électrodynamiques.

Soient, pour un point quelconque $P(x, y, z)$, et dans un instant quelconque t, $e(x, y, z, t)$ la densité électrique; $u(x, y, z, t)$, $v(x, y, z, t)$, $w(x, y, z, t)$ les composantes du courant rapportées à l'unité de volume : $e\,dS$ représente alors la quantité d'électricité contenue dans le volume dS à l'instant t; $u\,dy\,dz\,dt$ est la quantité d'électricité qui traverse, pendant le temps dt successif à t, l'aire $dy\,dz$ normale à l'axe des x; de même $v\,dz\,dx\,dt$ est la quantité d'électricité, etc.

Je suppose e, u, v, w finies et continues avec toutes les dérivées des deux premiers ordres. Je suppose, en outre, que ces fonctions s'annulent à l'infini, de façon que les intégrales $\int_S \frac{e}{r}\,dS$, $\int_S \frac{u}{r}\,dS$, ..., étendues à tout l'espace S, aient un sens (pour toute valeur de t), r étant la distance du point variable d'intégration à un point fixe quelconque.

3. *Principes de conservation de l'électricité.* — Entre e, u, v, w on a l'équation de continuité, qui s'écrit

$$\frac{de}{dt} + \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0. \tag{1}$$

Il va sans dire que $e\,dS$, $u\,dy\,dz\,dt$, $v\,dz\,dx\,dt$, $w\,dx\,dy\,dt$ (qui sont toutes des quantités d'électricité) doivent être mesurées de la même façon, en unités électrostatiques par exemple. A ce système se rapporteront alors les valeurs numériques de e, u, v, w.

(¹) *Sulla riducibilità delle equazioni elettrodinamiche di Helmholtz alla forma hertziana* (*Nuovo Cimento*, août 1897).

4. *Loi de Coulomb. — Potentiel électrostatique retardé.* — Conformément à la loi de Coulomb, le potentiel électrostatique (en supposant pour simplifier la constante diélectrique, ou pouvoir inducteur spécifique de notre milieu, égale à l'unité) est

$$\int_S \frac{e(x', y', z', t)}{r}\, dS,$$

où l'on désigne par x', y', z' les variables d'intégration, par x, y, z les coordonnées du point quelconque P, auquel se rapporte le potentiel, par r la distance de P au point $P'(x', y', z')$.

Je pose, A étant une constante, l'inverse de la vitesse de la lumière dans S,

$$\bar{e} = e(x', y', z', t - Ar),$$

$$(2) \qquad F = \int_S \frac{\bar{e}}{r}\, dS.$$

On appelle F *potentiel électrostatique retardé*. Chaque élément $\frac{\bar{e}}{r}\, dS$ de F est, on peut dire, le potentiel d'une action partie de P' avec une anticipation Ar sur l'instant auquel on l'envisage au point P.

Par conséquent, en prenant F, au lieu de $\int_S \frac{e}{r}\, dS$, comme potentiel électrostatique, tout se passe comme si les actions élémentaires, envisagées par la loi de Coulomb, se propageaient en ligne droite de leurs origines à P avec la vitesse de la lumière.

5. *Potentiel vecteur retardé. — Loi de Biot et Savart. — Force magnétique.* — Le vecteur dont les composantes suivant les axes coordonnés sont

$$(3) \qquad U = A\int_S \frac{\bar{u}}{r}\, dS, \qquad V = A\int_S \frac{\bar{v}}{r}\, dS, \qquad W = A\int_S \frac{\bar{w}}{r}\, dS$$

sera notre *potentiel vecteur*. Il diffère du potentiel vecteur ordinaire par la substitution de

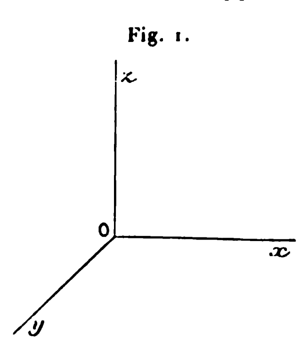
$$\bar{u} = u(x', y', z', t - Ar),$$
$$\bar{v} = v(x', y', z', t - Ar),$$
$$\bar{w} = w(x', y', z', t - Ar),$$

à $u(x', y', z', t)$, $v(x', y', z', t)$, $w(x', y', z', t)$: ce qui correspond, comme tout à l'heure, à une propagation par ondes sphériques avec la vitesse $\frac{1}{A}$.

La force magnétique du champ, d'après la loi élémentaire de Biot et Savart

(dite parfois aussi *loi de Laplace*), est définie comme le tourbillon (*curl* des Anglais) du potentiel vecteur, changé toutefois de sens si les axes sont orientés comme dans la *fig.* 1, ce que nous voulons supposer.

Fig. 1.



Dès lors, en combinant la loi de Biot et Savart avec notre hypothèse sur la vitesse de propagation, on a, pour les composantes L, M, N de la force magnétique, les expressions suivantes :

$$\text{(I)}\qquad \left\{\begin{aligned} L &= \frac{dV}{dz} - \frac{dW}{dy}, \\ M &= \frac{dW}{dx} - \frac{dU}{dz}, \\ N &= \frac{dU}{dy} - \frac{dV}{dx}. \end{aligned}\right.$$

6. *Loi d'induction de F. Neumann. — Force électrique.* — Les dérivées de — AU, — AV, — AW, par rapport à t, donnent les composantes de la force électromotrice d'induction : c'est la loi potentielle de F. Neumann, où l'on a seulement remplacé le potentiel vecteur ordinaire par le potentiel retardé.

Lorsqu'il n'y a pas de forces électromotrices extérieures (d'origine chimique, thermoélectrique, etc.) la force électrique totale (X, Y, Z) est la somme de la composante électrostatique et de celle provenant de l'induction.

On a donc

$$\text{(II)}\qquad \left\{\begin{aligned} X &= -\frac{dF}{dx} - A\frac{dU}{dt}, \\ Y &= -\frac{dF}{dy} - A\frac{dV}{dt}, \\ Z &= -\frac{dF}{dz} - A\frac{dW}{dt}. \end{aligned}\right.$$

7. *Propriétés des fonctions* F, U, V, W. — Tout potentiel retardé

$$F = \int_S \frac{e'}{r}\, dS$$

satisfait à l'équation

$$\square F \equiv \Delta_2 F - A^2 \frac{d^2 F}{dt^2} = -4\pi e.$$

C'est l'analogue de l'équation de Poisson, et l'on peut la vérifier de la même façon [1].

Nous avons ainsi

$$(4) \qquad \begin{cases} \square F = -4\pi e, \\ \square U = -4\pi A u, \\ \square V = -4\pi A v, \\ \square W = -4\pi A w. \end{cases}$$

De plus les fonctions F, U, V, W sont liées entre elles par la relation

$$(5) \qquad A \frac{dF}{dt} + \frac{dU}{dx} + \frac{dV}{dy} + \frac{dW}{dz} = 0.$$

Pour le démontrer, je remarque d'abord qu'on peut écrire, avec la notation des dérivées partielles,

$$\frac{d\bar{u}}{dx'} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial x'} - A \frac{d\bar{u}}{dt} \frac{dr}{dx'}.$$

Or

$$\frac{dU}{dx} = A \int_S \left(\bar{u} \frac{d \frac{1}{r}}{dx} + \frac{d\bar{u}}{dx} \frac{1}{r} \right) dS,$$

d'où, puisque $\bar{u}$ dépend de x uniquement par l'intermédiaire de l'argument $t - Ar$, et que d'ailleurs $\frac{dr}{dx} = -\frac{dr}{dx'}$,

$$\frac{dU}{dx} = -A \int_S \bar{u} \frac{d \frac{1}{r}}{dx'} dS + A \int_S A \frac{d\bar{u}}{dt} \frac{dr}{dx'} \frac{1}{r} dS.$$

Transformons la première intégrale par la formule de Green. L'intégration étant étendue à tout l'espace, il vient

$$\frac{dU}{dx} = A \int_S \left(\frac{d\bar{u}}{dx'} + A \frac{d\bar{u}}{dt} \frac{dr}{dx'} \right) \frac{1}{r} dS,$$

---

[1] *Voir*, par exemple, VOLTERRA, *Sul principio di Huygens* (*Nuovo Cimento*, 3e série, t. XXXI, XXXII, XXXIII; 1892-1893), ou bien encore POINCARÉ, *Oscillations électriques*, n° 40.

ou bien, à cause de l'identité, rappelée ci-dessus,

$$\frac{dU}{dx} = \lambda\int_S \frac{\partial \bar u}{\partial x}\frac{1}{r}\,dS.$$

De même

$$\frac{dV}{dy} = \lambda\int_S \frac{\partial \bar v}{\partial y}\frac{1}{r}\,dS,$$

$$\frac{dW}{dz} = \lambda\int_S \frac{\partial \bar w}{\partial z}\frac{1}{r}\,dS,$$

et en ajoutant

$$\frac{dU}{dx} + \frac{dV}{dy} + \frac{dW}{dz} = \lambda\int_S\left(\frac{\partial \bar u}{\partial x} + \frac{\partial \bar v}{\partial y} + \frac{\partial \bar w}{\partial z}\right)\frac{1}{r}\,dS.$$

L'équation de continuité (1), appliquée aux fonctions $\bar\varepsilon, \bar u, \bar v, \bar w$, devient évidemment

$$\frac{\partial \bar\varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial \bar u}{\partial x} + \frac{\partial \bar v}{\partial y} + \frac{\partial \bar w}{\partial z} = 0;$$

le second membre de l'équation qui précède est donc égal à $-\lambda\int_S \frac{\partial \bar\varepsilon}{\partial t}\frac{1}{r}\,dS$, c'est-à-dire à $-\lambda\frac{dF}{dt}$ [illegible]

§. [illegible] des équations de Hertz. — [illegible] F [illegible] des équations II [illegible] aux équations I [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible] Nous [illegible]

[illegible]

Les deux [illegible] équations [illegible]

[illegible]

En tenant compte de (5), et en retranchant de la précédente, il reste simplement

$$(7) \qquad A\frac{dX}{dt} = \frac{dM}{dz} - \frac{dN}{dy} - 4\pi A u.$$

Les deux équations

$$(7) \qquad \begin{cases} A\dfrac{dY}{dt} = \dfrac{dN}{dx} - \dfrac{dL}{dz} - 4\pi A v, \\ A\dfrac{dZ}{dt} = \dfrac{dL}{dy} - \dfrac{dM}{dx} - 4\pi A w \end{cases}$$

s'établissent de la même manière, et *l'on a ainsi retrouvé le second groupe de Hertz*.

Les équations (I) donnent encore

$$(8) \qquad \frac{dL}{dx} + \frac{dM}{dy} + \frac{dN}{dz} = 0,$$

pendant que les équations (II), en ayant égard à (5) et à la relation

$$\Delta_2 F - A^2 \frac{d^2F}{dt^2} = -4\pi e,$$

donnent

$$(9) \qquad \frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy} + \frac{dZ}{dz} = 4\pi e.$$

9. *Charges et courants de surface. — Discontinuités qui en dérivent dans les forces électromagnétiques.* — En nous plaçant au point de vue des actions à distance, qui nous a conduit aux équations (I), (II), il est presque évident que ces dernières s'étendent au cas où il y aurait, sur quelque surface σ du milieu indéfini S, des distributions à deux dimensions de charges et de courants. Il suffit d'ajouter aux expressions des potentiels F, U, V, W les intégrales doubles correspondant à ces distributions.

On n'a rien à modifier aux équations (4), (5), ..., (9) pour les points *non* situés sur les surfaces σ; mais on doit prendre garde aux discontinuités que l'on rencontrera en les traversant.

Il importe surtout de reconnaître celles qui se produisent dans les composantes des forces électrique et magnétique. On les détermine aisément (en fonction des charges et des courants de surface) à l'aide des formules bien connues, se rapportant aux dérivées premières des potentiels de surface, formules qui sont valables même pour les potentiels retardés [1].

---

[1] VOLTERRA, *loco citato*, t. XXXI.

On peut encore montrer que (charges et courants de surface satisfaisant, bien entendu, au principe de la conservation de l'électricité) les discontinuités qui se produisent dans les forces électromagnétiques ne diffèrent pas de celles que l'on mettrait au jour en suivant la voie indiquée par Hertz.

Du reste, au point de vue physique, une telle démonstration ne serait pas nécessaire; l'identité apparaît d'elle-même.

Pour nous en rendre compte, voyons en quoi consiste ce principe de Hertz. Nous envisagerons, pour plus de netteté, le cas d'une portion de surface σ parallèle au plan $z = 0$.

Ce qui arrive pour des distributions superficielles, situées sur σ, doit être cherché par un passage à la limite, en considérant d'abord une couche τ d'épaisseur g limitée d'un côté par σ, et exprimant ensuite que les équations indéfinies (6), (7), (8), (9) continuent à subsister dans τ, lorsqu'on suppose que e, u, v grandissent indéfiniment, pendant que g décroît, de manière toutefois que les limites de ge, gu, gv restent finies.

Ce même passage à la limite introduit, dans les équations (I), (II), les termes correspondant aux distributions de surface sur σ.

Dès que l'on a affaire à la même cause, les effets (dans notre cas, les discontinuités des forces électromagnétiques à travers σ) doivent être les mêmes quelle que soit la voie que l'on choisit pour les évaluer.

10. *Remarque.* — On peut présenter les considérations qui précèdent sous une forme valable pour tout milieu isotrope, même s'il est polarisable, c'est-à-dire s'il est doué d'un pouvoir inducteur spécifique et d'une perméabilité magnétique quelconque.

C'est ce que j'ai fait dans le Mémoire du *Nuovo Cimento* cité plus haut.

CHAPITRE II.

TRANSFORMATION DES POTENTIELS RETARDÉS.

11. *Transformation directe des potentiels dans le cas où le mouvement des charges se réduit à une translation.* — Dès que l'on a affaire à un mouvement de translation, tout système $\Omega\xi\eta\zeta$, qui est animé, par rapport aux axes fixes $Oxyz$, de la même translation, doit rester invariablement lié aux charges. La densité e de leur distribution est donc une fonction de ξ, η, ζ, indépendante de t.

Complétons la définition des axes mobiles en choisissant, par exemple, $Oxyz$ comme position initiale (pour $t=0$) du trièdre $\Omega\xi\eta\zeta$. On a alors, entre les coordonnées x, y, z; ξ, η, ζ d'une même particule électrisée par rapport aux deux systèmes, les relations

$$(1)\qquad \begin{cases} x=\xi+\varphi, \\ y=\eta+\psi, \\ z=\zeta+\chi, \end{cases}$$

les φ, ψ, χ étant des fonctions données du temps t, qui se réduisent à o, pour $t=0$.

Dans un instant quelconque t la vitesse des charges électriques est, pour tout point du champ, $\left(\frac{d\varphi}{dt}, \frac{d\psi}{dt}, \frac{d\chi}{dt}\right)$.

Or la quantité d'électricité qui traverse dans le temps dt l'aire élémentaire $dy\,dz$ $\Big($c'est-à-dire la charge d'un parallélépipède ayant $dy\,dz$ pour base et $\frac{d\varphi}{dt}\,dt$ pour hauteur$\Big)$ est exprimée par $e\,\frac{d\varphi}{dt}\,dy\,dz\,dt$.

Comme $u\,dy\,dz\,dt$ représente par définition la même quantité, il s'ensuit que

$$(2)\qquad \begin{cases} u=e\,\dfrac{d\varphi}{dt}, \\ v=e\,\dfrac{d\psi}{dt}, \\ w=e\,\dfrac{d\chi}{dt}. \end{cases}$$

Occupons-nous d'abord du potentiel électrostatique

$$F=\int_S \frac{\bar{e}}{r}\,dS.$$

La densité e ne dépend que de ξ, η, ζ, c'est-à-dire, d'après (1), de $x-\varphi, y-\psi, z-\chi$; on a donc l'identité

$$(3)\qquad e(x, y, z, t)=e(x-\varphi, y-\psi, z-\chi);$$

d'où

$$\bar{e}=e(x'-\bar{\varphi}, y'-\bar{\psi}, z'-\bar{\chi}),$$

en convenant de désigner, pour une fonction quelconque, le changement de t en $t-Ar$, par un trait superposé.

Posons

$$(4)\qquad \begin{cases} x_1 - \xi = x' - \bar{\xi}, \\ y_1 - \eta = y' - \bar{\eta}, \\ z_1 - \zeta = z' - \bar{\zeta}, \end{cases}$$

et appelons D le déterminant fonctionnel de x_1, y_1, z_1 par rapport à x', y', z'.

Ayant

$$\frac{dx_1}{dx'} = 1 - A\frac{d\bar{\xi}}{dx'} = 1 - A\frac{d\bar{\xi}}{dt}\frac{x - x'}{r},$$

$$\frac{dx_1}{dy'} = -A\frac{d\bar{\xi}}{dt}\frac{y - y'}{r},$$

$$\frac{dx_1}{dz'} = -A\frac{d\bar{\xi}}{dt}\frac{z - z'}{r},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

on trouve tout de suite

$$(5)\qquad D = 1 - A\left(\frac{d\bar{\xi}}{dt}\frac{x - x'}{r} + \frac{d\bar{\eta}}{dt}\frac{y - y'}{r} + \frac{d\bar{\zeta}}{dt}\frac{z - z'}{r}\right).$$

En adoptant, dans F, x_1, y_1, z_1 au lieu de x', y', z', pour variables d'intégration (¹), il vient, d'après (3),

$$(6)\qquad F = \int_S \frac{e(x_1 - \xi, y_1 - \eta, z_1 - \zeta)}{r\,|D|}\,dS = \int_S \frac{e(x_1, y_1, z_1, t)}{r\,|D|}\,dS.$$

Tout se passe donc comme si chaque charge élémentaire agissait avec le potentiel $\frac{1}{r\,|D|}$.

D'une façon plus précise cette expression transformée de F correspond à la loi élémentaire suivante :

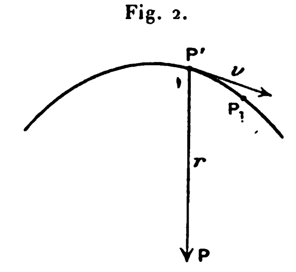
La charge, qui occupe dans un instant quelconque t une position quelconque $P_1(x_1, y_1, z_1)$, agit sur le point envisagé $P(x, y, z)$ avec le potentiel (rapporté à l'unité de charge) $\frac{1}{r\,|D|}$, où r représente la distance de P, non pas à P_1, mais à un certain point $P'(x', y', z')$, qui dépend de P et de P_1 d'après (4); D étant défini par l'équation (5).

Il est aisé d'apercevoir la signification géométrique du point P'.

(¹) La transformation est légitime, toutes les fois que D ne s'annule pas, ce qui arrive notamment lorsque la vitesse de translation ne dépasse pas celle de la lumière (*voir* plus loin).

La comparaison de (1) et (4) montre, en effet, que P′ est la position occupée à l'instant $t - Ar$ par la charge qui occupe à l'instant t la position P_1 (*fig.* 2).

Fig. 2.



C'est justement la position de ladite charge, d'où une action, se propageant avec la vitesse $\frac{1}{A}$, atteint P à l'instant t.

v étant la vitesse de la charge en P′, c'est-à-dire à l'instant $t - Ar$, les composantes de v ne sont autre chose que $\frac{d\overline{\varphi}}{dt}, \frac{d\overline{\psi}}{dt}, \frac{d\overline{\chi}}{dt}$. On a donc

$$(5') \qquad D = 1 - Av\cos(\widehat{vr}),$$

la direction positive de r allant de P′ à P.

On voit bien que D reste toujours positif [ce qui garantit la légitimité de la transformation (4) et l'univocité de la correspondance entre les points P_1 et P′] si, *comme nous le supposerons désormais,*

$$Av < 1,$$

c'est-à-dire si la vitesse des charges reste inférieure à celle de la lumière.

Le potentiel électrostatique élémentaire se présente donc sous la forme

$$\frac{1}{r\left[1 - Av\cos(\widehat{vr})\right]}.$$

Ce résultat est dû à M. Wiechert [1].

Pour le potentiel vecteur on est évidemment conduit à des conclusions analogues.

A cause de (2), les expressions transformées de U, V, W se tirent de F en y remplaçant e par $Au = Ae\frac{d\varphi}{dt}$, $Av = Ae\frac{d\psi}{dt}$, $Aw = Ae\frac{d\chi}{dt}$.

---

[1] *Elektrodynamische Elementargesetze* (*Archives Néerlandaises*, 2e série, t. V) (Volume jubilaire en l'honneur de M. Lorentz); 1900.

Il sera plus commode, dans ce qui va suivre, de se rapporter aux axes mobiles. Les coordonnées des points P, P_1, P' seront alors naturellement désignées par ξ, η, ζ; ξ_1, η_1, ζ_1; ξ', η', ζ', et les expressions des potentiels (où il convient, bien entendu, d'introduire, même comme variables d'intégration, les coordonnées ξ_1, η_1, ζ_1 au lieu de x_1, y_1, z_1) s'écrivent

$$(6)\quad \begin{cases} F = \displaystyle\int_S \frac{e(\xi_1, \eta_1, \zeta_1)}{r\left[1 - A v \cos(\widehat{vr})\right]}\, dS; \\ U = \displaystyle\int_S \frac{A u(\xi_1, \eta_1, \zeta_1)}{r\left[1 - A v \cos(\widehat{vr})\right]}\, dS, \\ V = \displaystyle\int_S \frac{A v(\xi_1, \eta_1, \zeta_1)}{r\left[1 - A v \cos(\widehat{vr})\right]}\, dS, \\ W = \displaystyle\int_S \frac{A w(\xi_1, \eta_1, \zeta_1)}{r\left[1 - A v \cos(\widehat{vr})\right]}\, dS, \end{cases}$$

r et v ayant la signification définie tout à l'heure.

Ces formules, nous le verrons bientôt, sont valables pour un mouvement quelconque des charges. Ici les trois dernières se réduisent simplement à

$$U = A\frac{d\varphi}{dt}F, \qquad V = A\frac{d\psi}{dt}F, \qquad W = A\frac{d\chi}{dt}F.$$

12. *Cas d'une charge unique.* — Supposons que la fonction $e(\xi, \eta, \zeta)$ soit généralement nulle, en dehors d'un très petit espace τ entourant le point Ω.

On peut évidemment faire cette hypothèse sans renoncer à la condition (nécessaire pour la validité des considérations du premier Chapitre) que les dérivées premières et secondes de e soient partout finies et continues ([1]).

Il suffit d'imaginer une fonction quelconque, douée de cette propriété pour les points de τ, qui s'annule sur le contour avec ses dérivées des deux premiers ordres. Il est partant permis de supposer en outre

$$\int_\tau e\, dS = m,$$

m étant une constante donnée.

Ceci posé, le cas d'une charge unique m, placée à l'origine Ω des axes mobiles, se déduit sans peine comme cas limite du numéro précédent, en faisant décroître indéfiniment l'espace τ.

([1]) A la vérité, on peut se tirer d'affaire avec des conditions moins restrictives; mais il ne vaut pas la peine d'y insister.

Les potentiels retardés se réduisent alors aux produits de m, $\mathrm{A}m\frac{d\varphi}{dt}$, $\mathrm{A}m\frac{d\psi}{dt}$, $\mathrm{A}m\frac{d\chi}{dt}$ par

$$\frac{1}{r\left[1-\mathrm{A}v\cos\left(\widehat{vr}\right)\right]}.$$

Le passage à la limite, dont nous nous sommes servi pour y arriver, permet évidemment d'affirmer (ce qu'on pourrait aussi vérifier directement) que ces potentiels élémentaires satisfont bien aux équations différentielles (4) et (5) du Chapitre précédent, ou plutôt (comme nous nous rapportons ici aux axes mobiles) à leurs transformées en coordonnées ξ, η, ζ.

Il va sans dire que la distance r et la vitesse v se rapportent, non pas à la position actuelle Ω de la charge m, mais à la position antérieure, dont les coordonnées ξ', η', ζ' sont définies, en fonction de ξ, η, ζ, t, par

$$(7)\qquad \begin{cases} \xi' = \varphi(t-\mathrm{A}r)-\varphi(t),\\ \eta' = \psi(t-\mathrm{A}r)-\psi(t),\\ \zeta' = \chi(t-\mathrm{A}r)-\chi(t)\end{cases}$$

$$\left[r=\sqrt{(\xi-\xi')^2+(\eta-\eta')^2+(\zeta-\zeta')^2}\right].$$

C'est ce qui résulte de l'équation (4), lorsqu'on y met en évidence les coordonnées ξ, η, ..., en tenant compte de ce que (le point P_1 étant ici représenté par Ω)

$$\xi_1=\eta_1=\zeta_1=0.$$

Pour arriver aux expressions définitives des potentiels, il faut éliminer les coordonnées auxiliaires ξ', η', ζ' de $\frac{1}{r\mathrm{D}}$. Voici comment on peut disposer le calcul.

Tout d'abord on tire, des équations (7),

$$(8)\qquad \begin{aligned} r^2 &= (\xi-\xi')^2+(\eta-\eta')^2+(\zeta-\zeta')^2\\ &= \quad[\xi+\varphi(t)-\varphi(t-\mathrm{A}r)]^2\\ &\quad+[\eta+\psi(t)-\psi(t-\mathrm{A}r)]^2\\ &\quad+[\zeta+\chi(t)-\chi(t-\mathrm{A}r)]^2,\end{aligned}$$

équation qui définit directement r en fonction de ξ, η, ζ, t.

En la dérivant par rapport à A, il vient

$$r\frac{dr}{d\mathrm{A}}=\left[(\xi-\xi')\frac{d\bar\varphi}{dt}+(\eta-\eta')\frac{d\bar\psi}{dt}+(\zeta-\zeta')\frac{d\bar\chi}{dt}\right]\left(r+\mathrm{A}\frac{dr}{d\mathrm{A}}\right).$$

Mais, d'après (5),

$$(5\ bis) \qquad r\mathrm{D} = r - \mathrm{A}\left[\frac{d\bar\varphi}{dt}(\xi - \xi') - \frac{d\bar\psi}{dt}(\eta - \eta') - \frac{d\bar\chi}{dt}(\zeta - \zeta')\right];$$

d'où

$$r\mathrm{D} = r - \frac{\mathrm{A}r\dfrac{dr}{d\mathrm{A}}}{r - \mathrm{A}\dfrac{dr}{d\mathrm{A}}} = - \frac{r^2}{r - \mathrm{A}\dfrac{dr}{d\mathrm{A}}},$$

$$\frac{1}{r\mathrm{D}} = \frac{1}{r} - \mathrm{A}\frac{d\dfrac{1}{r}}{d\mathrm{A}}.$$

Remarque. — Comme les fonctions $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\chi(t)$, qui définissent le mouvement de Ω sont censées être quelconques, ce qu'on vient de dire permet de construire en tout cas le champ électromagnétique dû à un mouvement d'une charge unique.

13. *Cas général d'une distribution et d'un mouvement quelconques. — Analogies hydrodynamiques.* — S'il s'agit d'un nombre quelconque de charges, on n'a qu'à faire la somme des potentiels élémentaires pour obtenir les expressions de F, U, V, W.

Dans le cas d'une distribution continue m, $m\frac{d\varphi}{dt}$, $m\frac{d\psi}{dt}$, $m\frac{d\chi}{dt}$ ne sont autres que

$$e\,dS, \qquad e\frac{d\varphi}{dt}\,dS = u\,dS, \qquad e\frac{d\psi}{dt}\,dS = v\,dS, \qquad e\frac{d\chi}{dt}\,dS = w\,dS,$$

et l'on retrouve, par suite, les formules (6), qui restent ainsi démontrées en général, tandis qu'auparavant nous les avions établies seulement pour les mouvements de translation des charges.

Il ne serait pas difficile d'obtenir, même dans le cas général, la transformation des potentiels retardés par un calcul direct, mais il est inutile de s'y arrêter.

Je préfère faire remarquer qu'on peut concevoir l'action d'un champ donné (sur un point P et dans un instant t) répartie entre les points du champ d'une infinité de manières. On peut notamment :

1° Attribuer à chaque point du champ la charge qui s'y trouvait à l'instant $\bar{t}$. On a de la sorte les expressions primitives des potentiels retardés, tels qu'ils ont été définis au début du Chapitre précédent.

2° Attribuer à toute charge la position qu'elle occupait à l'instant $\bar{t}$. C'est ce qu'on fait dans les expressions transformées (6).

Dans la forme originale les actions sont en quelque sorte réparties suivant le point de vue d'Euler.

Les expressions transformées correspondent, au contraire, au point de vue de Lagrange.

14. *Charge unique en mouvement de translation uniforme.* — Si c désigne la vitesse constante de translation, on a

$$\varphi(t) = ct, \qquad \psi(t) = 0, \qquad \chi(t) = 0,$$

en supposant l'axe ξ dirigé suivant la translation.

Les équations (7) et (8) se réduisent à

$$\xi' = -ar, \qquad \eta' = 0, \qquad \zeta' = 0, \tag{7'}$$

$$r^2 = (\xi + ar)^2 + \eta^2 + \zeta^2, \tag{8'}$$

où

$$a = Ac \tag{9}$$

est une constante numérique plus petite que l'unité.

L'expression (5 *bis*) de rD devient

$$rD = r - a(\xi + ar) = (1 - a^2)r - a\xi.$$

Or, en multipliant par $(1 - a^2)$, on tire de (8')

$$[(1 - a^2)r - a\xi]^2 = \xi^2 + (1 - a^2)(\eta^2 + \zeta^2),$$

ce qui donne

$$rD = \xi^2 + (1 - a^2)(\eta^2 + \zeta^2).$$

Les potentiels élémentaires sont donc

$$\left\{ \begin{array}{l} F = \dfrac{m}{\sqrt{\xi^2 + (1 - a^2)(\eta^2 + \zeta^2)}}; \\ U = aF, \qquad V = 0, \qquad W = 0. \end{array} \right. \tag{10}$$

Les formules de transformation (1) étant à présent

$$x = \xi + ct, \qquad y = \eta, \qquad z = \zeta,$$

les opérations différentielles

$$\frac{d}{dx}, \quad \frac{d}{dy}, \quad \frac{d}{dz}, \quad A\frac{d}{dt}$$

seront exprimées dans nos variables ξ, η, ζ, t par

$$\frac{d}{d\xi}, \quad \frac{d}{d\eta}, \quad \frac{d}{d\zeta}, \quad A\frac{d}{dt} - a\frac{d}{d\xi},$$

d'où, pour toute fonction f des seules variables ξ, η, ζ,

$$\square f = \frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{d^2 f}{dy^2} + \frac{d^2 f}{dz^2} - A^2\frac{d^2 f}{dt^2} = (1 - a^2)\frac{d^2 f}{d\xi^2} + \frac{d^2 f}{d\eta^2} + \frac{d^2 f}{d\zeta^2}.$$

On voit bien que

$$\square F = \square U = 0,$$

$$A\frac{dF}{dt} + \frac{dU}{dx} = \frac{d}{d\xi}(U - aF) = 0.$$

C'est la vérification directe des équations (4) et (5) du Chapitre précédent.

Les expressions explicites des forces électromagnétiques du champ dérivent de (I) et (II), en y substituant les valeurs (10). Je n'y insiste pas davantage, car un tel champ a déjà été très bien étudié [1].

CHAPITRE III.

RÉSOLUTION DU PROBLÈME PROPOSÉ.

15. *Données et mise en équation.* — Un conducteur placé dans un champ électrostatique s'électrise par influence. Un phénomène analogue doit évidemment se présenter lorsque le champ varie avec le temps. Seulement la distribution induite sera en général variable et il se produira des courants.

En tout cas, la présence d'un conducteur dans un champ donné entraîne des modifications du champ.

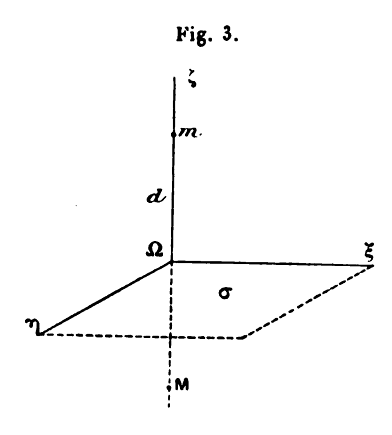
Selon notre point de vue la question de déterminer ces modifications revient au calcul des termes additionnels que la présence du conducteur introduit dans les expressions des potentiels retardés. En d'autres termes, il s'agit d'assigner les potentiels retardés correspondant à la distribution et aux courants induits sur le conducteur.

[1] Heaviside, *Electrical papers*. Vol. II. — Righi, *Sui campi elettromagnetici e particolarmente su quelli creati da cariche elettriche e da poli magnetici in movimento* (*Nuovo Cimento*, 5e série, t. II; août 1901).

Sans envisager ici le problème général, arrivons tout de suite au cas particulier qui forme l'objet de notre recherche.

Une charge donnée m se meut alors avec une vitesse constante c parallèlement à un plan conducteur indéfini σ, le milieu ambiant étant l'éther (*fig.* 3).

Fig. 3.



Choisissons un système d'axes mobiles $\Omega\xi\eta\zeta$, invariablement liés à m, ayant σ pour plan $\zeta = 0$, et m sur le demi-axe positif des ζ. Les coordonnées de m sont alors 0, 0, $d > 0$, d étant la distance constante de m à σ.

S'il n'y avait pas de plan conducteur, les potentiels du champ seraient donnés par les formules (10) du Chapitre précédent en y changeant seulement ζ en $\zeta - d$.

Mais le mouvement de m donne naissance à une distribution induite (variable) sur le plan conducteur et il lui correspond un potentiel électrostatique F_1 et un potentiel vecteur U_1, V_1 (W_1 est évidemment nul, car le mouvement de l'électricité a lieu sur le plan $\zeta = 0$).

Les potentiels du champ, modifié par la présence du plan conducteur, se présentent donc sous la forme

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} F = \dfrac{m}{\Delta} + F_1, \\ U = \dfrac{ma}{\Delta} + U_1, \qquad V = V_1, \qquad W = 0, \end{array} \right.$$

en ayant posé pour abréger

$$(2) \qquad \Delta^2 = \xi^2 + (1 - a^2)[\eta^2 + (\zeta - d)^2].$$

Examinons maintenant à quelles conditions doivent satisfaire les inconnues F_1, U_1, V_1 comme fonctions des variables ξ, η, ζ, t.

Tout d'abord, eu égard au fait que le phénomène est stationnaire par rapport aux axes $\Omega\xi\eta\zeta$, ces fonctions ne dépendront pas explicitement du temps t.

Elles sont toutes des potentiels retardés (correspondant à des distributions de surface sur le plan $\zeta = 0$); donc, d'après le numéro précédent, des solutions de l'équation

$$\square f \equiv (1 - a^2)\frac{d^2 f}{d\xi^2} + \frac{d^2 f}{d\eta^2} + \frac{d^2 f}{d\zeta^2} = 0; \tag{3}$$

elles satisfont à l'équation (5) du Chapitre I, qui devient à présent

$$a\frac{dF_1}{d\xi} = \frac{dU_1}{d\xi} + \frac{dV_1}{d\eta}; \tag{4}$$

elles se comportent partout, même à l'infini et à la traversée du plan conducteur, comme des potentiels ordinaires ([1]). Leurs expressions analytiques (sous forme d'intégrales doubles étendues au plan $\zeta = 0$) ne changent pas lorsqu'on change le signe de ζ. Elles ont donc même valeur dans les points symétriques par rapport au plan $\zeta = 0$; elles sont en somme des fonctions de l'argument $|\zeta|$.

Les conditions caractéristiques, relatives au plan $\zeta = 0$, peuvent alors être présentées sous la forme

$$-\frac{1}{2\pi}\frac{dF_1}{d|\zeta|} = e_1, \qquad -\frac{1}{2\pi}\frac{dU_1}{d|\zeta|} = A u_1, \qquad -\frac{1}{2\pi}\frac{dV_1}{d|\zeta|} = A v_1, \tag{5}$$

e_1, u_1, v_1 étant la densité de la distribution et les composantes du courant induit.

Ce sont de nouvelles inconnues dont, pour le moment, on sait à peine qu'elles doivent vérifier l'équation de continuité.

Il n'y a pas lieu d'en tenir compte, car c'est une conséquence de (4). En effet, ladite équation $\left(\frac{de_1}{dt} + \frac{du_1}{dx} + \frac{dv_1}{dy} = 0\text{, par rapport aux axes fixes}\right)$ s'écrit

$$a\frac{de_1}{d\xi} = A\left(\frac{du_1}{d\xi} + \frac{dv_1}{d\eta}\right),$$

et cela résulte bien de (5) en ayant égard à (4).

Les équations (5) ne servent donc, peut-on dire, qu'à définir e_1, u_1, v_1.

Les prémisses générales du Chapitre I ne nous donnant pas d'autres renseignements sur les fonctions F_1, U_1, V_1, on n'en a pas assez pour les déterminer.

([1]) On pourrait même dire, en se rapportant aux variables $\frac{\xi}{\sqrt{1-a^2}}$, η, ζ, que les fonctions F_1, U_1, V_1 sont des potentiels ordinaires de distributions ayant pour siège le plan $\zeta = 0$. C'est ce qui résulterait directement de leurs expressions transformées. C'est d'ailleurs ce qui résulte de (3), d'après la façon dont se comportent lesdites fonctions.

On devait s'y attendre, car jusqu'à présent nous avons traité le plan conducteur simplement comme un siège d'électricité en mouvement.

Or ce qui caractérise les conducteurs est bien quelque chose de plus précis : *c'est la loi de Ohm*.

Pour les surfaces conductrices (isotropes) elle exprime que le courant est proportionnel à la composante tangentielle de la force électrique, et a la même direction.

Nous devons donc poser

$$X = Aku_1, \qquad Y = Akv_1, \tag{6}$$

k étant une constante, puisque nous supposons bien que le plan conducteur σ est homogène.

Quelle est la signification physique de cette constante k ?

Ayant choisi (n° 3) le système d'unités électrostatiques, Ak n'est autre chose que la résistance de l'unité de surface de notre plan conducteur, mesurée en unités électrostatiques. Or, si R_e, R_m, R_0 sont les trois nombres qui mesurent une même résistance, respectivement en unités électrostatiques, en unités électromagnétiques et en ohms, on a [1]

$$R_e = A^2 R_m, \qquad R_m = 10^9 R_0.$$

Il s'ensuit

$$k = A\, 10^9\, R_0,$$

d'où, puisque $\frac{1}{A} = 3.10^{10}$,

$$k = \tfrac{1}{30} R_0.$$

La constante k est donc un trentième de la résistance de l'unité de surface du plan conducteur exprimée en ohms.

Il est à peine nécessaire d'ajouter que, une fois trouvées F_1, U_1, V_1, on a, d'après (1) et les formules (I), (II) du Chapitre I, les potentiels du champ.

Il faut, bien entendu, remplacer dans (I), (II) les symboles opératifs

$$\frac{d}{dx}, \quad \frac{d}{dy}, \quad \frac{d}{dz}, \quad A\frac{d}{dt}$$

par les équivalents

$$\frac{d}{d\xi}, \quad \frac{d}{d\eta}, \quad \frac{d}{d\zeta}, \quad -a\frac{d}{d\xi}.$$

---

[1] *Voir*, par exemple, MASCART et JOUBERT, *Leçons, etc.*, t. I, p. 671-675.

On a ainsi

$$\text{(III)}\quad \begin{cases} L = L_1, \\ M = -ma\,\dfrac{d\frac{1}{\Delta}}{d\zeta} + M_1, \\ N = ma\,\dfrac{d\frac{1}{\Delta}}{d\eta} + N_1; \end{cases}$$

$$\text{(IV)}\quad \begin{cases} X = -m(1-a^2)\,\dfrac{d\frac{1}{\Delta}}{d\xi} + X_1, \\ Y = -m\,\dfrac{d\frac{1}{\Delta}}{d\eta} + Y_1, \\ Z = -m\,\dfrac{d\frac{1}{\Delta}}{d\zeta} + Z_1; \end{cases}$$

où

$$\text{(V)}\quad \begin{cases} L_1 = \dfrac{dV_1}{d\zeta}, \\ M_1 = -\dfrac{dU_1}{d\zeta}, \\ N_1 = \dfrac{dU_1}{d\eta} - \dfrac{dV_1}{d\xi}; \end{cases}$$

$$\text{(VI)}\quad \begin{cases} X_1 = -\dfrac{dF_1}{d\xi} + a\,\dfrac{dU_1}{d\xi}, \\ Y_1 = -\dfrac{dF_1}{d\eta} + a\,\dfrac{dV_1}{d\xi}, \\ Z_1 = -\dfrac{dF_1}{d\zeta} \end{cases}$$

représentent évidemment les composantes des forces électromagnétiques du champ provenant de la distribution et des courants induits sur le plan ϖ. Les premiers termes, dans (III) et (IV), définissent, au contraire, le champ qui serait produit par le mouvement de m, s'il n'y avait pas de plan conducteur.

Nous avons désormais tout ce qu'il nous faut pour aborder la résolution mathématique de notre question. En effet, nous allons montrer que, en tenant compte des conditions qualitatives rappelées ci-dessus, les équations (4) et (6) suffisent bien à déterminer F_1, U_1, V_1.

16. *Expressions analytiques des potentiels retardés.* — Explicitons d'abord les équations (6) en y exprimant tout en fonction de nos inconnues F_1, U_1, V_1.

On a, d'après (IV) et (VI),

$$X = -m(1-a^2)\frac{d\frac{1}{\Delta}}{d\xi} - \frac{dF_1}{d\xi} + a\frac{dU_1}{d\xi},$$

$$Y = -m\frac{d\frac{1}{\Delta}}{d\eta} - \frac{dF_1}{d\eta} + a\frac{dV_1}{d\xi},$$

et, par suite, en remplaçant Au_1, Av_1 par leurs valeurs (5),

$$(6') \qquad \begin{cases} \dfrac{k}{2\pi}\dfrac{dU_1}{d|\zeta|} - \dfrac{dF_1}{d\xi} + a\dfrac{dU_1}{d\xi} = m(1-a^2)\dfrac{d\frac{1}{\Delta}}{d\xi}, \\[2ex] \dfrac{k}{2\pi}\dfrac{dV_1}{d|\zeta|} - \dfrac{dF_1}{d\eta} + a\dfrac{dV_1}{d\xi} = m\dfrac{d\frac{1}{\Delta}}{d\eta}. \end{cases}$$

Ces deux relations sont satisfaites en tout point du plan $\zeta = 0$. Il est aisé d'en déduire deux autres valables en tout point de l'espace.

Remarquons pour cela que, d'après les propriétés dont doivent jouir F_1, U_1, V_1, les premiers membres des (6') sont deux fonctions de ξ, η, $|\zeta|$, holomorphes pour toutes les valeurs réelles de ξ, η et pour $|\zeta| > 0$, se réduisant respectivement à

$$m(1-a^2)\frac{d\frac{1}{\Delta}}{d\xi}, \qquad m\frac{d\frac{1}{\Delta}}{d\eta}$$

pour $|\zeta| = 0$, et vérifiant l'équation

$$\Box f = 0.$$

Les fonctions $m(1-a^2)\dfrac{d\frac{1}{\Delta}}{d\xi}$, $m\dfrac{d\frac{1}{\Delta}}{d\eta}$ elles-mêmes satisfont à toutes ces conditions, pourvu seulement qu'on y remplace ζ par $-|\zeta|$ (autrement elles auraient des singularités au point m).

Comme il n'en peut pas exister d'autres, on voit bien qu'en posant

$$(7) \qquad \nabla^2 = \xi^2 + (1-a^2)[\eta^2 + (|\zeta| + d)^2]$$

on tire des (6′) les équations

$$(8)\qquad \begin{cases} \dfrac{k}{2\pi}\dfrac{dU_1}{d|\zeta|} - \dfrac{dF_1}{d\xi} + a\dfrac{dU_1}{d\xi} = m(1-a^2)\dfrac{d\frac{1}{V}}{d\xi}, \\[2ex] \dfrac{k}{2\pi}\dfrac{dV_1}{d|\zeta|} - \dfrac{dF_1}{d\eta} + a\dfrac{dV_1}{d\xi} = m\dfrac{d\frac{1}{V}}{d\eta}, \end{cases}$$

vérifiées en tout point de l'espace.

Il s'agit maintenant d'intégrer le système formé des équations du premier ordre (8), de

$$(4)\qquad a\frac{dF_1}{d\xi} = \frac{dU_1}{d\xi} + \frac{dV_1}{d\eta},$$

et des équations du second ordre

$$(9)\qquad \square F_1 = 0, \qquad \square U_1 = 0, \qquad \square V_1 = 0,$$
$$\left[\square = (1-a^2)\frac{d^2}{d\xi^2} + \frac{d^2}{d\eta^2} + \frac{d^2}{d\zeta^2}\right],$$

qui sont bien compatibles, par des fonctions de ξ, η, $|\zeta|$, holomorphes dans le domaine indiqué tout à l'heure, et s'annulant pour $|\zeta| = \infty$, comme il convient à des potentiels de distributions situées sur le plan $\zeta = 0$.

Les conditions aux limites (6′) sont alors nécessairement satisfaites.

Détermination de F_1. — En dérivant la première des équations (8) par rapport à ξ, la seconde par rapport à η, et ayant égard à (4), il vient

$$\frac{ak}{2\pi}\frac{d^2F_1}{d|\zeta|\,d\xi} - \frac{d^2F_1}{d\xi^2} - \frac{d^2F_1}{d\eta^2} + a^2\frac{d^2F_1}{d\xi^2} = m\left[(1-a^2)\frac{d^2\frac{1}{V}}{d\xi^2} + \frac{d^2\frac{1}{V}}{d\eta^2}\right],$$

d'où, à cause de

$$\square F_1 = 0, \qquad \square\frac{1}{V} = 0,$$

$$\frac{ak}{2\pi}\frac{d^2F_1}{d|\zeta|\,d\xi} + \frac{d^2F_1}{d|\zeta|^2} = -m\frac{d\frac{1}{V}}{d|\zeta|^2}.$$

En intégrant, par rapport à $|\zeta|$, depuis une valeur quelconque jusqu'à l'infini, on obtient

$$(10)\qquad \frac{ak}{2\pi}\frac{dF_1}{d\xi} + \frac{dF_1}{d|\zeta|} = -m\frac{d\frac{1}{V}}{d|\zeta|},$$

car les deux membres s'annulent pour $|\zeta| = \infty$.

Dans cette équation mettons en évidence $F_1 + \frac{m}{\nabla}$ comme fonction inconnue. Elle s'écrit alors

$$\frac{ak}{2\pi}\frac{d}{d\xi}\left(F_1 + \frac{m}{\nabla}\right) + \frac{d}{d|\zeta|}\left(F_1 + \frac{m}{\nabla}\right) = m\frac{ak}{2\pi}\frac{d\frac{1}{\nabla}}{d\xi}, \tag{10'}$$

et il est aisé d'en obtenir une solution par l'artifice suivant.

Posons

$$\tau^2 = \left(\xi + \frac{ak}{2\pi}\mu\right)^2 + (1 - a^2)[\eta^2 + (|\zeta| + d + \mu)^2], \tag{11}$$

μ étant une indéterminée.

On a évidemment

$$\left(\frac{1}{\tau}\right)_{\mu=0} = \frac{1}{\nabla}, \qquad \left(\frac{1}{\tau}\right)_{\mu=\infty} = 0,$$

$$\square\frac{1}{\tau} = 0,$$

et en outre $\left(\tau \text{ dépendant de } \mu \text{ par l'intermédiaire des arguments } \xi + \frac{ak}{2\pi}\mu, |\zeta| + d + \mu\right)$

$$\frac{d\frac{1}{\tau}}{d\mu} = \frac{ak}{2\pi}\frac{d\frac{1}{\tau}}{d\xi} + \frac{d\frac{1}{\tau}}{d|\zeta|}.$$

D'après cela, la fonction

$$F_1 + \frac{m}{\nabla} = -m\frac{ak}{2\pi}\int_0^\infty \frac{d\frac{1}{\tau}}{d\xi}\,d\mu \quad (^1) \tag{12}$$

satisfait bien à l'équation (10'). Mais elle satisfait encore à

$$\square\left(F_1 + \frac{m}{\nabla}\right) = 0,$$

---

(1) Il est à peine nécessaire de faire remarquer que la fonction sous le signe $\frac{d\frac{1}{\tau}}{d\xi}$ reste finie et continue pour toute valeur de $\mu \geq 0$ et devient infiniment petite du second ordre pour $\mu = \infty$. Dès lors, l'intégrale de $\frac{d\frac{1}{\tau}}{d\xi}$ entre 0 et ∞ a un sens; elle est même une fonction régulière des arguments ξ, η, $|\zeta|$ dans tout le champ réel (c'est-à-dire pour toutes les valeurs réelles de ξ, η, ζ); elle peut être dérivée sous le signe, etc.

s'annule à l'infini et se comporte régulièrement pour toutes les valeurs réelles de ξ, η, ζ, ayant seulement une discontinuité normale pour $\zeta = 0$ (qui provient de l'argument $|\zeta|$). Il en est de même pour F_1, dont on a ainsi achevé la recherche.

En effet, comme F_1 doit satisfaire à (10), son expression ne pourrait différer de (12) que par une fonction arbitraire de $\xi + \frac{ak}{2\pi}|\zeta|$. Mais, d'après les autres conditions qui sont imposées à F_1, cette fonction de $\xi + \frac{ak}{2\pi}|\zeta|$ devrait satisfaire à l'équation $\square f = 0$ et s'annuler à l'infini. Dès lors, elle est identiquement nulle, ce qui démontre l'unicité de la solution fournie par (12).

Détermination de V_1. — La seconde des équations (8) peut être écrite

$$(8_b) \qquad a\frac{dV_1}{d\xi} + \frac{k}{2\pi}\frac{dV_1}{d|\zeta|} = \frac{d}{d\eta}\left(F_1 + \frac{m}{\mathrm{r}}\right).$$

Posons (ν étant une nouvelle indéterminée)

$$(13) \qquad \mathfrak{r}^2 = \left(\xi + \frac{ak}{2\pi}\mu + a\nu\right)^2 + (1-a^2)\left[\eta^2 + \left(|\zeta| + d + \mu + \frac{k}{2\pi}\nu\right)^2\right],$$

d'où

$$\left(\frac{1}{\mathfrak{r}}\right)_{\nu=0} = \frac{1}{r}, \qquad \left(\frac{1}{\mathfrak{r}}\right)_{\nu=\infty} = 0,$$

$$\square\frac{1}{\mathfrak{r}} = 0, \qquad \frac{d\frac{1}{\mathfrak{r}}}{d\nu} = a\frac{d\frac{1}{\mathfrak{r}}}{d\xi} + \frac{k}{2\pi}\frac{d\frac{1}{\mathfrak{r}}}{d|\zeta|}.$$

Ayant égard à (12), on reconnaît sans peine que

$$(14) \qquad V_1 = m\frac{ak}{2\pi}\int_0^{\infty} d\mu \int_0^{\infty} \frac{d^2\frac{1}{\mathfrak{r}}}{d\xi\, d\eta}\, d\nu$$

est une solution de (8_b).

On s'assure, comme tout à l'heure, que cette expression de V_1 satisfait bien à toutes les autres conditions, et c'est la seule pour laquelle il en soit ainsi.

Une remarque s'impose toutefois à l'égard de l'intégrale double

$$\int_0^{\infty} d\mu \int_0^{\infty} \frac{d^2\frac{1}{\mathfrak{r}}}{d\xi\, d\eta}\, d\nu.$$

Tant qu'on n'a pas à la fois $a = k = 0$, la fonction sous le signe $\frac{d^2\frac{1}{\mathfrak{r}}}{d\xi\, d\eta}$ devient

infiniment petite du troisième ordre, lorsque le point représentatif (μ, ν) s'éloigne à l'infini d'une façon quelconque dans le premier quadrant. L'intégration est alors légitime et V_1 est bien une fonction régulière de $\xi, \eta, |\zeta|$.

Mais il ne serait pas permis de supposer à la fois $a = k = 0$, puisqu'alors $\mathfrak{E}$ ne dépendrait plus de ν, et l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{d^2 \frac{1}{\mathfrak{E}}}{d\xi\, d\eta}\, d\nu$$

n'aurait pas de sens.

Cherchons donc directement ce qui se passe pour V_1 (et pour U_1) lorsque $a = k = 0$.

Ce n'est pas difficile, puisque, pour $a = 0$, quel que soit d'ailleurs k, on est reconduit au problème statique.

Il s'agit alors de l'influence d'une charge électrique $m(0, 0, d)$ sur le plan conducteur $\zeta = 0$: U_1 et V_1 sont évidemment nuls, et il est bien connu que le potentiel électrostatique de la distribution induite se réduit à

$$F_1 = -\frac{m}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + (|\zeta| + d)^2}}.$$

C'est bien ce qui résulte des (15), (14) et (12) en y faisant $a = 0$. Mais en surplus, nous pouvons maintenant affirmer, à l'égard de U_1 et V_1, qu'ils s'annulent pour $a = 0$, même si k est aussi $= 0$, tandis que cette conclusion n'aurait pas été légitime d'après les formules (14) et (15), puisqu'elles n'ont plus de sens pour $a = k = 0$.

Détermination de U_1. — Attendu la forme de V_1, l'équation (4), c'est-à-dire

$$\frac{d(U_1 - aF_1)}{d\xi} + \frac{dV_1}{d\eta} = 0,$$

nous donne après coup

$$U_1 - aF_1 = -m\frac{ak}{2\pi}\int_0^\infty d\mu \int_0^\infty \frac{d^2 \frac{1}{\mathfrak{E}}}{d\eta^2}\, d\nu, \tag{15}$$

fonction régulière, etc.

Il nous reste à vérifier la première des équations (8), qu'on peut écrire

$$\begin{aligned} (8_a)\qquad & a\frac{d}{d\xi}(U_1 - aF_1) + \frac{k}{2\pi}\frac{d}{d|\zeta|}(U_1 - aF_1) \\ & - (1 - a^2)\frac{d}{d\xi}\left(F_1 + \frac{m}{\nabla}\right) + \frac{ak}{2\pi}\frac{d}{d|\zeta|}\left(F_1 + \frac{m}{\nabla}\right) = m\frac{ak}{2\pi}\frac{d\frac{1}{\nabla}}{d|\zeta|}. \end{aligned}$$

Son premier membre, en y introduisant pour $U_1 - aF_1$, $F_1 + \frac{m}{V}$ leurs valeurs (15), (12), devient

$$-m\frac{ak}{2\pi}\left[\int_0^\infty d\mu \int_0^\infty \frac{d^2}{d\eta^2}\left(a\frac{d\frac{1}{\mathfrak{G}}}{d\xi} + \frac{k}{2\pi}\frac{d\frac{1}{\mathfrak{G}}}{d|\zeta|}\right)d\nu \right.$$
$$\left. -(1-a^2)\int_0^\infty \frac{d^2\frac{1}{\tau}}{d\xi^2}d\mu + \frac{ak}{2\pi}\int_0^\infty \frac{d^2\frac{1}{\tau}}{d|\zeta|\,d\xi}d\nu\right].$$

Mais à cause des identités

$$a\frac{d\frac{1}{\mathfrak{G}}}{d\xi} + \frac{k}{2\pi}\frac{d\frac{1}{\mathfrak{G}}}{d|\zeta|} = \frac{d\frac{1}{\mathfrak{G}}}{d\nu},$$

$$\left(\frac{1}{\mathfrak{G}}\right)_{\nu=0} = \frac{1}{\tau}, \qquad \left(\frac{1}{\mathfrak{G}}\right)_{\nu=\infty} = 0,$$

l'intégrale double se réduit à

$$-\int_0^\infty \frac{d^2\frac{1}{\tau}}{d\eta^2}d\mu,$$

dont la somme avec $-(1-a^2)\int_0^\infty \frac{d^2\frac{1}{\tau}}{d\xi^2}d\mu$ peut être remplacée $\left(\text{à cause de } \square\frac{1}{\tau} = 0\right)$ par

$$\int_0^\infty \frac{d^2\frac{1}{\tau}}{d|\zeta|^2}d\mu.$$

Le premier membre de (8_a) n'est donc autre chose que

$$-m\frac{ak}{2\pi}\int_0^\infty \frac{d}{d|\zeta|}\left(\frac{ak}{2\pi}\frac{d\frac{1}{\tau}}{d\xi} + \frac{d\frac{1}{\tau}}{d|\zeta|}\right)d\mu.$$

Comme on a

$$\frac{ak}{2\pi}\frac{d\frac{1}{\tau}}{d\xi} + \frac{d\frac{1}{\tau}}{d|\zeta|} = \frac{d\frac{1}{\tau}}{d\mu},$$

$$\left(\frac{1}{\tau}\right)_{\mu=0} = \frac{1}{V}, \qquad \left(\frac{1}{\tau}\right)_{\mu=\infty} = 0,$$

il reste bien

$$m\frac{ak}{2\pi}\frac{d\frac{1}{\nabla}}{d|\zeta|}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Remarque. — Les quadratures indiquées dans les formules qui donnent F_1, U_1, V_1 peuvent toutes être effectuées à l'aide des transcendants élémentaires.

Ainsi, par exemple, en posant

$$\zeta_1 = \frac{\frac{ak}{2\pi}\xi + (1-a^2)(|\zeta|+d)}{1-a^2-\frac{a^2k^2}{4\pi^2}},$$

on obtient

$$\int_0^{+\infty}\frac{d\frac{1}{\tau}}{d\xi}\,d\mu = \frac{\xi-\frac{ak}{2\pi}\zeta_1}{\sqrt{1-a^2-\frac{a^2k^2}{4\pi^2}}}\,\frac{1}{\nabla\left(\nabla+\sqrt{1-a^2-\frac{a^2k^2}{4\pi^2}}\,\zeta_1\right)},$$

d'où

$$(12\ bis)\qquad F_1+\frac{m}{\nabla} = -m\frac{ak}{2\pi}\,\frac{\xi-\frac{ak}{2\pi}\zeta_1}{\sqrt{1-a^2-\frac{a^2k^2}{4\pi^2}}}\,\frac{1}{\nabla\left(\nabla+\sqrt{1-a^2-\frac{a^2k^2}{2\pi^2}}\,\zeta_1\right)}.$$

C'est une expression assez peu instructive, dont, d'ailleurs, on n'aura pas besoin dans la suite.

Les expressions de U_1 et de V_1 sont encore plus compliquées. Je ne les transcris pas, parce que je n'aurai pas non plus occasion de m'en servir.

17. *Étude des fonctions* F_1, U_1, V_1 *pour les petites valeurs du paramètre* a. — L'expression (12) de F_1 est valable pour toutes les valeurs (réelles) de a et de k, l'intégrale

$$\int_0^{+\infty}\frac{d\frac{1}{\tau}}{d\xi}\,d\mu$$

étant une fonction régulière de ξ, η, $|\zeta|$, même pour $a = k = 0$. Montrons que, comme fonction de ces paramètres aussi, elle est holomorphe dans le domaine de $a = k = 0$.

On pourrait le déduire de (12 *bis*). Ce serait une vérification *a posteriori* exigeant le calcul préalable de l'intégrale; il vaut peut-être mieux s'en rendre compte directement comme il suit.

Partons de l'identité

$$\int_0^{\infty} \frac{d\frac{1}{\tau}}{d\xi}\, d\mu = \int_0^{1} \frac{d\frac{1}{\tau}}{d\xi}\, d\mu + \int_1^{\infty} \frac{d\frac{1}{\tau}}{d\xi}\, d\mu,$$

changeons, dans la seconde intégrale, μ en $\frac{1}{\mu}$, et posons

$$\tau_1^2 = \left(\mu\xi + \frac{ak}{2\pi}\right)^2 + (1 - a^2)[\mu^2\eta^2 + (1 + \mu|\zeta| + \mu d)^2].$$

Il vient

$$\int_0^{\infty} \frac{d\frac{1}{\tau}}{d\xi}\, d\mu = -\int_0^{1} \left(\frac{\xi + \frac{ak}{2\pi}\mu}{\tau^3} + \frac{\mu\xi + \frac{ak}{2\pi}}{\tau_1^3}\right) d\mu.$$

Dans le second membre, la fonction sous le signe est bien une fonction holomorphe de a et de k, au voisinage de $a = k = 0$, pour toutes les valeurs de μ comprises dans l'intervalle d'intégration. (En effet, ni τ, ni τ_1 ne s'annulent dans cet intervalle, lorsqu'on y fait $a = k = 0$.)

Cela suffit pour nous assurer qu'il en est de même de l'intégrale $\int_0^{\infty} \frac{d\frac{1}{\tau}}{d\xi}\, d\mu$.

F_1 *se comporte donc régulièrement pour les petites valeurs des paramètres a et k.*

Elle est, par conséquent, développable suivant les puissances de a et de k.

Occupons-nous particulièrement du développement suivant les puissances de a.

Les expressions de τ et τ_1 montrent que, en envisageant a comme une variable complexe de module non supérieur à l'unité (quelles que soient les valeurs réelles de ξ, η, ζ, réelles et non négatives de k, μ), les modules de τ^2, τ_1^2 ne peuvent pas descendre au-dessous de

$$[\eta^2 + (|\zeta| + d + \mu)^2] \qquad (1 - |a|^2),$$
$$[\mu^2\eta^2 + (1 + \mu|\zeta| + \mu d)^2](1 - |a|^2),$$

dès qu'on suppose

$$\frac{k}{2\pi} < 1.$$

Donc ni τ ni τ_1 ne s'annulent tant que

$$|a| < 1,$$

et l'on en conclut :

F_1 *est une fonction de* a, *certainement holomorphe à l'intérieur de la circonférence* $|a| = 1$. *Son développement en série de puissances de* a *est donc toujours convergent* (a étant ici < 1), *pourvu seulement que l'on ait*

$$\frac{k}{2\pi} < 1. \tag{16}$$

Les fonctions U_1 et V_1 ne sont pas holomorphes pour $a = k = 0$.

La recherche des singularités dont elles sont affectées pour ce couple de valeurs nous entraînerait trop loin.

Les remarques suivantes suffisent pour notre but.

Tout d'abord, *dès qu'on suppose* $k > 0$, U_1 *et* V_1 *sont des fonctions holomophes de* a, *au voisinage de* $a = 0$.

On le démontre sans peine en changeant, dans les intégrales doubles à l'aide desquelles s'expriment U_1 et V_1, ν en $\frac{2\pi\nu}{k}$ (ce qui implique justement que k soit différent de zéro), et en vérifiant ensuite que les fonctions sous le signe restent holomorphes au voisinage de $a = 0$, dans tout le champ d'intégration. Il va sans dire que, le champ étant infini, la vérification doit être conduite avec les précautions nécessaires, conformément à ce qu'on vient de faire pour l'intégrale simple exprimant F_1.

Cela nous assure que U_1 et V_1 sont développables suivant les puissances de a, *pour* a *assez petit.* Mais si l'on cherche, comme ci-dessus, à fixer une limite inférieure pour la validité du développement, on est conduit à la condition restrictive

$$|a| < \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{k}{2\pi} + \frac{2\pi}{k}\right)^2}}.$$

Les développements de U_1 et V_1 suivant les puissances de a ne convergent donc (ou du moins on n'a pas le droit d'affirmer qu'il en est ainsi) que sous la condition

$$a < \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{k}{2\pi} + \frac{2\pi}{k}\right)^2}}. \tag{17}$$

Pour les valeurs numériques de a et de k, qu'on peut présumer dans les conditions expérimentales ordinaires (*voir* le numéro suivant), l'inégalité (16) est toujours satisfaite; mais il n'en est pas de même pour la (17), et l'on devrait par suite renoncer à développer U_1 et V_1 suivant les puissances de a.

On peut tourner la difficulté en modifiant un peu la forme du développement. Posons

$$(18) \qquad h = \frac{2\pi a}{k},$$

$$(19) \qquad \mathcal{C}'^2 = \left(\xi + \frac{ak}{2\pi}\mu + h\nu\right)^2 + (1 - a^2)[\eta^2 + (|\zeta| + d + \mu + \nu)^2].$$

Les expressions (14) et (15) de V_1 et de $U_1 - aF_1$, après le changement de ν en $\frac{2\pi}{k}\nu$, peuvent être écrites

$$(14') \qquad V_1 = ma \int_0^{\infty} d\mu \int_0^{\infty} \frac{d^2 \frac{1}{\mathcal{C}'}}{d\xi\, d\eta} d\nu,$$

$$(15') \qquad U_1 - aF_1 = -ma \int_0^{\infty} d\mu \int_0^{\infty} \frac{d^2 \frac{1}{\mathcal{C}'}}{d\eta^2} d\nu.$$

Pour toutes les valeurs réelles de ξ, η, ζ, réelles et non négatives des paramètres h et k, la fonction $\mathcal{C}'^2$ (de la variable complexe a) ne s'annule pour aucune valeur de a, à l'intérieur de la circonférence $|a| = 1$; en supposant, bien entendu, que l'inégalité (16) soit satisfaite. On le vérifie aisément d'après l'expression (19) de $\mathcal{C}'^2$.

Il en résulte cette circonstance importante :

Les développements des intégrales doubles

$$\int_0^{\infty} d\mu \int_0^{\infty} \frac{d^2 \frac{1}{\mathcal{C}'}}{d\eta\, d\xi} d\nu, \qquad \int_0^{\infty} d\mu \int_0^{\infty} \frac{d^2 \frac{1}{\mathcal{C}'}}{d\eta^2} d\nu,$$

suivant les puissances de a, lorsqu'on y traite h comme un paramètre (pouvant prendre, d'ailleurs, une valeur quelconque) *sont convergents, pour $|a| < 1$, sous la seule condition* (16), *qui garantit également la validité du développement de F_1.*

18. *Expressions approchées lorsqu'on néglige les termes en a^2. — Caractères généraux du champ.* — Au point de vue des applications physiques, on peut traiter a et k comme des quantités très petites.

Pour nous rendre compte de l'ordre de grandeur, supposons, par exemple, que la vitesse de la charge mobile soit de 300^{m} par seconde (ce qui est déjà assez exagéré); il vient alors

$$a = \frac{300 \cdot 10^2}{3 \cdot 10^{10}} = 10^{-6}.$$

Supposons que le plan conducteur σ soit une plaque de cuivre de l'épaisseur d'un millimètre.

Si g est l'épaisseur de la plaque, r sa résistance spécifique (exprimée en ohms), on aura, d'après le n° 15,

$$k = \frac{1}{30} R_0 = \frac{1}{30} \frac{r}{g}.$$

A présent

$$r = 16.10^{-7},$$

à peu près, et

$$g = 10^{-1};$$

il en résulte donc que l'on a à peu près

$$k = \tfrac{1}{2} 10^{-6},$$

$$h = \frac{2\pi a}{k} = 4\pi.$$

La condition

$$(16) \qquad \frac{k}{2\pi} < 1$$

est bien vérifiée (et le sera toujours, de quelque façon que l'on modifie les conditions expérimentales). L'inégalité (17) ne l'est pas (mais on pourrait y satisfaire, soit en remplaçant le cuivre par un métal plus résistant, soit en supposant la plaque plus mince).

Pour avoir des expressions approchées, valables en tout cas (et plus que suffisantes dans la pratique non seulement pour l'analyse qualitative, mais aussi pour la discussion numérique du champ), il convient de développer suivant les puissances de a, en ayant soin, bien entendu, de traiter les intégrales doubles (14') et (15') comme il a été indiqué au numéro précédent.

On pourra bien se contenter des termes du premier ordre en a, car les termes d'ordre supérieur sont absolument négligeables.

En effet, dès que le rayon de convergence des développements dont il s'agit est l'unité, on est assuré que la somme des termes d'ordre supérieur au premier ne dépasse pas, pour $|a| < \frac{1}{n}$,

$$\frac{\mathfrak{M} n^2 |a|^2}{1 - n|a|},$$

où $n > 1$ et où $\mathfrak{M}$ est le module maximum des valeurs que la fonction correspondant à la série prend sur la circonférence $|a| = \frac{1}{n}$.

Par cette voie il serait aisé de vérifier en toute rigueur que, pour les trois fonctions

$$a\int_0^{\infty}\frac{d\frac{1}{\tau}}{d\xi}d\mu,\quad a\int_0^{\infty}d\mu\int_0^{\infty}\frac{d^2\frac{1}{\mathfrak{G}'}}{d\xi\,d\eta}d\nu,\quad a\int_0^{\infty}d\mu\int_0^{\infty}\frac{d^2\frac{1}{\mathfrak{G}'}}{d\eta^2}d\nu,$$

les restes (après les termes en a) ont des valeurs numériques tout à fait négligeables, même si la vitesse de convection atteignait quelques kilomètres par seconde.

Cela posé, arrivons à l'évaluation effective des expressions approchées.

On a, tout d'abord, en négligeant a^2,

$$(7')\qquad \nabla^2 = \xi^2+\eta^2+(|\zeta|+d)^2.$$

Comme, d'autre part, les seconds membres des formules (12), (14') et (15') contiennent a en facteur, on peut poser $a=0$ dans les fonctions τ et $\mathfrak{G}'$. Les expressions de ces fonctions se réduisent alors à

$$(11')\qquad \tau^2=\xi^2+\eta^2+(|\zeta|+d+\mu)^2,$$

$$(19')\qquad \mathfrak{G}'^2=(\xi+h\nu)^2+\eta^2+(|\zeta|+d+\mu+\nu)^2.$$

Il en résulte

$$\int_0^{\infty}\frac{d\frac{1}{\tau}}{d\xi}d\mu=-\frac{\xi}{\nabla(\nabla+|\zeta|+d)},$$

d'où, en posant pour abréger,

$$(20)\qquad f=\frac{1}{\nabla(\nabla+|\zeta|+d)},$$

$$(12')\qquad F_1=-\frac{m}{\nabla}+m\frac{ak}{2\pi}\xi f.$$

D'après (V), pour former les composantes de la force magnétique, on a besoin de $\frac{dV_1}{d\zeta}$, $\frac{dU_1}{d\zeta}$, $\frac{dU_1}{d\eta}-\frac{dV_1}{d\xi}$, pendant que, d'après (VI), les termes en U_1 et V_1, dans les composantes de la force électrique, résultent du second ordre et doivent par conséquent être négligés. Il convient ainsi d'évaluer directement

$$\frac{dV_1}{d|\zeta|},\quad \frac{dU_1}{d|\zeta|},\quad \frac{dU_1}{d\eta}-\frac{dV_1}{d\xi},$$

au lieu de U_1 et V_1.

On peut écrire, d'après (14'),

$$\frac{dV_1}{d|\zeta|} = ma\frac{d}{d\xi}\int_0^{+\infty} d\nu \frac{d}{d\eta}\int_0^{+\infty} \frac{d\frac{1}{\mathfrak{C}'}}{d|\zeta|}d\mu;$$

mais, en tenant compte de ce que

$$\frac{d\frac{1}{\mathfrak{C}'}}{d\mu} = \frac{d\frac{1}{\mathfrak{C}'}}{d|\zeta|}, \qquad \left(\frac{1}{\mathfrak{C}'}\right)_{\mu=\infty} = 0,$$

l'intégrale intérieure se réduit à

$$-\left(\frac{1}{\mathfrak{C}'}\right)_{\mu=0},$$

et, par suite, $\frac{dV_1}{d|\zeta|}$ à

$$-ma\frac{d}{d\xi}\int_0^{+\infty}\frac{d\left(\frac{1}{\mathfrak{C}'}\right)_{\mu=0}}{d\eta}d\nu.$$

Le calcul de l'intégrale donne

$$\int_0^{\infty}\frac{d\left(\frac{1}{\mathfrak{C}'}\right)_{\mu=0}}{d\eta}d\nu = -\eta\varphi,$$

en ayant posé

$$\varphi = \frac{1}{\nabla\left(\sqrt{1+h^2}\,\nabla + h\xi + |\zeta| + d\right)}. \tag{21}$$

Il vient donc

$$\frac{dV_1}{d|\zeta|} = ma\frac{d(\eta\varphi)}{d\xi}. \tag{14''}$$

On trouve de même

$$\frac{d}{d|\zeta|}(U_1 - aF_1) = -ma\frac{d(\eta\varphi)}{d\eta},$$

d'où, en négligeant dans aF_1 les termes du second ordre,

$$\frac{dU_1}{d|\zeta|} = -ma\left[\frac{d\frac{1}{\nabla}}{d|\zeta|} + \frac{d(\eta\varphi)}{d\eta}\right]. \tag{15''}$$

Quant à $\frac{dU_1}{d\eta} - \frac{dV_1}{d\xi}$, les formules (14′) et (15′), en remarquant que

$$\frac{d^2 \frac{1}{\mathfrak{r}'}}{d\xi^2} + \frac{d^2 \frac{1}{\mathfrak{r}'}}{d\eta^2} = - \frac{d^2 \frac{1}{\mathfrak{r}'}}{d|\zeta|^2},$$

donnent

$$\frac{dU_1}{d\eta} - \frac{dV_1}{d\xi} = ma \frac{d}{d|\zeta|_e} \int_0^{+\infty} d\nu \frac{d}{d\eta_e} \int_0^{+\infty} \frac{d \frac{1}{\mathfrak{r}'}}{d|\zeta|} d\mu + a \frac{dF_1}{d\eta},$$

et il reste, comme ci-dessus,

$$\frac{dU_1}{d\eta} - \frac{dV_1}{d\xi} = ma \left[- \frac{d \frac{1}{\mathfrak{r}}}{d\eta} + \frac{d(\eta\varphi)}{d|\zeta|} \right].$$

On a évidemment

$$\frac{dU_1}{d\zeta} = \pm \frac{dU_1}{d|\zeta|}, \qquad \frac{dV_1}{d\zeta} = \pm \frac{dV_1}{d|\zeta|},$$

selon que $\zeta \gtrless 0$.

Les composantes de la force magnétique provenant du plan conducteur σ sont donc, d'après (V),

$$(\text{V}') \qquad \begin{cases} L_1 = ma \dfrac{d(\eta\varphi)}{d\xi}, \\[2ex] M_1 = ma \left[\dfrac{d \frac{1}{\mathfrak{r}}}{d|\zeta|} + \dfrac{d(\eta\varphi)}{d\eta} \right], \\[2ex] N_1 = ma \left[- \dfrac{d \frac{1}{\mathfrak{r}}}{d\eta} + \dfrac{d(\eta\varphi)}{d|\zeta|} \right], \end{cases}$$

pour $\zeta > 0$, et

$$(\text{V}'') \qquad \begin{cases} L_1 = - ma \dfrac{d(\eta\varphi)}{d\xi}, \\[2ex] M_1 = - ma \left[\dfrac{d \frac{1}{\mathfrak{r}}}{d|\zeta|} + \dfrac{d(\eta\varphi)}{d\eta} \right], \\[2ex] N_1 = - ma \left[- \dfrac{d \frac{1}{\mathfrak{r}}}{d\eta} + \dfrac{d(\eta\varphi)}{d|\zeta|} \right], \end{cases}$$

pour $\zeta < 0$.

La force électrique dérive du potentiel

$$(\text{VI}') \qquad F_1 = -\frac{m}{\nabla} + m\frac{ak}{2\pi}\xi f.$$

Voilà les modifications du champ dues à l'influence du plan conducteur σ.

Considérons d'un peu plus près ce qui se passe pour $\zeta < 0$, c'est-à-dire au delà de l'écran conducteur σ, par rapport à la charge mobile.

On a alors

$$\nabla = \Delta = \overline{Pm},$$

et, comme on doit négliger a^2, les formules (III) deviennent

$$(\text{III}') \qquad \begin{cases} L = -ma\dfrac{d(\eta\varphi)}{d\xi}, \\ M = -ma\dfrac{d(\eta\varphi)}{d\eta}, \\ N = ma\dfrac{d(\eta\varphi)}{d|\zeta|} = -ma\dfrac{d(\eta\varphi)}{d\zeta}. \end{cases}$$

Il s'ensuit que (aux termes en a^2 près) *la force magnétique totale au delà de l'écran conducteur dérive du potentiel*

$$ma\eta\varphi.$$

La force électrique totale dérive également d'un potentiel; ce potentiel est

$$m\frac{ak}{2\pi}\xi f.$$

C'est une expression à peu près du second ordre, par rapport à a, vu que k a même ordre de grandeur que a. *La force électrique est par suite négligeable.* Le plan conducteur, qui est un diaphragme parfait pour les actions électrostatiques, l'est ici encore, aux termes du second ordre près.

La force magnétique est modifiée par l'interposition du conducteur; l'ordre reste toutefois le même.

Détaillons ce qui se passe aux points immédiatement au-dessous de la charge mobile, c'est-à-dire aux points $M(0, 0, \zeta < 0)$, situés sur le prolongement de la perpendiculaire $m\Omega$, abaissée de m au plan conducteur σ.

On a pour ces points M

$$f = \frac{1}{2(|\zeta| + d)^2} = \frac{1}{2(\zeta - d)^2} = \frac{1}{2}\frac{1}{\overline{Mm}^2},$$

$$\varphi = \frac{1}{1 + \sqrt{1 + h^2}}\frac{1}{\overline{Mm}^2},$$

et les composantes des forces électrique et magnétique sont, par suite,

$$-m\frac{ak}{4\pi}\frac{1}{\overline{Mm}^2},\qquad 0,\qquad 0,$$

$$0,\qquad -\frac{ma}{1+\sqrt{1+h^2}}\frac{1}{\overline{Mm}^2},\qquad 0.$$

Remarquons que, lorsque le plan conducteur n'existe pas, les composantes de la force magnétique sont 0, $-ma\frac{d\frac{1}{\Delta}}{d\zeta}$, $ma\frac{d\frac{1}{\Delta}}{d\eta}$, et elles se réduisent, pour les points M, à

$$0,\quad -ma\frac{1}{\overline{Mm}^2},\quad 0.$$

On en conclut :

La force électrique (négligeable, d'ailleurs, comme il a été observé), *aux points* M, *est inversement proportionnelle au carré de la distance* $\overline{Mm}$ *et directement opposée à la convection.*

La force magnétique est aussi inversement proportionnelle au carré de la distance $\overline{Mm}$, *et est dirigée selon la règle d'Ampère par rapport à la trajectoire de la charge mobile. Elle est à celle qui agirait au même point* M, *s'il n'y avait pas de plan conducteur, dans le rapport de* $\frac{1}{1+\sqrt{1+h^2}}$ *à* 1 $\left(h=\frac{2\pi a}{k}\text{ étant ordinairement un nombre fini}\right)$.

L'interposition du conducteur réduit donc la force magnétique de la moitié au moins, mais la réduction est d'autant plus grande que la résistance k de la plaque conductrice s'affaiblit.

Au cas limite d'une conductivité infinie ($k=0$, $h=\infty$), la force magnétique, de même que la force électrique, s'annulerait partout au delà du plan. Celui-ci serait alors un écran parfait pour toute action électromagnétique.

19. *Cas d'une charge se déplaçant avec la vitesse de la lumière.* — Les expressions générales de F_1, U_1, V_1, assignées au n° 16, sont valables pour toute valeur de $a<1$. Comme elles admettent des limites bien déterminées pour $a=1$, elles restent applicables même dans ce cas.

Les équations (7), (11) et (13) donnent, pour $a=1$,

$$\nabla=|\xi|,\qquad \tau=\left|\xi+\frac{ak}{2\pi}\mu\right|,\qquad \varpi=\left|\xi+\frac{ak}{2\pi}\mu+a\nu\right|,$$

de façon que

$$\frac{ak}{2\pi}\frac{d\frac{1}{\tau}}{d\xi}=\frac{d\frac{1}{\tau}}{d\mu},\qquad \frac{d\frac{1}{\varpi}}{d\eta}=0.$$

Il vient alors, d'après (12), (14), (15),

$$F_1=U_1=V_1=0,$$

c'est-à-dire :

Dans le cas limite où la vitesse de convection serait égale à celle de la lumière, la présence du plan conducteur ne modifie aucunement le champ électromagnétique.

20. *Remarque.* — Le champ électromagnétique, dû à un système quelconque de courants *constants*, n'est pas altéré par la présence d'un plan conducteur (ou plus généralement d'un système quelconque de conducteurs).

C'est un fait d'expérience bien connu, qu'on doit naturellement retrouver par nos formules.

Envisageons le cas du plan indéfini et rapportons-nous cette fois aux axes fixes x, y, z.

Soient F', U', U', W' les potentiels correspondant au système donné de courants. Comme les courants sont constants, ces fonctions ne dépendent pas de t.

Soient, d'autre part, F_1, U_1, V_1 ($W_1=0$), les potentiels inconnus correspondant à la distribution et aux courants induits sur le plan. Évidemment ils ne dépendront pas non plus de t et seront, par suite, des fonctions harmoniques.

On doit les déterminer d'après les équations [(5) du Chapitre I, (6) de ce Chapitre]

$$\frac{dU}{dx}+\frac{dV}{dy}+\frac{dW}{dz}=0,\qquad X=Aku_1,\qquad Y=Akv_1.$$

En tenant compte du fait que $F=F'+F_1$, $U=U'+U_1$, ..., que $u_1=-\frac{1}{2\pi}\frac{dU_1}{d|z|}$, $v_1=-\frac{1}{2\pi}\frac{dV_1}{d|z|}$, que U', V', W' satisfont aussi à la première équation, et en remplaçant X, Y par leurs valeurs (II), il vient

$$\frac{dU_1}{dx}+\frac{dV_1}{dy}=0;\qquad \frac{d}{dx}(F'+F_1)=A\frac{k}{2\pi}\frac{dU_1}{d|z|},\qquad \frac{d}{dy}(F'+F_1)=A\frac{k}{2\pi}\frac{dV_1}{d|z|},$$

les deux dernières équations devant être vérifiées seulement pour $z=0$.

On satisfait bien, et d'une façon unique, à toutes les conditions imposées à F_1, U_1, V_1, en prenant

$$U_1=V_1=0,$$

et en déterminant la fonction harmonique F_1, qui prend sur le plan $z = 0$ la valeur $- F'$ et se comporte régulièrement dans tous les autres points de l'espace.

Le conducteur n'exerce donc aucune perturbation magnétique sur le champ des courants donnés, puisque son potentiel vecteur s'annule.

L'influence sur la force électrique s'évalue comme en électrostatique. Il devait bien en être ainsi, du moment qu'il s'agit d'un régime permanent.

SUR LA

REPRÉSENTATION CONFORME DE DEUX AIRES PLANES

A CONNEXION MULTIPLE,

D'APRÈS M. SCHOTTKY,

PAR M. R. LE VAVASSEUR,

à Toulouse.

Dans le Tome II de son *Traité d'Analyse*, page 285, M. Émile Picard écrit : « Deux aires A et A_1, limitées chacune par un même nombre de contours, ne peuvent pas, en général, être représentées d'une manière conforme l'une sur l'autre. L'étude approfondie de ce problème a été faite par M. Schottky dans un beau et important Mémoire (1). »

Plus loin, même Tome, page 497, en note, M. Émile Picard écrit encore : « Nous avons déjà eu l'occasion de citer le beau travail de M. Schottky; c'est un Mémoire fondamental à plus d'un titre. »

C'est ce Mémoire que j'ai essayé d'exposer.

Dans la dernière Partie, j'ai traité avec quelque détail le cas de la connexion double.

I. — PROBLÈME DE LA REPRÉSENTATION CONFORME DANS LE CAS DE DEUX AIRES SIMPLEMENT CONNEXES.

1. Je considère une aire plane A, limitée par une ligne fermée simple L (c'est-à-dire une ligne fermée qui ne passe pas plus d'une fois par aucun de ses points). Je supposerai que cette ligne a en chacun de ses points une tangente déterminée, et variant d'une façon continue, sauf en certains points isolés, où cette tangente peut changer brusquement de direction. C'est ce qui arriverait, par exemple, si la ligne L était un polygone dont tous les côtés seraient des arcs de cercle.

(1) SCHOTTKY (F.), *Ueber die conforme Abbildung mehrfach zusammenhängender ebener Flächen* (*Journal für die reine und angewandte Mathematik*, t. LXXXIII, p. 300-351; 1877).

Plaçons cette aire sur le plan dont les points représentent les valeurs de la variable complexe $z = x + iy$.

Je regarde comme démontrée la proposition suivante : Il existe une fonction réelle, u, *et une seule,* des variables réelles x et y, qui à l'intérieur du domaine A est uniforme, finie et continue, admet des dérivées partielles des deux premiers ordres, également uniformes, finies et continues, satisfait à l'équation aux dérivées partielles $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, enfin prend sur la limite du domaine des valeurs données à l'avance, ces valeurs formant une suite finie, continue et uniforme ([1]).

Soit $p(z)$ une fonction rationnelle quelconque de z, assujettie à la seule condition de rester finie tout le long de la limite L du domaine A.

Posons

$$p(z) = p_1(x, y) + ip_2(x, y);$$

$p_2(x, y)$ est une fonction de x et de y, à coefficients réels, dont les valeurs le long de L forment une suite finie, continue et uniforme.

Donc, d'après la proposition rappelée plus haut, il existe une fonction, $u = \psi(x, y)$, à coefficients réels, et une seule, uniforme, finie et continue à l'intérieur du domaine A, admettant des dérivées des deux premiers ordres, également uniformes, finies et continues, satisfaisant à l'équation

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0, \tag{1}$$

enfin prenant sur la limite L de A les valeurs de $p_2(x, y)$.

Dans le cas particulier où la fonction $p(z)$ n'aurait pas de pôles à l'intérieur du domaine A, la fonction $u = \psi(x, y)$ serait la fonction $p_2(x, y)$ elle-même. Cela tient à ce que le problème de Dirichlet n'admet qu'une solution.

Je dis qu'il existe une fonction $\varphi(x, y)$, à coefficients réels, telle que $\varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ soit une fonction de $x + iy$: si la fonction existe, elle doit satisfaire aux équations

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Je déduis de là

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy = \frac{\partial \psi}{\partial y} dx - \frac{\partial \psi}{\partial x} dy.$$

D'après l'équation (1), le second membre est bien une différentielle exacte.

Considérons l'intégrale

$$\int \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} dx - \frac{\partial \psi}{\partial x} dy \right)$$

([1]) *Voir* la Thèse de M. Jules Riemann, *Sur le problème de Dirichlet,* p. 5 et 6.

prise le long d'un chemin joignant un point (a, b) intérieur au domaine A, à un point (x, y), également intérieur au domaine A, ce chemin étant tout entier à l'intérieur du domaine A.

Cette intégrale a la même valeur, quel que soit le chemin choisi à l'intérieur du domaine A, pourvu que les extrémités de ce chemin soient toujours les mêmes points (a, b), (x, y).

Cela résulte de ce que cette intégrale, prise le long d'un chemin fermé, intérieur au domaine A, parcouru dans le sens direct, peut se remplacer par l'intégrale double

$$-\int\int\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right)dx\,dy$$

étendue à l'aire incluse à l'intérieur du chemin.

Or cette intégrale double est nulle en vertu de l'équation (1).

Soit donc

$$\varphi(x, y)=\int_{(a,b)}^{(x,y)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}dx-\frac{\partial\psi}{\partial y}dx\right);$$

$\varphi(x,y)$ est une fonction uniforme, finie et continue à l'intérieur du domaine A, puisque, à l'intérieur du domaine A, $\frac{\partial\psi}{\partial x}$ et $\frac{\partial\psi}{\partial y}$ sont, par hypothèse, finies et continues.

La fonction $\varphi(x, y)+i\psi(x, y)$ est une fonction de $x+iy$. Désignons-la par $f(z)$.

Elle est définie à une constante réelle près, et cela à cause du point (a, b) qui a été choisi arbitrairement dans le domaine A.

Cette fonction $f(z)$ a, dans l'intérieur du domaine A, le caractère d'une fonction entière.

Elle prend sur la limite L du domaine A des valeurs dont la partie imaginaire coïncide, en chaque point de L, avec la valeur de la partie imaginaire de la fonction rationnelle $p(z)$.

Enfin, formons la différence

$$K(z)=p(z)-f(z).$$

Nous obtenons ainsi une fonction $K(z)$ qui, à l'intérieur du domaine A, se comporte comme la fonction rationnelle $p(z)$, mais *qui prend sur* L *des valeurs réelles*.

Cette fonction est déterminée à une constante réelle près.

Dans le cas particulier où la fonction $p(z)$ n'aurait pas de pôles à l'intérieur de A, $p(z)$ serait une des fonctions $f(z)$ et $K(z)$ serait une simple constante réelle.

Nous aurons souvent à nous servir de cette remarque.

2. Nous parvenons ainsi à la notion de fonctions $K(z)$ se comportant à l'intérieur du domaine A comme des fonctions rationnelles, et prenant sur la limite L du domaine des valeurs *réelles* et *finies*.

Toutes les fonctions $K(z)$ ainsi trouvées sont de la forme $p(z)-f(z)$, $p(z)$ étant une fonction rationnelle de z, et $f(z)$ ayant le caractère d'une fonction entière à l'intérieur du domaine A.

Je dis qu'il n'en existe pas d'autres ayant les mêmes propriétés.

En effet, prenons une fonction $K(z)$ se comportant à l'intérieur du domaine A comme une fonction rationnelle, et prenant sur la limite L du domaine A des valeurs réelles et finies.

A chaque pôle a de $K(z)$ situé à l'intérieur du domaine A, on peut faire correspondre un polynome $G_a(z)$, entier en z, tel que la différence

$$K(z)-G_a\left(\frac{1}{z-a}\right)$$

reste finie dans le voisinage de $z=a$.

La fonction

$$K(z)-\sum G_a\left(\frac{1}{z-a}\right),$$

où le signe $\sum$ s'étend à tous les pôles de $K(z)$ situés à l'intérieur du domaine A, sera donc finie à l'intérieur de ce domaine. Désignons-la par $-f(z)$.

Alors

$$K(z)=\sum G_a\left(\frac{1}{z-a}\right)-f(z).$$

La fonction $K(z)$ a bien la forme indiquée.

Chaque fonction $K(z)$ est déterminée à une constante réelle près lorsqu'on se donne la fonction rationnelle $p(z)$ qui sert à la former.

Si, au contraire, on se donne une fonction $K(z)$, la fonction $p(z)$ qui correspond à $K(z)$ n'est pas déterminée : seule la partie de $p(z)$ correspondant aux pôles de $K(z)$ intérieurs au domaine A est complètement déterminée.

3. Considérons les fonctions $K(z)$ correspondant, l'une à la fraction rationnelle $p(z)=\frac{1}{z-a}$, l'autre à la fraction rationnelle $p(z)=\frac{i}{z-a}$, a désignant un nombre complexe dont l'affixe est un point intérieur au domaine A.

Soient u_1 la fonction $K(z)$ correspondant à $\frac{1}{z-a}$ et v_1 celle qui correspond à $\frac{i}{z-a}$.

Dans le voisinage du point a, u_1 et v_1 auront des développements de la forme

$$u_1 = \frac{1}{z-a} + a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + \ldots,$$

$$v_1 = \frac{i}{z-a} + b_0 + b_1(z-a) + b_2(z-a)^2 + \ldots,$$

où

$$a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + \ldots, \qquad b_0 + b_1(z-a) + b_2(z-a)^2 + \ldots$$

représentent les premiers termes de deux séries entières convergentes à l'intérieur d'un cercle décrit de a comme centre et tout entier contenu dans le domaine A.

Les coefficients $a_0, a_1, a_2, \ldots; b_0, b_1, b_2, \ldots$ sont complexes.

Définissons deux nombres *réels* g et h par la condition

$$a_0 + ib_0 = g + ih,$$

et considérons la fonction

$$(u_1 - g)^2 + (v_1 - h)^2.$$

C'est une fonction $K(z)$: car elle se comporte à l'intérieur du domaine A comme une fonction rationnelle, et sur la limite du domaine elle prend des valeurs réelles et finies.

Elle ne peut avoir, à l'intérieur du domaine A, que le pôle a.

Or on a

$$(u_1 - g)^2 + (v_1 - h)^2 = [u_1 - g + i(v_1 - h)][u_1 - g - i(v_1 - h)].$$

Mais

$$u_1 - g + i(v_1 - h) = (a_1 + ib_1)(z-a) + (a_2 + ib_2)(z-a)^2 + \ldots,$$

$$u_1 - g - i(v_1 - h) = \frac{2}{z-a} + a_0 - g - i(b_0 - h) + (a_1 - ib_1)(z-a) + \ldots.$$

Le produit sera fini pour $z = a$.

Cette fonction $K(z)$ n'a donc pas de discontinuités à l'intérieur du domaine A. Par suite, c'est une constante réelle, nécessairement positive. Désignons-la par R^2.

On a

$$(u_1 - g)^2 + (v_1 - h)^2 = R^2.$$

On peut poser

$$u_1 - g = \frac{2Rt}{1+t^2}, \qquad -(v_1 - h) = R\,\frac{1-t^2}{1+t^2};$$

d'où

$$t^2(v_1 - h) + v_1 - h = -R + Rt^2,$$

$$t^2 = \frac{-R + h - v_1}{-R + v_1 - h}, \qquad t^2 + 1 = \frac{-2R}{-R + v_1 - h}.$$

Bref,

$$t = \frac{-u_1 + g}{-R + v_1 - h} = \frac{-R + (h - v_1)}{-u_1 + g},$$

en sorte que t est aussi une fonction rationnelle de u_1 et v_1.

4. Soit a un point intérieur au domaine A. Considérons la classe spéciale des fonctions $K(z)$ qui n'ont pas d'autres pôles que a, à l'intérieur du domaine A.

Désignons ces fonctions par $k(z)$.

u_1 et v_1 sont deux fonctions k particulières.

L'expression générale des fonctions k est

$$k(z) = p(z) - f(z),$$

où $f(z)$ a le caractère d'une fonction entière à l'intérieur du domaine A, et où $p(z)$ est de la forme

$$p(z) = \frac{A_1 + B_1 i}{z - a} + \frac{A_2 + B_2 i}{(z - a)^2} + \ldots + \frac{A_m + B_m i}{(z - a)^m}.$$

Soient en général u_j la fonction $k(z)$ relative à $\frac{1}{(z-a)^j}$, et v_j la fonction $k(z)$ relative à $\frac{i}{(z-a)^j}$.

Il est clair que l'on aura

$$\begin{aligned} k(z) = {} & A_1 u_1 + A_2 u_2 + \ldots + A_m u_m \\ & + B_1 v_1 + B_2 v_2 + \ldots + B_m v_m. \end{aligned}$$

En effet : 1° l'expression trouvée est bien de la forme $p(z) - f(z)$; 2° sur la limite L de A, elle est réelle et finie.

Je dis que u_j et v_j sont des fonctions rationnelles à coefficients réels de u_1 et de v_1 et, par conséquent, de t.

Pour u_j et v_j le point a est un pôle d'ordre j.

Il en est de même pour u_1^j et v_1^j.

Comparons ces fonctions :

1° u_1^j est une fonction $k(z)$. Elle est donc de la forme

$$\begin{aligned} u_1^j = {} & \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_j u_j \\ & + \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \ldots + \beta_j v_j, \end{aligned}$$

les constantes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_j, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_j$ étant réelles.

D'ailleurs, on a

$$\lim_{z=a}(z-a)u_1 = 1,$$

donc

$$\lim_{z=a}(z-a)^j u_1^j = 1,$$

donc

$$\alpha_j = 1, \qquad \beta_j = 0.$$

On conclut alors de la formule précédente que, si

$$u_1, \quad u_2, \quad \ldots, \quad u_{j-1}; \qquad v_1, \quad v_2, \quad \ldots, \quad v_{j-1}$$

sont exprimables en fonction rationnelle à coefficients réels de t, il en sera de même de u_j.

2° Formons maintenant la combinaison

$$u_1 \cos\varphi + v_1 \sin\varphi,$$

φ étant réel.

$(u_1 \cos\varphi + v_1 \sin\varphi)^j$ est une fonction $k(z)$ admettant le pôle $z = a$ avec l'ordre de multiplicité j.

On peut donc poser

$$(u_1 \cos\varphi + v_1 \sin\varphi)^j = \gamma_1 u_1 + \gamma_2 u_2 + \ldots + \gamma_j u_j + \delta_1 v_1 + \delta_2 v_2 + \ldots + \delta_j v_j,$$

les constantes $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_j$, et $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_j$ étant toutes réelles.

Mais on a

$$\lim_{z=a}(z-a)(u_1 \cos\varphi + v_1 \sin\varphi) = \cos\varphi + i \sin\varphi,$$

donc

$$\lim_{z=a}(z-a)^j(u_1 \cos\varphi + v_1 \sin\varphi)^j = \cos(j\varphi) + i \sin(j\varphi),$$

donc

$$\gamma_j = \cos(j\varphi), \qquad \delta_j = \sin(j\varphi).$$

On pourra toujours choisir φ de manière que δ_j ne soit pas nul.

Alors de la formule précédente on déduit que, si $u_1, u_2, \ldots, u_j, v_1, v_2, \ldots, v_{j-1}$ sont exprimables en fonction rationnelle à coefficients réels de t, il en est de même de v_j.

En résumé, u_j et v_j s'expriment en fonction rationnelle de t à coefficients réels.

Donc toute fonction $k(z)$ s'exprime en fonction rationnelle de t à coefficients réels.

5. J'envisage maintenant une fonction $K(z)$ quelconque.

J'appelle $z_1, z_2, \ldots, z_n$ ceux de ses pôles qui sont à l'intérieur du domaine A et dont les ordres sont respectivement $g_1, g_2, \ldots, g_n$.

J'appelle $U_1, U_2, \ldots, U_n$ les valeurs de u_1 en ces points, et $U'_1, U'_2, \ldots, U'_n$ les valeurs conjuguées.

Posons

$$P = (u_1 - U_1)^{g_1}(u_1 - U_2)^{g_2}\ldots(u_1 - U_n)^{g_n},$$
$$P' = (u_1 - U'_1)^{g_1}(u_1 - U'_2)^{g_2}\ldots(u_1 - U'_n)^{g_n}.$$

La fonction $PP'K(z)$ est une nouvelle fonction $K(z)$, car elle est réelle et finie sur la limite L du domaine A, puisque PP' est une fonction entière de u_1 à coefficients *réels*.

Voyons maintenant ses discontinuités.

En premier lieu, elle n'a aucune de celles de $K(z)$. En effet, soit z_j une discontinuité de $K(z)$.

$(z - z_j)^{g_j}K(z)$ a le caractère d'une fonction entière dans le voisinage de $z = z_j$.

D'ailleurs

$$u_1 = U_j + \left(\frac{du_1}{dz}\right)_j (z - z_j) + \left(\frac{d^2u_1}{dz^2}\right)_j (z - z_j)^2 + \ldots.$$

L'expression $\dfrac{u_1 - U_j}{z - z_j}$ est donc finie dans le voisinage du point $z = z_j$. Ainsi la fonction $PP'K(z)$ n'a aucune des discontinuités de $K(z)$. Mais elle a la discontinuité $z = a$.

C'est d'ailleurs la seule.

C'est donc une fonction $k(z)$. Par suite, c'est une fonction rationnelle de t à coefficients réels.

Il suit de là que $K(z)$ est une fonction rationnelle de t à coefficients réels.

Ce raisonnement suppose que parmi les discontinuités de $K(z)$ ne figure pas a. Si a est un pôle de $K(z)$, on le mettra à part; on ne le comprendra pas dans la suite $z_1, z_2, \ldots, z_n$.

Réciproquement, si l'on considère une fonction rationnelle de t, à coefficients réels, si cette fonction reste *finie* sur la limite L du domaine A, c'est une fonction $K(z)$. Mais il peut se faire que la fonction rationnelle de t (à coefficients réels) envisagée soit infinie en certains points isolés de la limite. Nous la désignerons dans la suite par la notation $[K(z)]$.

6. Si dans l'expression

$$t = \frac{v_1 - h + R}{u_1 - g} = \frac{u_1 - g}{h + R - v_1} \qquad (\text{n}^\circ\ 3)$$

on remplace u_1 et v_1 en fonction de z, on obtient une fonction t de z.

Je dis que cette fonction réalise la représentation conforme du domaine A sur le demi-plan nord; t a le caractère d'une fonction entière à l'intérieur du domaine A. Sur la limite L, t est réelle, finie et continue, sauf si l'on a

$$u_1 = g, \qquad v_1 = h + \mathrm{R}.$$

Je dis maintenant que, le point z décrivant le domaine A tout entier, sans répétition, le point t décrira le demi-plan nord, tout entier, sans répétition.

Il faut démontrer :

1° Qu'à tout point z intérieur au domaine A correspond un point t du demi-plan nord, et un seul;

2° Qu'à tout point t du demi-plan nord correspond un point z, et un seul, intérieur au domaine A.

1° Soit z_0 un point intérieur au domaine A.

Je considère la fonction rationnelle $p(z) = \frac{1}{z - z_0}$.

Je forme la fonction $\mathrm{K}(z)$ correspondante.

C'est une fonction rationnelle de t à coefficients réels,

$$\mathrm{K}(z) = \mathrm{R}(t).$$

Soit maintenant $p_1(z) = \frac{i}{z - z_0}$; soit $\mathrm{K}_1(z)$ la fonction K correspondant à $p_1(z)$.

On a

$$\mathrm{K}_1(z) = \mathrm{R}_1(t),$$

$\mathrm{R}_1(t)$ désignant une fonction rationnelle de t à coefficients réels.

A $z = z_0$ correspond la valeur

$$t_0 = t(z_0);$$

mais

$$\frac{\mathrm{K}_1(z)}{\mathrm{K}(z)} = \frac{\mathrm{R}_1(t)}{\mathrm{R}(t)}.$$

En y faisant $z = z_0$, il vient

$$i = \frac{\mathrm{R}_1(t_0)}{\mathrm{R}(t_0)},$$

et puisque $\mathrm{R}(t)$, $\mathrm{R}_1(t)$ sont des fonctions rationnelles à coefficients réels, t_0 est imaginaire.

Je dis de plus que le point t_0 est dans le demi-plan nord.

Tous les points t correspondant aux points z intérieurs au domaine A sont dans le même demi-plan, puisque, d'après ce que nous venons de voir, t ne peut devenir réel tant que le point z reste à l'intérieur du domaine A. Il suffit par con-

séquent de considérer un point z particulier, intérieur au domaine A. Prenons $z = a$.

Pour $z = a$,

$$t = +i.$$

La proposition est donc démontrée.

2° Soit $a_0 + ib_0$ un point du demi-plan nord ($b_0 > 0$).

Je dis qu'il existe un point z_0 du domaine A, et un seul, tel que

$$t(z_0) = a_0 + ib_0.$$

En effet, envisageons la fonction

$$\frac{1}{t - a_0 - ib_0} = \frac{t - a_0}{(t - a_0)^2 + b_0^2} + i\frac{b_0}{(t - a_0)^2 + b_0^2}.$$

$\dfrac{t - a_0}{(t - a_0)^2 + b_0^2}$ et $\dfrac{b_0}{(t - a_0)^2 + b_0^2}$ sont deux fonctions rationnelles de t à coefficients réels qui ne deviennent infinies que pour $t = a_0 + ib_0$ et $t = a_0 - ib_0$.

Remplaçons t en fonction de z. Nous avons alors deux fonctions K, car elles prennent des valeurs réelles et finies sur la limite L du domaine A. Comme ce sont de véritables fonctions de z, et non pas des constantes, chacune d'elles devient infinie, en un point au moins intérieur au domaine A.

Appelons z_0 un tel point.

Pour $z = z_0$, t sera égal soit à $a_0 + ib_0$, soit à $a_0 - ib_0$.

Mais nous avons déjà vu qu'à un point z intérieur au domaine A ne peut correspondre qu'un point t du demi-plan nord. Donc

$$t(z_0) = a_0 + ib_0,$$

puisque l'on suppose $b_0 > 0$.

Maintenant, il est impossible que $t(z)$ prenne la valeur $a_0 + ib_0$ en un autre point que z_0.

Car, soit

$$p(z) = \frac{1}{z - z_0}.$$

Formons la fonction $K(z)$ correspondante. C'est une fonction rationnelle de t à coefficients réels,

$$K(z) = R(t).$$

Elle est déjà infinie pour $z = z_0$, ou $t = t_0 = t(z_0)$.

S'il existait un autre point z_1, intérieur au domaine A, tel que $t(z_1) = a_0 + ib_0$,

la fonction $K(z)$ serait infinie en ce point; or ceci est impossible; $K(z)$ n'admet qu'un pôle, $z = z_0$.

7. Voyons maintenant ce qui se passe sur la limite L.

Nous savons déjà que, si le point z est sur la limite L, $t(z)$ est réelle.

Réciproquement, soit a_0 une valeur réelle.

Je considère la fonction $\frac{1}{t(z) - a_0}$.

Si la fonction $\frac{1}{t(z) - a_0}$ ne devenait pas infinie sur la limite L du domaine A, ce serait une fonction $K(z)$.

D'ailleurs, elle n'est infinie pour aucune valeur de z intérieure à A, puisque, pour de telles valeurs, $t(z)$ est imaginaire.

Ce serait donc une constante : or cette conclusion est inexacte.

Il existe donc une valeur z_0 de z, le point z_0 étant sur la limite L de A, telle que $t(z_0) = a_0$.

Il ne peut y en avoir qu'une : en effet, décrivons dans le demi-plan nord, de a_0 pour centre, un demi-cercle. A chaque point t de ce demi-cercle correspond un point z intérieur à A, et *un seul*. Au demi-cercle correspond donc un domaine inclus dans A. Si le rayon du demi-cercle devient infiniment petit, ce domaine vient se confondre avec un point unique de la limite L, point unique z_0 tel que $t(z_0) = a_0$.

8. On peut, d'après ce qui précède, énoncer le théorème suivant :

Il existe une fonction analytique $t(z)$ qui a le caractère d'une fonction entière pour tous les points intérieurs au domaine A, *et telle que, si le point z décrit le domaine* A *en passant une fois, et une seule, par chacun de ses points, le point t décrit le demi-plan nord en passant une fois, et une seule, par chacun de ses points. Lorsque z décrira la limite du domaine* A, *le point t décrira l'axe réel.*

Ajoutons que la représentation ainsi obtenue du domaine A sur le demi-plan nord conserve les angles.

C'est une représentation conforme.

La solution n'est pas complètement déterminée, car, si la fonction $t(z)$ répond à la question, il en est de même de la fonction

$$\theta(z) = \frac{a\,t(z) + b}{c\,t(z) + d},$$

a, b, c, d étant quatre constantes réelles satisfaisant à l'inégalité $ad - bc > 0$.

Le problème dépend donc de trois constantes arbitraires qu'on peut déterminer en se donnant la correspondance sur le demi-plan nord, soit de trois points de la limite L du domaine A, soit d'un point pris sur la limite L du domaine A et d'un point intérieur au domaine A.

9. Donnons un exemple simple.

Prenons pour domaine A un cercle de rayon 1, ayant pour centre l'origine.

Je considère les fractions rationnelles $\frac{1}{z}$, $\frac{i}{z}$.

Les fonctions $K(z)$ correspondantes sont

$$u_1 = \frac{1}{z} + z,$$

$$v_1 = \frac{i}{z} - iz.$$

On a

$$u_1^2 + v_1^2 = 4, \qquad u_1 + iv_1 = 2z, \qquad u_1 - iv_1 = \frac{2}{z}.$$

Posons

$$u_1 = \frac{4t}{t^2+1}, \qquad v_1 = 2\frac{t^2-1}{t^2+1}.$$

La fonction

$$t = \frac{z+i}{iz+1}$$

représente le cercle de rayon 1 ayant pour centre O sur le demi-plan nord.

Les fonctions

$$u_m = z_m + \frac{1}{z^m},$$

$$v_m = \frac{i}{z^m} - iz^m$$

sont les fonctions $K(z)$ relatives à $\frac{1}{z^m}$ et à $\frac{i}{z^m}$.

On a

$$u_m + iv_m = 2z^m = \frac{(u_1 + iv_1)^m}{2^{m-1}},$$

$$u_m - iv_m = \frac{2}{z^m} = \frac{(u_1 - iv_1)^m}{2^{m-1}}.$$

Soit

$$p(z) = \frac{C_1}{z} + \frac{C_2}{z^2} + \ldots + \frac{C_m}{z^m}.$$

Désignons par C'_k la quantité imaginaire conjuguée de C_k.

La fonction $K(z)$ correspondant à $p(z)$ sera

$$K(z) = \sum_{k=1}^{k=m} \left(\frac{C_k}{z^k} + C'_k z^k \right).$$

Soit, d'une façon générale,

$$\begin{aligned} p(z) = & \frac{A_1}{z-a} + \frac{A_2}{(z-a)^2} + \ldots + \frac{A_\alpha}{(z-a)^\alpha} \\ & + \frac{B_1}{z-b} + \frac{B_2}{(z-b)^2} + \ldots + \frac{B_\beta}{(z-b)^\beta} \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + \frac{L_1}{z-l} + \frac{L_2}{(z-l)^2} + \ldots + \frac{L_\lambda}{(z-l)^\lambda}; \end{aligned}$$

les points $a, b, \ldots, l$ étant tous à l'intérieur du cercle A.

Remarquons que, si a est à l'intérieur du cercle A, le point imaginaire conjugué a' est aussi à l'intérieur du cercle A, et $\frac{1}{a'}$ est à l'extérieur du même cercle.

De cette remarque et de ce fait que sur la circonférence L de rayon 1, limite du domaine A, l'imaginaire conjuguée de $z = e^{i\varphi}$ est $\frac{1}{z}$, on conclut que, si $\bar{p}(z)$ désigne ce que devient $p(z)$ quand on y remplace chaque coefficient par son imaginaire conjuguée, la fonction $K(z)$ correspondant à $p(z)$ sera

$$K(z) = p(z) + \bar{p}\left(\frac{1}{z}\right).$$

10. Revenons au cas général.

Supposons que, par un moyen quelconque, on ait trouvé la fonction $K(z)$ qui correspond à une fonction rationnelle donnée $p(z)$.

On a

$$K(z) = p(z) - f(z),$$

$f(z)$ ayant à l'intérieur du domaine A le caractère d'une fonction entière.

On en conclut

$$K_1(x, y) + i K_2(x, y) = p_1(x, y) + i p_2(x, y) - f_1(x, y) - i f_2(x, y),$$

et, par suite, sur la limite du domaine A, puisque $K_2(x, y) = 0$, on a toujours

$$f_2(x, y) = p_2(x, y).$$

Le problème de Dirichlet est donc résolu pour la limite L du domaine A et la fonction $p_2(x, y)$.

Ainsi, prenons l'exemple précédent.

On a

$$p_2(x, y) = \frac{1}{2i}[p(z) - \bar{p}(z')].$$

D'ailleurs

$$f(z) = -\bar{p}\left(\frac{1}{z}\right),$$

$$\bar{f}(z') = -p\left(\frac{1}{z'}\right).$$

Donc ici

$$f_2(x, y) = \frac{1}{2i}\left[p\left(\frac{1}{z'}\right) - \bar{p}\left(\frac{1}{z}\right)\right],$$

z' étant la quantité imaginaire conjuguée de z.

On voit directement : 1° que les points (x, y), où $f_2(x, y)$ devient infinie, sont tous extérieurs au cercle A ; 2° que $f_2(x, y)$ prend sur la circonférence L, limite de A, les mêmes valeurs que $p_2(x, y)$, puisque, dans ce cas, $z = \frac{1}{z'}$.

De même, si l'on considère la fonction

$$p_1(x, y) = \frac{1}{2}[p(z) + \bar{p}(z')],$$

la fonction $\frac{1}{2}\left[p\left(\frac{1}{z'}\right) + \bar{p}\left(\frac{1}{z}\right)\right]$, finie et continue à l'intérieur du cercle A, prend sur la limite L les mêmes valeurs que $p_1(x, y)$.

II. Problème de la représentation conforme pour le cas de deux aires a connexion multiple. — Définition des fonctions F(z), H(z), K(z).

11. J'aborde maintenant le problème suivant :

On se donne deux domaines A *et* A_1, *de même connexion.*

Chercher à quelles conditions ils peuvent se représenter l'un sur l'autre, et, dans le cas où le problème est possible, trouver la fonction qui réalise cette représentation.

Nous avons vu que le problème est toujours possible pour deux domaines de connexion 1, qu'il est même indéterminé. On le détermine en se donnant dans A_1 les correspondants soit de trois points de la limite L du domaine A, soit d'un point de la limite L du domaine A et d'un point intérieur au domaine A.

Quant à la fonction qui réalise la représentation, on la trouve en représentant successivement les deux domaines sur le demi-plan nord, et en éliminant la variable t relative à ce demi-plan.

Je suppose démontrée la proposition suivante :

Je considère un domaine A limité extérieurement par une courbe L_0, intérieurement par p courbes $L_1, L_2, \ldots, L_p$, toutes extérieures les unes aux autres.

Il existe une fonction u, à coefficients réels, et une seule, des variables x et y, finie, continue et uniforme à l'intérieur du domaine A, ainsi que ses dérivées partielles des deux premiers ordres, telle que l'on ait

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

qui enfin, sur chacune des courbes limites, prennent des valeurs données à l'avance, ces valeurs formant sur chaque courbe en particulier une suite finie, continue et uniforme.

Si, comme dans le cas de la connexion simple, $p(z)$ est une fonction rationnelle quelconque de z, assujettie simplement à rester finie sur la limite de A, soit toujours

$$p(z) = p_1(x, y) + i p_2(x, y).$$

Supposons formée la fonction $\psi(x, y)$, qui prend sur la limite de A les valeurs de $p_2(x, y)$ et qui satisfait aux conditions que je viens de rappeler.

Ici, la valeur de l'intégrale

$$\int_{(a,b)}^{(x,y)} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} dx - \frac{\partial \psi}{\partial x} dy \right)$$

dépendra du chemin parcouru par le point (x, y) à l'intérieur du domaine A. Car on peut concevoir un contour fermé, tout entier à l'intérieur du domaine A, et contenant à son intérieur une ou plusieurs des courbes $L_1, L_2, \ldots, L_p$, à l'intérieur duquel, par conséquent, $\psi(x, y)$, ou ses dérivées, pourront ne plus être finies, continues et uniformes, ou bien à l'intérieur duquel $\psi(x, y)$ pourra ne plus satisfaire à l'équation

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0.$$

Nous n'avons donc plus d'intérêt à prendre pour $p(z)$ une fonction uniforme. Nous poserons

$$p(z) = R(z) + iC_1 \mathcal{L} R_1(z) + iC_2 \mathcal{L} R_2(z) + \ldots + iC_m \mathcal{L} R_m(z).$$

Dans le second membre, les R désignent des fonctions rationnelles, les C des constantes réelles.

Cette fonction $p(z)$ n'est pas uniforme.

Car, soit

$$R_j(z) = \rho_j e^{i\varphi_j},$$

$$\mathcal{L} R_j(z) = \mathcal{L} \rho_j + i(\varphi_j + 2h\pi).$$

Si le point z décrit, dans le sens direct, un contour contenant p_j zéros et q_j infinis de $R_j(z)$, φ_j augmente de $2(p_j - q_j)\pi$.

La fonction $p(z)$ augmentera donc d'une constante réelle

$$\omega = -\sum_{j=1}^{j=m} 2C_j(p_j - q_j)\pi.$$

Nous assujettirons cette fonction $p(z)$ à la seule condition de ne devenir infinie sur aucune des lignes L_0, L_1, L_2, ..., L_p.

Alors, si nous posons

$$p(z) = p_1(x, y) + i p_2(x, y),$$

la fonction $p_2(x,y)$, *qui est uniforme* [puisque les périodes de $p(z)$ sont réelles], est finie et continue sur chacune des lignes L.

Nous pouvons donc prendre pour valeurs données d'avance le long des lignes L les valeurs de cette fonction.

Au lieu de cela, et pour plus de généralité, prenons

Le long de L_0	$p_2(x, y) + \omega_0$,
Le long de L_1	$p_2(x, y) + \omega_1$,
....	............,
Le long de L_p	$p_2(x, y) + \omega_p$,

les constantes ω_0, ω_1, ω_2, ..., ω_p étant réelles.

A ce système de valeurs correspond une fonction u, et une seule, satisfaisant aux conditions déjà énoncées.

Appelons-la $\psi(x, y)$.

Si, maintenant, nous cherchons à joindre à cette fonction une autre fonction $\varphi(x, y)$, de manière que $\varphi + i\psi$ soit une fonction de $x + iy$, nous avons comme précédemment à considérer l'intégrale

$$\int_{(a,b)}^{(x,y)} \left(\frac{\partial\psi}{\partial y} dx - \frac{\partial\psi}{\partial x} dy\right),$$

prise le long d'un chemin reliant un point fixe (a, b), intérieur au domaine A, à

un point mobile (x, y), intérieur lui aussi au domaine A, le chemin devant être lui-même tout entier à l'intérieur du domaine A.

La valeur de cette intégrale n'est plus, ici, indépendante du chemin, car l'intégrale prise le long d'un chemin fermé intérieur à A n'est plus égale à zéro, à moins que ce chemin ne renferme aucune des lignes $L_1, L_2, \ldots, L_p$, auquel cas le raisonnement déjà fait subsisterait.

Il est facile de donner la formule générale qui comprend toutes les valeurs possibles de l'intégrale.

Désignons par $2\omega'_\nu$ la valeur de l'intégrale prise le long d'une ligne fermée simple entourant seulement L_ν, tout entière à l'intérieur du domaine A, et parcourue une seule fois dans le sens direct.

$2\omega'_\nu$ est un nombre *réel,* indépendant du choix de la ligne fermée.

Dès lors, toutes les valeurs de l'intégrale sont comprises dans la formule

$$I + 2m_1\omega'_1 + 2m_2\omega'_2 + \ldots + 2m_p\omega'_p,$$

I étant l'une quelconque de ses valeurs, et les m étant des nombres entiers positifs, négatifs ou nuls.

Appelons $\varphi(x, y)$ cette fonction réelle et multiforme; $\varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ est une fonction de $z = x + iy$.

Soit $f(z)$ cette fonction.

$f(z)$ est une fonction multiforme, mais sa dérivée est uniforme.

De plus, cette dérivée est finie et continue à l'intérieur du domaine A. Il suit de là que, dans le voisinage d'un point quelconque intérieur au domaine A, $f(z)$ est développable suivant la série de Taylor : les développements correspondant aux différentes déterminations ne différeront que par le premier terme.

Formons enfin la différence

$$p(z) - f(z) = F(z).$$

La fonction $F(z)$ ainsi obtenue n'est pas uniforme.

Mais sa dérivée est uniforme.

Ses périodes, toutes réelles, se divisent en deux catégories, celles qui proviennent de $p(z)$, à cause des logarithmes, puis celles qui proviennent de $f(z)$.

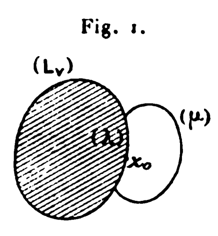
A l'intérieur du domaine A, $F(z)$ se comporte comme une fonction logarithmico-rationnelle.

Enfin, sur la limite du domaine A, la fonction $F(z)$ a une partie imaginaire constante le long de chaque ligne L.

12. Il nous reste à examiner de quelle manière $F(z)$ peut se représenter dans le voisinage d'un point z_0 de la limite de A.

Soit λ une portion de la limite L_ν, sur laquelle est situé le point z_0 (*fig.* 1).

Fig. 1.



Joignons les extrémités de cet arc par une ligne (μ) tout entière à l'intérieur du domaine A.

Nous formons ainsi un domaine simplement connexe, α.

Nous savons représenter ce domaine α sur le demi-plan nord, au moyen de la fonction $t = t(z)$, $t(z)$ ayant à l'intérieur du domaine α le caractère d'une fonction entière, et ne devenant infinie qu'en un point de la limite. De plus, nous pouvons faire en sorte qu'au point z_0 corresponde l'origine dans le demi-plan nord.

Sur la ligne L_ν, $F(z)$ prend une valeur dont la partie imaginaire est constante et égale à $-i\omega_\nu$.

Donc $F(z) + i\omega_\nu$ prend sur L_ν des valeurs *réelles*.

Elle donnera par la transformation $t = t(z)$ une fonction $F_1(t)$ qui sera réelle pour les valeurs réelles de t situées à une distance de l'origine inférieure à une certaine limite, à savoir pour les valeurs réelles de t correspondant aux points z de la ligne λ.

Par hypothèse, $F(z) + i\omega_\nu$ ne devient infini en aucun point de la limite du domaine A. Donc, à l'intérieur du domaine α, dans le voisinage immédiat de z_0, la fonction $F(z) + i\omega_\nu$ a le caractère d'une fonction entière.

Donc $F_1(t)$ aura le caractère d'une fonction entière sur le demi-plan nord, dans le voisinage de l'origine.

Soit t' la valeur imaginaire conjuguée de t.

Nous conviendrons de prendre pour $F_1(t')$ la valeur imaginaire conjuguée de $F_1(t)$, t étant un point du demi-plan nord.

J'obtiens ainsi, dans le demi-plan sud, au voisinage de l'origine, la continuation analytique de la fonction $F_1(t)$.

La fonction $F_1(t)$ ainsi définie pourra être développée suivant les puissances entières et positives de t dans le voisinage de l'origine.

D'ailleurs, pour des valeurs réelles de t suffisamment petites, la fonction $F_1(t)$ a des valeurs réelles.

Donc les coefficients du développement seront réels.

Il résulte de là que, dans le voisinage de z_0, $F(z)$ pourra se représenter par le

développement

$$F(z) = -i\omega_\nu + f_0 - f_1 t + f_2 t^2 + \ldots,$$

$f_0, f_1, f_2, \ldots$ étant des constantes réelles.

13. A une fonction $p(z)$ et à un système déterminé de constantes, ω_0, ω_1, ω_2, ..., ω_p correspond une fonction $F(z)$ bien déterminée, à une constante réelle près.

Réciproquement, à une fonction $F(z)$ donnée, outre un système bien déterminé de constantes ω_0, ω_1, ω_2, ..., ω_p, il correspond à cette fonction $F(z)$, d'une manière univoque, la partie de $p(z)$ correspondant aux pôles et aux points critiques logarithmiques de $F(z)$ intérieurs au domaine A.

Cette classe de fonctions $F(z)$ est très générale.

Elle comprend en particulier les fonctions que nous aurions obtenues en prenant pour $p(z)$ une fonction purement rationnelle, et en supposant nulles les constantes ω_0, ω_1, ω_2, ..., ω_p.

Ces fonctions, quoique non uniformes, seront utiles à considérer. Appelons-les *fonctions* $H(z)$.

Elles ont p périodes réelles, car, ici, $p(z)$ ne donne plus de périodes logarithmiques.

Si la fonction rationnelle $p(z)$ n'avait pas de pôles à l'intérieur du domaine A, la fonction $H(z)$ correspondante serait une constante *réelle* (plus des multiples de périodes).

14. On conçoit que, pour des fonctions $H(z)$ particulières, le nombre des périodes soit moindre que p.

En effet, considérons un certain nombre de fonctions H; H_1, H_2, ..., H_r.

La combinaison

$$\gamma_1 H_1 + \gamma_2 H_2 + \ldots + \gamma_r H_r,$$

où les γ sont des constantes réelles, est encore une fonction H.

Soient $2\omega_{\nu,1}$, $2\omega_{\nu,2}$, ..., $2\omega_{\nu,r}$ les périodes de H_1, H_2, ..., H_r le long de la ligne L_ν.

La période de la nouvelle fonction H le long de la même ligne sera

$$2\gamma_1\omega_{\nu,1} + 2\gamma_2\omega_{\nu,2} + \ldots + 2\gamma_r\omega_{\nu,r}.$$

Par un choix convenable des constantes γ, on pourra faire en sorte que cette période soit nulle.

Supposons que, ayant pris un nombre assez grand de fonctions H, on ait

choisi les constantes γ de manière à annuler toutes les périodes. Nous avons, dès lors, une fonction $H(z)$ uniforme. Nous l'appellerons $K(z)$.

Ainsi les fonctions $K(z)$ sont des fonctions uniformes, ayant, à l'intérieur du domaine A, le caractère d'une fonction rationnelle et prenant sur la limite de ce domaine des valeurs réelles finies. Seulement, on ne peut plus dire, ici (comme dans le cas de la connexion simple), qu'à toute fonction rationnelle $p(z)$ correspond une fonction $K(z)$: ce n'est vrai que pour des fonctions $p(z)$ particulières.

Enfin, une fonction rationnelle, *à coefficients réels,* de plusieurs fonctions $K(z)$, qui ne devient pas infinie sur la limite du domaine A, est une nouvelle fonction $K(z)$.

Un raisonnement analogue nous permet de dire que l'on pourra former une fonction $H(z)$ ayant pour périodes réelles p nombres réels donnés à l'avance.

15. Parmi les fonctions $F(z)$, il en est de remarquables que nous allons maintenant définir :

Je suppose que la fonction $p(z)$, qui correspond à l'une de ces fonctions $F(z)$, ait le caractère d'une fonction entière à l'intérieur et sur la limite du domaine A.

Si les quantités $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_p$ étaient toutes nulles, $F(z)$ se réduirait à une simple constante réelle.

Mais, s'il n'en est pas ainsi, $F(z)$ est une véritable fonction qui, à l'intérieur du domaine A, a le caractère d'une fonction entière.

Cette fonction est déterminée par la seule connaissance des constantes $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_p$.

Il y a une infinité de telles fonctions, puisqu'il y a une infinité de systèmes de valeurs de $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_p$.

Mais elles peuvent toutes s'exprimer très simplement au moyen de quelques-unes d'entre elles.

Choisissons les systèmes de valeurs de $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_p$ qui suivent :

$\omega_0 = 0$, $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = 0$, ..., $\omega_p = 0$; soit J_1 la fonction correspondante;
$\omega_0 = 0$, $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 1$, ..., $\omega_p = 0$; soit J_2 la fonction correspondante;
......, ..., ..., ..., ...; ....;
$\omega_0 = 0$, $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 0$, ..., $\omega_p = 1$; soit J_p la fonction correspondante.

Considérons la fonction générale $J(z)$ se comportant à l'intérieur du domaine A comme une fonction entière, et correspondant aux valeurs $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_p$.

Soit d'abord $\omega_0 = 0$.

Alors

$$J = \omega_1 J_1 + \omega_2 J_2 + \ldots + \omega_p J_p.$$

Supposons, au contraire, que ω_0 soit différent de zéro, tandis que l'on a

$$\omega_1 = \omega_2 = \ldots = \omega_p = 0.$$

Alors

$$J = i\omega_0 - \omega_0 J_1 - \omega_0 J_2 - \ldots - \omega_0 J_p.$$

Donc, dans le cas général,

$$J = i\omega_0 + (\omega_1 - \omega_0) J_1 + (\omega_2 - \omega_0) J_2 + \ldots + (\omega_p - \omega_0) J_p.$$

III. — Les fonctions M(z) et N(z). Leur expression au moyen de fonctions types de même espèce.

16. Nous nous proposons maintenant de chercher l'expression générale des fonctions $F(z)$, $H(z)$, $K(z)$ au moyen de fonctions types.

A l'égard des fonctions $K(z)$, nous démontrerons que, comme dans le cas de la connexion simple, elles s'expriment toutes en fonction rationnelle à coefficients réels de deux d'entre elles, ces deux fonctions particulières étant, du reste, liées par une relation algébrique.

Un tel mode de représentation n'est évidemment plus applicable aux fonctions $F(z)$, qui sont multiformes.

A l'égard de ces dernières, nous montrerons qu'elles sont des intégrales abéliennes relatives à cette équation algébrique; de sorte que, dans les fonctions déjà citées, on voit apparaître les divers genres d'intégrales abéliennes :

1° Les fonctions $J(z)$ ont, dans tout le domaine A, le caractère de fonctions entières;

2° Les fonctions $H(z)$ se comportent dans le domaine A comme des fonctions rationnelles;

3° Les fonctions $F(z)$ ont le caractère de fonctions à la fois logarithmiques et rationnelles.

17. Soit a un point particulier, pris dans le domaine A.

Je réserverai la lettre h aux fonctions $H(z)$ qui n'ont pas d'autres pôles que le point a.

Elles correspondent à des fonctions $p(z)$ de la forme

$$\frac{C_1}{z-a} + \frac{C_2}{(z-a)^2} + \ldots + \frac{C_m}{(z-a)^m},$$

où l'on a

$$C_1 = A_1 + B_1 i, \quad C_2 = A_2 + B_2 i, \quad \ldots, \quad C_m = A_m + B_m i.$$

Soient $h(z)$ la fonction correspondant à $\frac{1}{2}p(z)$, $h'(z)$ la fonction correspondant à $-\frac{i}{2}p(z)$; $h+ih'$ se comportera comme $p(z)$ à l'intérieur du domaine A, tandis que $h-ih'$ aura, à l'intérieur du domaine A, le caractère d'une fonction entière.

Nous poserons

$$h(z)+ih'(z)=\mathrm{M}(z),$$
$$h(z)-ih'(z)=\mathrm{M}'(z).$$

A chaque fonction $p(z)$, de pôle a, correspondra ainsi une fonction $\mathrm{M}(z)$, bien déterminée, à une constante près, réelle ou imaginaire.

La fonction générale $\mathrm{M}(z)$ peut s'exprimer au moyen de fonctions $\mathrm{M}(z)$ élémentaires.

J'appelle $\mathrm{M}_\mu(z)$ celle qui correspond à $\frac{1}{(z-a)^\mu}$. Si $\mathrm{M}(z)$ correspond à la fonction

$$\frac{\mathrm{C}_1}{z-a}+\frac{\mathrm{C}_2}{(z-a)^2}+\ldots+\frac{\mathrm{C}_m}{(z-a)^m},$$

je dis que l'on a

$$\mathrm{M}(z)=\mathrm{C}_1\mathrm{M}_1(z)+\mathrm{C}_2\mathrm{M}_2(z)+\ldots+\mathrm{C}_m\mathrm{M}_m(z).$$

En effet,

$$\mathrm{M}_\mu(z)=h_\mu(z)+ih'_\mu(z),$$

$h_\mu(z)$ correspond à $\frac{1}{2}\frac{1}{(z-a)^\mu}$,

$h'_\mu(z)$ » $-\frac{i}{2}\frac{1}{(z-a)^\mu}$.

D'ailleurs,

$$p(z)=\frac{\mathrm{A}_1+i\mathrm{B}_1}{z-a}+\frac{\mathrm{A}_2+i\mathrm{B}_2}{(z-a)^2}+\ldots+\frac{\mathrm{A}_m+i\mathrm{B}_m}{(z-a)^m},$$
$$-ip(z)=\frac{\mathrm{B}_1-i\mathrm{A}_1}{z-a}+\frac{\mathrm{B}_2-i\mathrm{A}_2}{(z-a)^2}+\ldots+\frac{\mathrm{B}_m-i\mathrm{A}_m}{(z-a)^m}.$$

Je dis que

$$h(z)=\mathrm{A}_1h_1+\mathrm{A}_2h_2+\ldots+\mathrm{A}_mh_m-\mathrm{B}_1h'_1-\mathrm{B}_2h'_2-\ldots-\mathrm{B}_mh'_m,$$
$$h'(z)=\mathrm{B}_1h_1+\mathrm{B}_2h_2+\ldots+\mathrm{B}_mh_m+\mathrm{A}_1h'_1+\mathrm{A}_2h'_2+\ldots+\mathrm{A}_mh'_m.$$

En effet : 1° les expressions ainsi obtenues ont des valeurs réelles et finies sur la limite de A; 2° la première correspond à $\frac{1}{2}p(z)$ et la seconde à $-\frac{i}{2}p(z)$. J'en

déduis :

$$\begin{aligned} h(z) + i h'(z) = & \quad (A_1 + i B_1) h_1 + (A_2 + i B_2) h_2 + \ldots + (A_m + i B_m) h_m \\ & + i[(A_1 + i B_1) h'_1 + (A_2 + i B_2) h'_2 + \ldots + (A_m + i B_m) h'_m], \end{aligned}$$

ou

$$M(z) = h(z) + i h'(z) = C_1 M_1(z) + C_2 M_2(z) + \ldots + C_m M_m(z).$$

La proposition est donc démontrée.

18. En général, les fonctions $M(z)$ ainsi obtenues sont multiformes. Elles ont p périodes comme les fonctions $H(z)$.

Ces périodes sont imaginaires.

Il peut arriver cependant, pour des fonctions $p(z)$ spéciales, qu'elles soient uniformes.

En général, cela aura lieu pour une fonction $p(z)$ dont le pôle unique a sera d'ordre m, pourvu qu'on puisse choisir convenablement les constantes C_1, $C_2, \ldots, C_m$ de manière que la fonction

$$M(z) = C_1 M_1(z) + C_2 M_2(z) + \ldots + C_m M_m(z)$$

ait ses p périodes nulles, la constante C_m étant différente de zéro.

Mais, pour certaines valeurs de m, c'est impossible.

J'appelle ρ le nombre de ces valeurs de m.

Ce nombre ρ est appelé à jouer, dans la suite, un rôle important.

J'appelle $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ la suite indéfinie des valeurs de m, rangées par ordre de grandeur croissante, pour lesquelles il existe des fonctions $M(z)$ uniformes; $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_\rho$ la suite limitée des valeurs de m, rangées par ordre de grandeur croissante, pour lesquelles il n'en existe pas.

Je désignerai par la lettre N les fonctions $M(z)$ uniformes.

Il est à remarquer que les fonctions $h(z)$ et $h'(z)$ telles que $N(z) = h(z) + i h'(z)$ sont elles-mêmes uniformes. Autrement, chacune d'elles aurait des périodes *réelles*, de sorte que les périodes de $N(z)$ ne seraient pas toutes nulles.

Ainsi ces fonctions $h(z)$, $h'(z)$ sont des fonctions $K(z)$. Comme les fonctions $p(z)$ correspondantes n'ont que le pôle a, nous désignerons ces fonctions h par la lettre k, et nous poserons

$$N(z) = k(z) + i k'(z).$$

Toutes les fonctions $M(z)$ ou $N(z)$ s'expriment, comme nous l'avons vu, au moyen des fonctions $M_1(z)$, $M_2(z)$, ...

C'est une fonction linéaire et homogène de $M_1(z)$, $M_2(z)$, ...

Mais on peut imaginer un autre mode d'expression où ne figureront que les fonctions $M_{\varkappa_1}(z)$, $M_{\varkappa_2}$, ..., $M_{\varkappa_\rho}(z)$, et des fonctions $N(z)$.

En effet, si μ est l'un des nombres $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, il est possible de déterminer les constantes c de manière que $M_\mu + c_1 M_{\mu-1} + \ldots + c_{\mu-1} M_1$ soit une fonction uniforme N_μ.

S'il y a plusieurs solutions, nous prendrons arbitrairement l'une d'elles.

Dès lors, toutes les fonctions $M_\mu(z)$ qui ne figurent pas dans la série $M_{\varkappa_1}(z)$, $M_{\varkappa_2}(z)$, ..., $M_{\varkappa_\rho}(z)$ se trouvent remplacées par des fonctions N_μ, et l'expression générale de $M(z)$ est la suivante :

$$M(z) = C_1 M_{\varkappa_1}(z) + C_2 M_{\varkappa_2}(z) + \ldots + C_\rho M_{\varkappa_\rho}(z) + AN_\alpha + BN_\beta + \ldots + LN_\lambda.$$

Dans le cas où la fonction $M(z)$ serait uniforme, la première partie disparaîtra. On aura

$$N(z) = AN_\alpha + BN_\beta + \ldots + LN_\lambda.$$

19. J'ai besoin, avant de continuer, d'établir le théorème suivant :

Le produit de deux ou plusieurs fonctions $M(z)$ *est encore une fonction* $M(z)$.

En effet, soit

$$M(z) = h(z) + i h'(z),$$
$$M'(z) = h(z) - i h'(z),$$

puis

$$M_0(z) = h_0(z) + i h'_0(z)$$

et

$$M'_0(z) = h_0(z) - i h'_0(z);$$

$h(z)$	correspond à	$\frac{1}{2} p(z)$,
$h'(z)$	»	$-\frac{i}{2} p(z)$,
$h_0(z)$	»	$\frac{1}{2} p_0(z)$,
$h'_0(z)$	»	$-\frac{i}{2} p_0(z)$;

$$M(z) M_0(z) = hh_0 - h'h'_0 + i(hh'_0 + h_0 h'),$$
$$M'(z) M'_0(z) = hh_0 - h'h'_0 - i(hh'_0 + h_0 h');$$

$hh_0 - h'h'_0$	correspond à	$\frac{1}{2} p(z) p_0(z)$,
$hh'_0 + h_0 h'$	»	$-\frac{i}{2} p(z) p_0(z)$.

On a donc bien une fonction M en faisant le produit de deux fonctions M.

Le théorème s'étend sans peine au produit d'un nombre quelconque de fonctions M.

Il est clair aussi que le produit de deux ou plusieurs fonctions N étant uniforme, comme chaque facteur, donnera encore une fonction N.

20. Je vais maintenant démontrer que toutes les fonctions N sont exprimables en fonction de α d'entre elles convenablement choisies.

Considérons la suite $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$.

Je pose d'abord

$$N_\alpha(z) = u.$$

Puis je fais correspondre, à chaque terme de la suite

$$\alpha, \quad \beta, \quad \gamma, \quad \ldots,$$

le reste de sa division par α.

J'obtiens ainsi les α premiers nombres entiers et zéro.

Je considère l'un de ces nombres entiers, autre que zéro.

Il ne fera pas partie de la suite, puisque α est le plus petit nombre de la suite.

J'ajoute au nombre considéré, α, autant de fois qu'il est nécessaire, pour que le nouveau nombre obtenu fasse partie de la suite.

J'ai ainsi $\alpha - 1$ nombres de la suite.

Je désigne les fonctions élémentaires N correspondantes par $u_1, u_2, \ldots, u_{\alpha-1}$.

Alors $u, u_1, u_2, \ldots, u_{\alpha-1}$ sont les α fonctions N au moyen desquelles on va exprimer toutes les autres.

En effet, considérons une fonction N_μ.

On peut trouver un entier n tel que l'on ait

$$\mu = n\alpha + \mu',$$

$N_{\mu'}$ étant l'une des fonctions $u, u_1, u_2, \ldots, u_{\alpha-1}$; $u^n N_{\mu'}$ est un produit de fonctions N.

C'est donc une fonction N, et elle est relative au nombre μ. On a donc

$$u^n N_{\mu'} = N_\mu + \ldots + BN_\beta + AN_\alpha.$$

Ceci nous permettra de remplacer N_μ en fonction linéaire de $u^n N_{\mu'}$ et de fonctions N_λ, avec $\lambda < \mu$.

On conçoit qu'on pourra, finalement, exprimer toute fonction linéaire N_μ par une fonction linéaire de fonctions telles que

$$u^\nu u_\theta \quad \text{avec} \quad \theta = 0, 1, 2, \ldots, \alpha - 1, \quad u_0 = u.$$

Envisageons maintenant une fonction $N(z)$ quelconque. Nous avons vu qu'elle est de la forme

$$N(z) = A N_\alpha(z) + B N_\beta(z) + \ldots + L N_\lambda(z).$$

L'expression générale de $N(z)$ sera donc

$$N(z) = G_0(u) + u_1 G_1(u) + \ldots + u_{\alpha-1} G_{\alpha-1}(u),$$

les fonctions G étant des polynomes entiers en u.

21. Mais, maintenant, chaque fonction u_h peut s'exprimer rationnellement au moyen de u, et d'une autre fonction élémentaire N, soit

$$N_{\alpha'}(z) = v.$$

En effet, v, v^2, ..., $v^{\alpha-1}$ sont des fonctions N. Elles sont donc exprimables comme il suit

$$(1) \qquad v^\theta = G_{0\theta}(u) + u_1 G_{1\theta}(u) + \ldots + u_{\alpha-1} G_{\alpha-1,\theta}(u) \qquad (\theta = 1, 2, \ldots, \alpha - 1).$$

Supposons qu'on puisse résoudre les équations (1). Alors on aura

$$u_j = R_{0j}(u) + v R_{1j}(u) + v^2 R_{2j}(u) + \ldots + v^{\alpha-1} R_{\alpha-1,j}(u) \qquad (j = 1, 2, \ldots, \alpha - 1),$$

les R étant des fonctions rationnelles de u.

Donc

$$N(z) = R_0(u) + v R_1(u) + v^2 R_2(u) + \ldots + v^m R_m(u),$$

les fonctions R étant des fonctions rationnelles de u.

D'ailleurs v^α est aussi une fonction $N(z)$.

Il existe donc entre u et v une relation algébrique, $G(u, v) = 0$, *qui est de degré α par rapport à v.*

La base de ce raisonnement est que l'on peut résoudre le système d'équations (1), par rapport à u_1, u_2, ..., $u_{\alpha-1}$. Je dis que, sous la condition α' premier avec α (et alors il sera indiqué de prendre, dans la suite α, β, γ, ..., pour α' le plus petit nombre premier avec α), cette résolution est possible.

Car, s'il n'en était pas ainsi, les $\alpha - 1$ équations considérées ne seraient pas distinctes.

Il y aurait donc entre v, v^2, ..., $v^{\alpha-1}$ une relation linéaire dont les coefficients seraient des fonctions rationnelles de u.

u et v seraient donc liés par une équation algébrique, $G(u, v) = 0$, dont le degré en v serait au plus $\alpha - 1$.

Ceci n'est pas possible. En effet :

Dans le voisinage de $z = a$, u et v se mettent sous la forme

$$u = \frac{P(z-a)}{(z-a)^{\alpha}}, \qquad v = \frac{Q(z-a)}{(z-a)^{\alpha'}},$$

$P(z-a)$ et $Q(z-a)$ représentant des séries ordonnées suivant les puissances entières et positives de $(z-a)$, avec les conditions $P = Q = 1$, pour $z = a$, puisque $u = N_{\alpha}(z)$ correspond à $\frac{1}{(z-a)^{\alpha}}$ et $v = N_{\alpha'}(z)$ à $\frac{1}{(z-a)^{\alpha'}}$.

On déduit de là

$$\frac{v^{\alpha}}{u^{\alpha'}} = \frac{Q^{\alpha}(z-a)}{P^{\alpha'}(z-a)} = \frac{Q_1(z-a)}{P_1(z-a)},$$

$P_1(z-a)$ et $Q_1(z-a)$ étant des séries ordonnées suivant les puissances entières et positives de $z-a$, avec les conditions $P_1 = Q_1 = 1$ pour $z = a$.

Donc

$$\frac{Q_1(z-a)}{P_1(z-a)} = \mathfrak{P}(z-a),$$

$\mathfrak{P}(z-a)$ étant une série ordonnée suivant les puissances entières et positives de $z-a$, avec $\mathfrak{P} = 1$ pour $z = a$.

On a donc

$$v^{\alpha} = u^{\alpha'} \mathfrak{P}(z-a);$$

et, puisque α' est premier avec α, α est la plus petite valeur telle qu'il en soit ainsi.

Mais alors, lorsque u devient infini, il y a α valeurs de v qui deviennent infinies.

Donc, le degré de la relation $G(u, v) = 0$ est au moins α par rapport à v.

22. Considérons maintenant les fonctions $K(z)$.

Soient $z_1, z_2, \ldots, z_m$ les pôles d'une telle fonction, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ leurs ordres respectifs.

Supposons-les tous différents de a.

Soient $U_1, U_2, \ldots, U_m$ les valeurs de u en ces différents points.

La fonction $K(z)(u-U_1)^{\alpha_1}(u-U_2)^{\alpha_2}\ldots(u-U_m)^{\alpha_m}$ n'a plus, à l'intérieur du domaine A, que le pôle $z = a$.

Posons

$$P = (u-U_1)^{\alpha_1}(u-U_2)^{\alpha_2}\ldots(u-U_m)^{\alpha_m},$$

P est une fonction entière de u, à coefficients imaginaires.

Soit

$$u = k + ik',$$

k et k' étant les fonctions K correspondant à $\frac{1}{2}\frac{1}{(z-a)^2}$ et à $-\frac{i}{2}\frac{1}{(z-a)^2}$.

$P(u)$ pourra se mettre sous la forme

$$P(u) = P_1(k, k') + i P_2(k, k'),$$

P_1 et P_2 étant des fonctions entières, à coefficients réels de k et de k'.

Elles sont donc réelles et finies sur la limite du domaine A, et, à l'intérieur du domaine A, elles n'admettent que le pôle a.

Ce sont donc des fonctions $k(z)$, et l'on peut poser

$$K(z)P(u) = K(z)[k_1(z) + i k_2(z)],$$

puisque

$$P(u) = P_1(k, k') + i P_2(k, k'),$$

où P_1 et P_2 sont des fonctions entières à coefficients réels de k et de k'; comme $u' = k - ik'$, par définition, si nous désignons par U'_j la valeur imaginaire conjuguée de U_j, on a

$$K(z)(u' - U'_1)^{\alpha_1}(u' - U'_2)^{\alpha_2}\ldots(u' - U'_m)^{\alpha_m} = K(z)[k_1(z) - i k_2(z)].$$

Cette nouvelle fonction admet de nouveau les pôles $z_1, z_2, \ldots, z_m$.

Pour les faire disparaître, appelons $V'_1, V'_2, \ldots, V'_m$ les valeurs de u' en ces points. Le produit

$$K(z)[(u' - U'_1)^{\alpha_1}(u' - U'_2)^{\alpha_2}\ldots(u' - U'_m)^{\alpha_m}][(u' - V'_1)^{\alpha_1}(u' - V'_2)^{\alpha_2}\ldots(u' - V'_m)^{\alpha_m}]$$

reste fini en tous les points du domaine A, puisque $u' = k - ik'$ a, en tous les points de ce domaine, le caractère d'une fonction entière.

Soit V_j la quantité imaginaire conjuguée de V'_j et posons

$$Q = (u - V_1)^{\alpha_1}(u - V_2)^{\alpha_2}\ldots(u - V_m)^{\alpha_m}.$$

Considérons la fonction

$$PQ\,K(z).$$

$P(u)$ est de la forme

$$k_1(z) + i k_2(z).$$

$Q(u)$ est aussi de la forme

$$k_3(z) + i k_4(z);$$

donc

$$K(z)P(u)Q(u) = K(k_1 + i k_2)(k_3 + i k_4).$$

Le produit de plusieurs fonctions K est encore une fonction K.

Donc
$$K(z)P(u)Q(u) = k_5(z) + i\,k'_5(z).$$
D'ailleurs
$$k_5(z) - i\,k'_5(z) = K(z)[(u' - U'_1)^{\alpha_1}\ldots(u' - U'_m)^{\alpha_m}][(u' - V'_1)^{\alpha_1}\ldots(u' - V'_m)^{\alpha_m}],$$
puisque le deuxième membre a, dans le domaine A, le caractère d'une fonction entière.

Donc $K(z)P(u)Q(u)$ est une fonction $N(z)$. Elle est exprimable rationnellement en fonction de u et de v.

Donc toute fonction $K(z)$ peut s'exprimer elle-même rationnellement en fonction de u et de v.

u et v n'étant pas réelles sur la limite du domaine A, cette fonction rationnelle a des coefficients imaginaires.

Nous avons écarté le cas où la fonction $K(z)$ admettrait le pôle a. Supposons que $K(z)$ admette le pôle a, avec l'ordre α_0 de multiplicité.

Soient toujours $z_1, z_2, \ldots, z_m$ les autres pôles de $K(z)$, d'ordres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, respectivement.

Soit A' la valeur de u' au point a, valeur finie par hypothèse.

On prendra
$$Q(u) = (u - A)^{\alpha_0}(u - V_1)^{\alpha_1}(u - V_2)^{\alpha_2}\ldots(u - V_m)^{\alpha_m},$$
c'est la seule modification à faire subir au raisonnement précédent.

23. Ainsi, il est prouvé que toute fonction $K(z)$ est une fonction rationnelle de u et de v, u et v étant liés par une relation algébrique $G(u, v) = 0$.

Soit
$$u = u_1(z) + i\,u_2(z),$$
$$v = v_1(z) + i\,v_2(z),$$
u_1, u_2, v_1, v_2 étant des fonctions k.

Choisissons deux fonctions k particulières, par exemple
$$r = u_1(z),$$
$$s = l\,u_2(z) + m\,v_1(z) + n\,v_2(z),$$
l, m et n étant des constantes réelles.

On aura
$$r = \varphi(u, v),$$
$$s = \psi(u, v),$$
φ et ψ étant des fonctions rationnelles de u et de v, de sorte qu'à un système de valeurs de (u, v) ne correspond qu'un système de valeurs (r, s).

De plus, r et s satisfont à une équation algébrique

$$\mathcal{G}(r, s) = 0,$$

qu'on obtiendra en éliminant u et v entre les trois équations

$$r = \varphi(u, v),$$
$$s = \psi(u, v),$$
$$G(u, v) = 0.$$

D'ailleurs r et s sont des fonctions rationnelles du point analytique (u, v) qui ne deviennent infinies que pour le système de valeurs $z = a$, $u = \infty$, $v = \infty$. Donc, réciproquement à un système de valeurs (r, s) ne correspond qu'un système de valeurs (u, v). C'est-à-dire que la transformation

$$r = \varphi(u, v),$$
$$s = \psi(u, v)$$

est réversible, et que u et v sont des fonctions rationnelles de r et de s.

Il résulte de là que, $K(z)$ désignant la fonction K la plus générale, on aura

$$K(z) = R(r, s),$$

R désignant une fonction rationnelle à coefficients réels, puisque $K(z)$, $r(z)$, $s(z)$ sont réels simultanément sur la limite du domaine A.

La relation algébrique $\mathcal{G}(r, s) = 0$ est, elle aussi, à coefficients réels. Autrement, elle ne serait vérifiée que par un nombre fini de valeurs réelles de r et de s.

IV. — Domaine algébrique correspondant au domaine A. Genre de l'équation $\mathcal{G}(r, s) = 0$.

24. J'aborde maintenant un point très important.

A chaque point z du domaine A nous avons fait correspondre un couple de valeurs (r, s) liées toujours par la relation $\mathcal{G}(r, s) = 0$.

Lorsque le point z parcourt tout le domaine A, quelle portion de la surface de Riemann à α feuillets, qui répond à $\mathcal{G}(r, s) = 0$, parcourra le couple (r, s), et combien de fois passera-t-il par chaque point appartenant à cette portion de surface?

Démontrons d'abord le théorème suivant :

$\mathcal{G}(r, s) = 0$ *étant une équation algébrique irréductible, et* (r_0, s_0) *une solution quelconque, on peut former une fonction rationnelle de* r *et de* s *ne*

devenant infinie que pour le seul système (r_0, s_0) *de valeurs vérifiant l'équation* $\mathcal{G}(r, s) = 0$.

Soient n le degré, ρ le genre de l'équation $\mathcal{G}(r, s) = 0$.

On entend par courbe adjointe de la courbe $\mathcal{G}(r, s) = 0$ toute courbe algébrique passant $j - 1$ fois par tout point multiple d'ordre j de la courbe $\mathcal{G}(r, s) = 0$, sans qu'en un tel point les branches particulières des deux courbes se touchent (1).

Soient $\varphi(r, s) = 0$, $\psi(r, s) = 0$ les équations de deux courbes adjointes à la courbe $\mathcal{G}(r, s) = 0$.

Supposons-les toutes les deux de degré m.

Soit d'abord $m \geqq n - 2$.

Parmi les points d'intersection des courbes $\varphi = 0$, ou $\psi = 0$ avec la courbe $\mathcal{G} = 0$ non situés aux points singuliers, ρ sont déterminés par les $[n(m - n + 3) + \rho - 2]$ qui restent (2).

Cela posé, soit (r_0, s_0) un point de la courbe $\mathcal{G}(r, s) = 0$.

Déterminons $\psi(r, s)$ de façon que la courbe $\psi = 0$ ait un contact d'ordre $(\rho + h - 1)$ au point (r_0, s_0) avec la courbe $\mathcal{G} = 0$.

Cela fait $\rho + h$ conditions, linéaires par rapport aux paramètres variables de $\psi(r, s)$.

On pourra donc déterminer $\psi(r, s)$ si l'on a

$$n(m - n + 3) + \rho - 2 \geqq \rho + h$$

ou

$$m \geqq n - 3 + \frac{h + 2}{n}.$$

Soit k le nombre entier immédiatement supérieur à $\frac{h+2}{n}$.

Prenons $m = n - 3 + k$.

Il reste dans $\psi(r, s)$ un nombre de constantes arbitraires égal à

$$[n(m - n + 3) + \rho - 2] - (\rho + h) = nk - (h + 2) = n'.$$

Les zéros de $\psi(r, s)$ sont d'abord (r_0, s_0), d'ordre $\rho + h$, puis $\rho + n'$ autres zéros, (r_j, s_j), savoir les n' zéros qui servent à déterminer les n' dernières constantes arbitraires, et les ρ zéros déterminés par les $\rho + h + n'$ zéros qu'on s'est donnés.

---

(1) Clebsch, *Leçons sur la Géométrie*, t. II, p. 135 (traduction de M. Benoist).

(2) Clebsch, *loc. cit.*, t. II, p. 135 et 136.

Cela posé, $\varphi(r, s)$ dépend aussi de $nk + \rho - 2 = n(m - n + 3) + \rho - 2$ paramètres, c'est-à-dire, puisque $nk = n' + h + 2$, de $n' + h + \rho$ paramètres.

On peut donc, si l'on a $h > 0$, déterminer $\varphi(r, s)$ de manière que $\varphi(r, s)$ s'annule pour les $n' + \rho$ zéros (r_j, s_j) de $\psi(r, s)$.

Alors la fonction rationnelle de r et de s, $W = \frac{\varphi(r, s)}{\psi(r, s)}$, est infinie d'ordre $\rho + h$ au seul point (r_0, s_0) et reste finie pour tout autre point (r, s), tel que r et s vérifient l'équation $\mathcal{G}(r, s) = 0$.

Le théorème est démontré.

25. Ceci posé, nous savons déjà qu'à un point de la limite du domaine A correspond un système de valeurs réelles de r et de s.

Soient maintenant z_0 un point situé à l'intérieur du domaine A, et

$$[r_0 = r(z_0), \ s_0 = s(z_0)]$$

le couple correspondant.

Je dis que, de ces deux valeurs, l'une au moins est imaginaire : en effet, si nous répétons sur le point quelconque z_0 ce que nous avons fait pour le point a, nous voyons qu'il existe des fonctions rationnelles $p(z)$ n'ayant que le pôle z_0, telles que les fonctions $h(z)$ correspondant à $\frac{1}{2}p(z)$ et à $-\frac{i}{2}p(z)$ soient des fonctions $k(z)$.

Soient $k(z)$ et $k'(z)$ ces deux fonctions.

Le rapport $\frac{k(z)}{k'(z)}$ est une fonction rationnelle de r et de s, à coefficients *réels*, $R(r, s)$.

Mais on a

$$k(z) = \frac{A}{(z - z_0)^m} + \frac{B}{(z - z_0)^{m-1}} + \ldots,$$

$$k'(z) = -\frac{Ai}{(z - z_0)^m} - \frac{Bi}{(z - z_0)^{m-1}} - \ldots;$$

donc

$$\frac{k(z_0)}{k'(z_0)} = R(r_0, s_0) = +i.$$

Par suite, r_0 et s_0 ne peuvent être tous les deux réels.

Inversement, soit un couple (r_0, s_0) de valeurs qui ne soient pas toutes les deux réelles, et telles que l'on ait

$$\mathcal{G}(r_0, s_0) = 0.$$

Il s'agit de savoir s'il existe un point z_0 intérieur au domaine A, et tel qu'on ait

$$r(z_0) = r_0, \qquad s(z_0) = s_0,$$

A cet effet, je forme une fonction rationnelle de r et de s qui ne devienne infinie que pour le couple (r_0, s_0) (n° **24**). Soit $R(r, s)$ cette fonction.

Cette fonction n'a pas tous ses coefficients réels; autrement, elle deviendrait aussi infinie pour le couple (r'_0, s'_0) imaginaire conjugué du premier.

Posons

$$R(r, s) = R_1(r, s) + i R_2(r, s),$$

R_1 et R_2 étant des fonctions rationnelles à coefficients réels.

Si l'on remplace, dans R_1 et R_2, r et s en fonction de z, on a des fonctions de z qui prennent des valeurs réelles et finies sur la limite du domaine A [puisqu'elles ne peuvent devenir infinies que pour (r_0, s_0) ou (r'_0, s'_0)].

Ce sont donc des fonctions $K(z)$. Mais ce ne sont pas des constantes. Donc chacune d'elles devient infinie au moins en un point z_0 intérieur au domaine A, et au point symétrique z'_0 de l'aire A' (symétrique de A par rapport à l'axe réel).

A z_0 correspond, soit le couple (r_0, s_0), soit le couple (r'_0, s'_0).

Supposons que ce soit (r_0, s_0) qui corresponde à $z_0 \begin{cases} r_0 = r(z_0) \\ s_0 = s(z_0) \end{cases}$.

Formons, comme précédemment, une fonction rationnelle $p(z)$ ayant z_0 pour seul pôle, et telle que la fonction $h(z)$ correspondante soit une fonction $k(z)$. C'est une fonction rationnelle de r et de s, à coefficients réels, qui devient infinie pour $r = r_0$, $s = s_0$, et aussi, par conséquent, pour $r = r'_0$, $s = s'_0$.

D'autre part, elle ne devient infinie à l'intérieur de l'aire A qu'au point z_0, auquel correspond par hypothèse le couple (r_0, s_0). Donc, en aucun autre point que z_0 de l'aire A on n'a $r(z) = r_0$, $s(z) = s_0$, et en aucun point de l'aire A on n'a $r(z) = r'_0$, $s(z) = s'_0$.

En résumé, si le point z parcourt le domaine A tout entier, sans omission et sans répétition, le couple (r, s) prendra une série de valeurs, mais aucune d'elles deux fois. De plus, il ne prendra que la moitié des valeurs définies par l'équation $\mathcal{G}(r, s) = 0$, et cette moitié constitue une portion de la surface de Riemann $\mathcal{R}$, telle qu'on puisse passer d'un point à un autre de cette région sans passer par un point correspondant à un couple (r, s) formé de valeurs réelles.

La surface $\mathcal{R}$ de Riemann se partage en deux régions, B et B'.

Au point z_0 du domaine A répond un point (r_0, s_0) de $\mathcal{R}$. Soit (r, s) un point analytique quelconque de $\mathcal{R}$.

Appelons *courbes de transition* les courbes C de $\mathcal{R}$ lieu des points analytiques (r, s) pour lesquels r et s sont réels. Si l'on peut passer de (r_0, s_0) à (r, s) avec continuité, par un chemin qui ne traverse aucune des courbes de transition, et si (r_0, s_0) est supposé situé dans la région B, le point (r, s) est aussi situé dans la région B, sinon il sera dans la région B'.

Deux points analytiques imaginaires conjugués font partie de deux régions

différentes. Ces deux régions B et B′ sont donc complètement extérieures l'une à l'autre; leur réunion forme la surface $\mathcal{R}$ définie par l'équation $\mathcal{G}(r, s) = 0$, sans répétition. Leur limite commune est l'ensemble des courbes C.

La région B correspond au domaine A.

26. Il reste à voir comment se correspondent les points de la limite du domaine A et ceux des courbes C.

Soit (r_0, s_0) un couple réel, vérifiant l'équation $\mathcal{G}(r, s) = 0$.

Il existe une fonction rationnelle $R(r, s)$, *à coefficients réels*, qui ne devient infinie que pour $r = r_0$, $s = s_0$ (n° **24**).

Si l'on y remplace r et s en fonction de z, on obtient une fonction de z qui, si elle ne devient infinie en aucun point de la limite de A, est une fonction $K(z)$.

D'ailleurs elle ne devient infinie en aucun point de l'aire A (ni de l'aire symétrique A′), puisque le couple (r, s) correspondant à un tel point ne peut être réel. Ce serait donc une constante, ce qui est absurde. Il existe donc un point z_0 de la limite de A tel qu'on ait

$$r = r_0, \qquad s = s_0.$$

Je dis qu'il n'en existe qu'un.

En effet, considérons l'ensemble des valeurs de r et de s satisfaisant aux inégalités

$$|r - r_0| < \delta, \qquad |s - s_0| < \varepsilon,$$

et tel que les points correspondants soient, sur la surface $\mathcal{R}$, dans la région B.

A chaque point de ce petit domaine inclus dans B correspond un point, et un seul, situé dans le domaine A. Donc, au domaine inclus dans B correspond ainsi point par point un domaine inclus dans A. Quand δ et ε tendent simultanément vers zéro, ce petit domaine inclus dans A s'évanouit en se réduisant à un seul point z_0 de la limite de A. Ce point z_0 est le seul, par suite, tel que

$$r(z_0) = r_0, \qquad s(z_0) = s_0.$$

27. Nous nous proposons à présent de chercher le genre de l'équation $\mathcal{G}(r, s) = 0$. Nous allons nous appuyer sur la proposition suivante :

Si (r_0, s_0) est un des couples vérifiant l'équation $\mathcal{G}(r, s) = 0$, il existe des fonctions rationnelles de r et de s qui ne deviennent infinies que pour ce couple (r_0, s_0). Il en existe de tous les ordres possibles, à l'exception d'un nombre fini *d'ordres. Ce nombre fini, indépendant d'ailleurs du couple (r_0, s_0) choisi, est précisément égal au genre de la courbe $\mathcal{G}(r, s) = 0$* (1).

(1) *Voir* le *Traité d'Analyse* de M. E. Picard, t. II, p. 429 et 430; en particulier la remarque de la page 430.

Dans le cas présent, il est naturel de choisir pour le couple (r_0, s_0) le couple correspondant au point a considéré au n° **17**.

Soit (g, h) ce couple; $g = r(a)$, $h = s(a)$.

Considérons les deux suites

$$\begin{array}{lllll} (1) & \varkappa_1, & \varkappa_2, & \ldots, & \varkappa_\rho \\ (2) & \alpha, & \beta, & \gamma, & \ldots \end{array} \qquad (\textit{voir } \text{n° } \mathbf{18}).$$

Je dis qu'à tout nombre μ de la suite (2) correspond une fonction rationnelle de r et de s qui ne devient infinie que pour le seul couple (g, h), et cela d'un ordre égal à μ.

Soit, en effet, la fonction

$$N_\mu = R_1(r, s) + i R_2(r, s),$$

où R_1 et R_2 sont des fonctions rationnelles à coefficients réels de r et de s.

Cette fonction est infinie pour le couple (g, h), et infinie de l'ordre μ. Elle est finie en tout autre point (r, s) de la région B de $\mathfrak{R}$.

Reste à examiner la région B'.

Rappelons-nous que la fonction

$$N'_\mu = R_1(r, s) - i R_2(r, s)$$

reste finie pour toute la région B.

Dès lors, soient (r'_0, s'_0) un point de B', (r_0, s_0) le point imaginaire conjugué; $R_1(r_0, s_0) - i R_2(r_0, s_0)$ a une valeur finie.

Donc aussi

$$R_1(r'_0, s'_0) + i R_2(r'_0, s'_0).$$

Le genre de la courbe $\mathcal{G}(r, s) = 0$ est donc *au plus* égal à ρ.

Je vais montrer qu'il est exactement égal à ρ, et cela en faisant voir que pour aucun des nombres de la suite (1) $(\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_\rho)$ on ne peut trouver une fonction rationnelle de r et de s ne devenant infinie que pour le couple (g, h).

Soit λ un des nombres de la suite (1).

S'il existait une telle fonction, $R_1(r, s) + i R_2(r, s)$ (R_1 et R_2 étant des fonctions rationnelles à coefficients réels), R_1 et R_2 seraient des fonctions K. D'ailleurs, de la condition que $R_1(r, s) + i R_2(r, s)$ doit rester finie à l'intérieur de B', il résulte que $R_1(r, s) - i R_2(r, s)$ a le caractère d'une fonction entière à l'intérieur de B. Il y aurait donc une fonction $N_\lambda(z)$, λ étant l'un des nombres de la suite $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_\rho$. C'est contraire à l'hypothèse que nous avons faite (n° **18**).

28. D'après cela, le genre de l'équation $\mathcal{G}(r, s) = 0$ est le nombre ρ lui-même.

Ce résultat acquis, nous sommes en mesure de donner une détermination plus précise du nombre ρ. Nous savons qu'à l'équation $\mathcal{G}(r, s) = 0$, de genre ρ, sont attachées ρ intégrales abéliennes de première espèce linéairement indépendantes.

D'ailleurs nous allons faire voir que nous avons p telles intégrales (p est le nombre des courbes $L_1, L_2, \ldots, L_p$). Il suivra de là que ρ est juste égal à p.

Des intégrales abéliennes relatives à l'équation $\mathcal{G}(r, s) = 0$ vont nous être fournies par les fonctions $F(z)$ définies au n° **11**.

Considérons, en effet, une telle fonction et envisageons le rapport $\frac{F'(z)}{r'(z)}$ [$r(z)$ étant l'une des deux fonctions r, s, au moyen desquelles toutes les fonctions $K(z)$ s'expriment par des fonctions rationnelles à coefficients réels]. Ce rapport $\frac{F'(z)}{r'(z)} = \frac{dF}{dr}$ a tous les caractères d'une fonction $K(z)$, à cela près qu'il peut devenir infini sur la limite du domaine A.

En effet, $\frac{F'(z)}{r'(z)}$ se comporte à l'intérieur du domaine A comme une fonction rationnelle. Sur la limite, il prend des valeurs réelles. Mais il peut devenir infini en un nombre fini de points situés sur la limite.

Si l'on veut se rendre compte de la manière dont se comporte ce quotient $\frac{F'(z)}{r'(z)}$ sur la limite du domaine A, en un point z_0 situé sur L_ν, par exemple, reportons-nous au n° **12**.

Soit $t = t(z)$ la fonction qui y a été définie.

Remplaçons z en fonction de t, $\frac{dF}{dr} = \frac{\frac{dF}{dt}}{\frac{dr}{dt}}$. Le numérateur aussi bien que le dénominateur peuvent se développer en séries à coefficients réels, ordonnées suivant les puissances entières et positives de t. Si l'on effectue la division, l'on a

$$\frac{dF}{dr} = C_\mu t^\mu + C_{\mu+1} t^{\mu+1} + C_{\mu+2} t^{\mu+2} + \ldots,$$

où μ peut représenter un nombre entier positif, ou négatif, ou nul.

On peut toujours former un polynome entier en r, *à coefficients réels*, $G(r)$, tel que $G(r)\frac{dF}{dr}$ reste fini tout le long de la limite du domaine A.

En effet, soient $z_1, z_2, \ldots, z_n$ les points de la limite de A pour lesquels $\frac{dF}{dr}$ devient infini, et $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ leurs ordres de multiplicité.

En ces points, r prend des valeurs *réelles et finies;* soient $r_1, r_2, \ldots, r_n$ ces valeurs. La fonction

$$(r - r_1)^{\alpha_1}(r - r_2)^{\alpha_2}\ldots(r - r_n)^{\alpha_n}\frac{dF}{dr}$$

est réelle et finie sur toute la limite du domaine A.

C'est donc une fonction $K(z)$; par suite, c'est une fonction rationnelle, à coefficients réels, de r et de s.

Donc $\frac{dF}{dr}$ est aussi une fonction rationnelle à coefficients réels de r et de s.

→ Donc F est une intégrale abélienne relative à l'équation $\mathcal{G}(r, s) = 0$.

Maintenant, parmi les fonctions F, il en est de particulières, que nous avons désignées par la lettre J (*voir* n° 15).

Elles restent finies pour toute la région B de $\mathfrak{R}$. Cela donne à penser que ce sont des intégrales abéliennes de première espèce. Mais, pour nous en assurer, il faut faire voir qu'elles restent finies aussi pour la région B'. Or ceci résulte immédiatement de ce que $\frac{dF}{dr}$ est une fonction rationnelle de r et de s, *à coefficients réels;* pour des couples imaginaires conjugués, (r, s), (r', s'), $\frac{dF}{dr} = \frac{dJ}{dr}$ prend des valeurs imaginaires conjuguées.

La question qui se pose est alors la suivante : les p intégrales de première espèce $J_1(z)$, $J_2(z)$, ..., $J_p(z)$ sont-elles linéairement indépendantes?

S'il n'en était pas ainsi, on aurait

$$(A_1 + B_1 i) J_1(z) + (A_2 + B_2 i) J_2(z) + \ldots + (A_p + B_p i) J_p(z) = P + Qi,$$

$A_1, A_2, \ldots, A_p$; $B_1, B_2, \ldots, B_p$; P, Q représentant des constantes réelles.

Prenons la dérivée des deux membres; on en déduirait

$$(A_1 + B_1 i) R_1(r, s) + (A_2 + B_2 i) R_2(r, s) + \ldots + (A_p + B_p i) R_p(r, s) = 0;$$

les R sont les fonctions rationnelles *à coefficients réels* qui fournissent les intégrales abéliennes considérées.

On aurait donc, en particulier,

$$A_1 R_1(r, s) + A_2 R_2(r, s) + \ldots + A_p R_p(r, s) = 0,$$

d'où, en intégrant,

$$A_1 J_1(z) + A_2 J_2(z) + \ldots + A_p J_p(z) = A + Bi,$$

A et B étant des constantes réelles.

Or, le long de L_0, toutes les fonctions J sont réelles. Donc $B = 0$. Le long de L_1, le coefficient de i dans J_1 est 1, tandis que $J_2, J_3, \ldots, J_p$ sont réelles. Donc $A_1 = 0$. On démontre ainsi de proche en proche que tous les A sont nuls.

La même conclusion s'applique aux constantes $B_1, B_2, \ldots, B_p$.

V. — Équations caractéristiques du domaine A. Ensemble des domaines qui ont les mêmes équations caractéristiques. Conditions pour que deux domaines de même connexion puissent se représenter l'un sur l'autre d'une manière conforme.

29. Dans ce qui précède, nous avons vu qu'à tout domaine A de connexion égale à $p+1$ on pouvait faire correspondre deux fonctions $K(z)$ particulières, r et s, au moyen desquelles toutes les fonctions $K(z)$ peuvent s'exprimer par des fonctions rationnelles à coefficients réels. Entre r et s existe de plus une relation algébrique à coefficients réels $\mathcal{G}(r, s)=0$, et nous avons vu que le genre de cette équation est égal à p.

Toute fonction $K(z)$ est une fonction rationnelle, à coefficients réels, de r et de s. Mais la réciproque n'est pas exacte : car une fonction rationnelle à coefficients réels de r et de s peut devenir infinie en quelques points de la limite du domaine A, tandis qu'une fonction $K(z)$ reste réelle et finie en tous les points de cette limite.

Nous désignerons par $[K(z)]$ une fonction rationnelle quelconque, à coefficients réels, de r et de s.

Il y a une infinité de systèmes de deux fonctions $[K]$ au moyen desquelles toutes les autres peuvent s'exprimer par des fonctions rationnelles à coefficients réels. Je dis qu'on obtiendra tous ces systèmes en cherchant les transformations birationnelles à coefficients réels de $\mathcal{G}(r, s)=0$.

En effet :

1° Soit (r_1, s_1) un pareil système de fonctions $[K]$. Par définition, les fonctions $[K]$ sont des fonctions rationnelles à coefficients réels de r et de s.

Donc

$$r_1 = R(r, s),$$
$$s_1 = R'(r, s),$$

R et R' désignant des fonctions rationnelles à coefficients réels. Mais, d'après l'hypothèse, r et s sont aussi des fonctions rationnelles à coefficients réels de r_1 et de s_1.

La transformation $r_1 = R(r, s)$, $s_1 = R'(r, s)$ est donc birationnelle, ou réversible.

r_1 et s_1 sont liés par une relation algébrique à coefficients réels, $\mathcal{G}_1(r_1, s_1)=0$, également de genre p.

On sait en effet qu'une transformation rationnelle réversible conserve le genre de l'équation que l'on transforme.

2° Réciproquement, je considère l'équation $\mathcal{G}(r, s)=0$, et je suppose que la

En effet, puisqu'on a $z = f(z_1)$, c'est que, à l'intérieur de A_1, $f(z_1)$ se comporte comme une fonction entière dont la dérivée n'est jamais nulle.

Il en résulte que $K_1(z_1)$ a, dans le domaine A_1, le caractère d'une fonction rationnelle; en effet, $K(z)$ est de la forme

$$\sum \frac{A}{(z-a)^\alpha} + \varphi(z),$$

$\varphi(z)$ étant une fonction entière.

Si l'on remplace z par $f(z_1)$, $\varphi[f(z_1)]$ a bien sur A_1 le caractère d'une fonction entière $\varphi_1(z_1)$.

Pour $z = a$, z_1 prend *une* valeur a_1 telle que $f(a_1) = a$. On a

$$z - a = (z_1 - a_1) f'(a_1) + \frac{(z_1 - a_1)^2}{1.2} f''(a_1) + \ldots.$$

Donc

$$\frac{1}{(z-a)^\alpha} = \frac{1}{(z_1 - a_1)^\alpha \mathrm{P}(z_1 - a_1)} = \frac{1}{(z_1 - a_1)^\alpha} \mathfrak{P}(z_1 - a_1),$$

P et $\mathfrak{P}$ désignant des séries ordonnées suivant les puissances entières et positives de $z_1 - a_1$, qui ne s'annulent pas pour $z_1 = a_1$.

Sur la limite de A_1, $K_1(z_1)$ prend des valeurs réelles, finies [les mêmes que $K(z)$ sur la limite de A].

Nous avons donc bien obtenu une fonction K relative au domaine A_1.

Cela posé, aux fonctions $r(z)$ et $s(z)$ correspondent des fonctions $r_1(z_1)$, $s_1(z_1)$ telles que

$$r_1(z_1) = r[f(z_1)],$$
$$s_1(z_1) = s[f(z_1)].$$

On a donc

$$\mathcal{G}(r_1, s_1) = 0.$$

De plus, toutes les fonctions K relatives au domaine A_1 s'expriment en fonctions rationnelles à coefficients réels de r_1 et de s_1.

Car on a

$$K(z) = R[r(z), s(z)],$$

R étant une fonction rationnelle à coefficients réels de r et de s.

Donc

$$K_1(z_1) = K[f(z_1)] = R\{r[f(z_1)], s[f(z_1)]\} = R(r_1, s_1).$$

L'équation $\mathcal{G}(r_1, s_1) = 0$ est donc une équation caractéristique pour le domaine A_1.

De plus, le point z_1 parcourant le domaine A_1, le couple (r_1, s_1) parcourt la région B de la surface $\mathcal{R}$.

Si $\bar{f}(z_1)$ représente la fonction $f(z_1)$, où l'on a remplacé chaque coefficient par le coefficient imaginaire conjugué, la fonction $z' = \bar{f}(z'_1)$ réalise la représentation conforme de A'_1 sur A'.

32. Nous avons trouvé que d'une part le domaine A', d'autre part tous les domaines représentables d'une façon conforme soit sur A, soit sur A', ont les mêmes équations caractéristiques que le domaine A.

Je dis que ce sont les seuls.

Pour le prouver, je vais montrer que tout domaine ayant les mêmes équations caractéristiques que le domaine A peut être représenté d'une manière conforme soit sur A, soit sur A'.

En effet, soit A_1 un tel domaine.

Soit $\mathcal{G}(r, s) = 0$ une des équations caractéristiques du domaine A, $\mathcal{G}_1(r_1, s_1) = 0$ une des équations caractéristiques du domaine A_1.

L'hypothèse est que ces deux équations appartiennent à la même classe, et que la transformation birationnelle permettant de passer de l'une à l'autre est à coefficients réels.

J'appelle B la région de la surface $\mathcal{R}$ de Riemann relative à l'équation $\mathcal{G}(r, s) = 0$, et correspondant à l'intérieur du domaine A, B_1 la région de la surface $\mathcal{R}_1$ de Riemann relative à l'équation $\mathcal{G}_1(r_1, s_1) = 0$, et correspondant à l'intérieur du domaine A_1.

Soient $r(z)$, $s(z)$ les deux fonctions [K] relatives à A et correspondant à $\mathcal{G}(r, s) = 0$, au moyen desquelles toute autre fonction [K] relative au domaine A peut s'exprimer par une fonction rationnelle, à coefficients réels.

Soient $r_1(z_1)$, $s_1(z_1)$ les deux fonctions analogues relatives au domaine A_1 et à l'équation $\mathcal{G}_1(r_1, s_1) = 0$.

On passe de l'équation $\mathcal{G}(r, s) = 0$ à l'équation $\mathcal{G}_1(r_1, s_1) = 0$ par la transformation

$$r = R_1(r_1, s_1),$$
$$s = R_2(r_1, s_1),$$

R_1 et R_2 étant des fonctions rationnelles, à coefficients réels, et cette transformation est réversible.

Par cette transformation, à la région B_1 correspond soit la région B, soit la région B'. Car si r_1 et s_1 sont réels, il en est de même des valeurs r et s qui leur correspondent.

Si le point (r_1, s_1) parcourt toute la région B_1 il va d'un point à un autre de cette région, sans passer par un point à coordonnées réelles, avec continuité. Il en est de même du point (r, s), et réciproquement.

Supposons que B corresponde à B_1. Alors nous allons faire voir que A_1 est représentable sur le domaine A.

[Dans le cas où ce serait B' qui correspondrait à B_1, A_1 serait représentable sur A'.]

J'introduis deux nouvelles fonctions [K] relatives au domaine A_1, savoir :

$$\rho_1(z_1) = R_1[r_1(z_1), s_1(z_1)],$$
$$\sigma_1(z_1) = R_2[r_1(z_1), s_1(z_1)].$$

Soit z_1 un point quelconque du domaine A_1.

Il lui correspond un point (r_1, s_1) de la région B_1, donc un point (ρ_1, σ_1) de B.

Or, il existe un point z, et un seul, à l'intérieur de A tel que

$$r(z) = \rho_1(z_1), \qquad s(z) = \sigma_1(z_1).$$

C'est ce point z que nous ferons correspondre à z_1.

Les deux équations

$$r(z) = \rho_1(z_1),$$
$$s(z) = \sigma_1(z_1)$$

définissent une fonction z de z_1 telle que, lorsque z_1 parcourt tout le domaine A_1, sans omission ni répétition, z parcourt tout le domaine A sans omission ni répétition, et inversement.

Si à B_1 correspond B', c'est sur A' que le domaine A_1 peut être représenté.

Pour le voir, je considère $\bar{r}(z')$ et $\bar{s}(z')$.

Quand z' parcourt le domaine A', le point $(\bar{r}, \bar{s})$ parcourt la région B'.

Cela étant, à chaque point z_1 de A_1 correspond un point (r_1, s_1) de B_1, donc un point (ρ_1, σ_1) de B'. On posera

$$\bar{r}(z') = \rho_1(z_1),$$
$$\bar{s}(z') = \sigma_1(z_1).$$

Ces équations, prises simultanément, réalisent la représentation conforme de A_1 sur A'.

VI. — Cas particuliers. Exemples.

33. Supposons que $p = 0$; soient A et A_1 deux domaines à connexion simple, et $\mathcal{G}(r, s) = 0$, $\mathcal{G}_1(r_1, s_1) = 0$ les deux équations algébriques qui leur correspondent, toutes deux de genre 0.

On a

$$\lambda = R(r, s), \qquad r = R'(\lambda), \qquad s = R''(\lambda),$$

R, R′, R″ étant des fonctions rationnelles à coefficients réels. En effet, on sait d'abord que r et s peuvent s'exprimer en fonction rationnelle à coefficients réels d'un paramètre λ, $r = R'(\lambda)$, $s = R''(\lambda)$. On peut d'ailleurs choisir ces fonctions de telle sorte que, r et s étant donnés, les deux équations en λ n'aient qu'une racine commune, laquelle doit alors s'exprimer en fonction rationnelle à coefficients réels des coefficients des deux équations en λ, $r = R'(\lambda)$, $s = R''(\lambda)$.

Pareillement, l'équation $\mathcal{G}_1(r_1, s_1) = 0$ étant de genre 0, on aura

$$\lambda_1 = R_1(r_1, s_1), \qquad r_1 = R'_1(\lambda_1), \qquad s_1 = R''_1(\lambda_1),$$

R_1, R'_1, R''_1 désignant des fonctions rationnelles à coefficients réels.

Cela posé, on voit que nous obtiendrons des transformations birationnelles à coefficients réels, et que nous les obtiendrons toutes en posant

$$\lambda = \frac{\alpha\lambda_1 + \beta}{\gamma\lambda_1 + \delta} \qquad (\alpha, \beta, \gamma, \delta \text{ étant réels}).$$

Le problème est donc indéterminé, et dépend de trois constantes arbitraires.

Maintenant, supposons que pour $\lambda = \lambda_1$ les domaines A et A_1 se correspondent : il en sera de même si $\lambda = \dfrac{\alpha\lambda_1 + \beta}{\gamma\lambda_1 + \delta}$, pour $\alpha\delta - \beta\gamma > 0$, car alors les parties imaginaires de λ et λ_1 seront toujours de même signe.

Si, au contraire, on a $\alpha\delta - \beta\gamma < 0$, A_1 correspond à A′.

De même, il y a une infinité de manières de faire correspondre le domaine (A, A′) à lui-même.

Au point

$$r = R'(\lambda), \qquad s = R''(\lambda)$$

on fera correspondre le point

$$r_0 = R'\left(\frac{\alpha\lambda + \beta}{\gamma\lambda + \delta}\right), \qquad s_0 = R''\left(\frac{\alpha\lambda + \beta}{\gamma\lambda + \delta}\right).$$

Si $\alpha\delta - \beta\gamma$ est positif, A correspond à A, A′ à A′.

Si $\alpha\delta - \beta\gamma$ est négatif, A correspond à A′, A′ à A.

34. J'aborde le cas où $p = 1$:

Si (r_0, s_0) est un couple quelconque de valeurs vérifiant l'équation $\mathcal{G}(r, s) = 0$, de genre 1 [nous prendrons le point (r_0, s_0) dans la région B de la surface $\mathfrak{R}$], il existe des fonctions rationnelles de r et de s ne devenant infinies que pour le couple (r_0, s_0), et infinies d'ordre μ; il y a exception pour une seule valeur de μ.

Cette valeur, pour laquelle il y a exception, est évidemment $\mu = 1$. Car, si $N_1(z)$ existait, $N_1^\mu(z)$ est une fonction $N_\mu(z)$, quel que soit l'entier μ.

Donc

$$\alpha = 2, \qquad \alpha' = 3.$$

Entre N_2 et N_3 existe (*voir* n° 21) une équation entière, du second degré en N_3,

$$N_3^2 = N_3\, G_1(N_2) + G_3(N_2),$$

G_1 désigne un polynome entier de degré 1;
G_3 désigne un polynome entier de degré 3.

Cherchons à réduire autant que possible le nombre des constantes arbitraires.

L'expression générale des fonctions μ, qui deviennent infinies du deuxième ordre, est

$$u = \lambda\, N_2(z) + \mu,$$

λ et μ sont des constantes arbitraires.

De même, l'expression générale des fonctions v, qui deviennent infinies du troisième ordre, est

$$v = \lambda'\, N_3(z) + \mu'\, N_2(z) + \nu',$$

λ', μ', ν' étant des constantes arbitraires.

Soit

$$v = N_3(z) - \tfrac{1}{2} G_1[N_2(z)].$$

Alors

$$v^2 = N_3^2 - N_3 G_1(N_2) + \tfrac{1}{4} G_1^2(N_2)$$

ou

$$v^2 = G_3(N_2) + \tfrac{1}{4} G_1^2(N_2) = R_3(N_2),$$

R_3 désignant un polynome du troisième degré en N_2.

Enfin, on peut choisir u de manière à mettre cette équation sous la forme

$$v^2 = 4u^3 - g_2 u - g_3,$$

car l'identité

$$v^2 = aN_2^3 + bN_2^2 + cN_2 + d = 4(\lambda N_2 + \mu)^3 - g_2(\lambda N_2 + \mu) - g_3$$

donne

$$\begin{aligned} a &= 4\lambda^3, \\ b &= 12\lambda^2\mu, \\ c &= 12\lambda\mu^2 - g_2\lambda, \\ d &= 4\mu^3 - g_2\mu - g_3, \end{aligned}$$

équations d'où l'on peut tirer successivement λ, μ, g_2 et g_3. Il y a trois solutions.

Remarquons que si l'on pose

$$v = av', \qquad u = bu'$$

avec

$$a^2 = b^3,$$

on a

$$v'^2 a^2 = 4 b^3 u'^3 - g_2 bu' - g_3$$

ou

$$v'^2 = 4 u'^3 - \frac{g_2}{b^2} u' - \frac{g_3}{a^2}$$

ou enfin

$$v'^2 = 4 u'^3 - g'_2 u' - g'_3$$

avec

$$g'_2 = \frac{g_2}{b^2}, \qquad g'_3 = \frac{g_3}{a^2};$$

d'où je conclus

$$\frac{g'^3_2}{g'^2_3} = \frac{g^3_2}{g^2_3}.$$

Cela posé, soient deux domaines A et A_1 de connexion double. On aura

$$\text{pour A,} \qquad v^2 = 4u^3 - g_2 u - g_3,$$
$$\text{pour } A_1, \qquad v_1^2 = 4u_1^3 - \gamma_2 u - \gamma_3.$$

Si A_1 est représentable sur A ou sur A', ces équations pourront se déduire l'une et l'autre de $\mathcal{G}(r, s) = 0$ par une transformation birationnelle. Donc on aura

$$\frac{g^3_2}{g^2_3} = \frac{\gamma^3_2}{\gamma^2_3}.$$

35. Nous avons vu, dans ce qui précède, que la condition nécessaire et suffisante pour que deux domaines A et A_1 soient représentables l'un sur l'autre est que l'ensemble des équations caractéristiques soit le même pour les deux domaines.

Supposons cette condition remplie; alors une question se pose. De combien de manières différentes cette représentation est-elle possible?

Nous allons ramener cette question à la suivante :

Trouver les transformations du domaine A en lui-même.

Soient T et T' deux transformations du domaine A en le domaine A_1.

On a

$$T' = T'T^{-1}T = (T'T^{-1})T.$$

Or $T'T^{-1}$ est une transformation du domaine A en lui-même.

Il faut donc chercher à transformer $\mathcal{G}(r, s) = 0$ en elle-même par une transformation rationnelle à coefficients réels.

Prenons le cas où $p = 1$.

Alors r et s peuvent s'exprimer par des fonctions elliptiques d'un paramètre u (¹), $r = \varphi(u)$, $s = \psi(u)$.

Posons

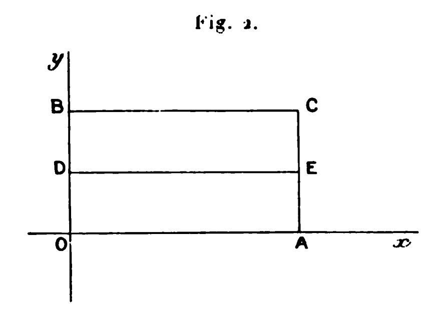
$$r_1 = \varphi(u_1), \qquad s_1 = \psi(u_1).$$

Les différentes transformations de la courbe en elle-même correspondent aux différentes relations entre u et u_1. Il faut trouver celles de ces relations pour lesquelles la transformation est birationnelle et à coefficients réels.

Appelons 2ω la période réelle, $2\omega'$ la période purement imaginaire de $\varphi(u)$ et de $\psi(u)$. A chaque système de valeurs de (r, s) correspond un point, et un seul, à l'intérieur du rectangle des périodes.

Ce rectangle OACB (*fig.* 2) est partagé en deux parties égales par la

Fig. 2.



droite DE, $(iy = \omega')$. Ces deux parties sont les champs des valeurs de u qui correspondent aux deux régions B et B′ de la surface $\mathfrak{R}$ de Riemann définie par l'équation $\mathcal{G}(r, s) = 0$.

La courbe réelle $\mathcal{G}(r, s) = 0$ est, comme on sait, composée de deux courbes séparées; l'une de ces branches correspond à la portion de droite $iy = \omega'$ comprise entre le point ω' et le point $\omega' + 2\omega$ (les points D, E); l'autre branche correspond à la portion de droite $y = 0$, comprise entre 0 et 2ω (le segment OA).

Cela posé, il est clair que la relation entre u et u_1 doit faire correspondre à un point u, intérieur au rectangle des périodes, un autre point u_1, et un seul, également intérieur au rectangle des périodes.

On a donc

$$u_1 = \frac{\alpha u + \beta}{\gamma u + \delta},$$

(¹) *Voir* le *Traité d'Analyse* de M. E. Picard, t. II, p. 504.

α, β, γ et δ étant réels, et, de plus, $\alpha\delta - \beta\gamma$ sera positif, puisque cette transformation transforme en lui-même le demi-plan nord.

De plus, cette relation doit subsister quand on y remplace u par $u+2m\omega+2m'\omega'$ (quels que soient les entiers m et m').

Donc $\gamma = 0$, $\delta = 1$; α doit être un nombre entier :

$$u_1 = \alpha u + \beta.$$

Inversement, u doit être exprimable par u_1 sous la même forme. Ceci exige

$$\alpha = \pm 1;$$

bref,

$$u_1 = \pm u + \beta.$$

Sous ces conditions, la transformation sera birationnelle en vertu du théorème d'addition.

Reste la condition relative à la réalité.

Il faut choisir β de façon que $\varphi(\beta)$ et $\psi(\beta)$ soient réelles. Ceci exige $\beta = c$ ou $\beta = c + \omega'$, c étant réel.

1° Si $\beta = c$, $u_1 = u + c$, chaque moitié du rectangle des périodes se correspond à elle-même; B correspond à B.

Si $u_1 = -u + c$, chaque moitié du rectangle correspond à l'autre; B correspond à B', B' à B.

2° Si $\beta = c + \omega'$, $u_1 = u + c + \omega'$, chaque moitié du rectangle correspond à l'autre, B correspond à B', B' à B.

Si $u_1 = -u + c + \omega'$, chaque moitié du rectangle se correspond à elle-même. B correspond à B.

36. Soit à représenter une aire doublement connexe sur l'aire ayant pour limites deux cercles concentriques dont le centre commun soit l'origine et dont les rayons sont 1 et $r < 1$.

La fonction $J(z) = -i\,\mathcal{L}\,z$ jouit des propriétés suivantes :

1° Sur le cercle extérieur L_0,

$$z = e^{i\varphi};$$

donc

$$J(z) = \varphi;$$

2° Sur le cercle intérieur L_1,

$$z = re^{i\varphi},$$

donc

$$J(z) = \varphi - i\,\mathcal{L}\,r = \varphi + i\,\mathcal{L}\left(\frac{1}{r}\right)$$

ou

$$J(z) = \varphi + \omega' \quad \text{en posant} \quad \omega' = i\,\mathcal{L}\left(\frac{1}{r}\right).$$

Considérons la fonction $p(u)$ de Weierstrass, qui admet pour périodes

$$2\omega = 2\pi$$

et

$$2\omega' = 2i\,\mathcal{L}\left(\frac{1}{r}\right).$$

La fonction $p\left[\frac{1}{i}\mathcal{L}(z)\right]$ est une fonction uniforme de z. Car, si z décrit autour de l'origine un contour fermé, $\mathcal{L}z$ augmente de $2mi\pi$, m étant un nombre entier. $p\left[\frac{1}{i}\mathcal{L}(z)\right]$ reprend la même valeur puisque, par hypothèse,

$$p(u + 2m\pi) = p(u).$$

A l'intérieur du domaine A compris entre L_0 et L_1, $p\left[\frac{1}{i}\mathcal{L}(z)\right]$ a le caractère d'une fonction entière.

Au point $z = 1$, situé sur L_0, $p\left(\frac{1}{i}\mathcal{L}z\right)$ devient infinie comme $\frac{1}{(z-1)^2}$.

Sur L_0, $p\left(\frac{\mathcal{L}z}{i}\right)$ prend des valeurs *réelles* et finies, $p(\varphi)$, sauf en $z = 1$.

Sur L_1, $p\left(\frac{\mathcal{L}z}{i}\right)$ prend des valeurs *réelles* et finies, $p(\varphi + \omega')$.

C'est donc une fonction $[K(z)]$.

Il en est de même de $p'\left(\frac{1}{i}\mathcal{L}z\right)$.

C'est une fonction uniforme de z, qui a le caractère d'une fonction entière à l'intérieur de l'aire A, qui ne devient infinie qu'au point $z = 1$ $\left[\text{comme} - \frac{2}{(z-1)^3}\right]$.

Enfin, elle prend des valeurs réelles sur L_0 et sur L_1; c'est une autre fonction $[k(z)]$.

Toute fonction $[K(z)]$ est une fonction rationnelle *à coefficients réels* de $p\left(\frac{\mathcal{L}z}{i}\right)$ et de $p'\left(\frac{\mathcal{L}z}{i}\right)$.

Si elle a des valeurs réelles et *finies* sur L_0 et sur L_1, ce sera une fonction $K(z)$.

Considérons la fonction $p\left(\frac{1}{i}\mathcal{L}z - i\alpha\right)$.

Ses infinis sont donnés par la formule

$$\frac{1}{i}\mathcal{L}z = i\alpha + 2m\pi + 2m'\omega',$$

ou, en remplaçant ω' par sa valeur, $i\mathcal{L}\frac{1}{r}$, par la formule

$$z = r^{2m'} e^{-\alpha}.$$

Choisissons pour α une valeur réelle telle que l'on ait

$$r < e^{-\alpha} < 1.$$

On aura

$$r^2 e^{-\alpha} < r^2 < r,$$

puis

$$1 < \frac{1}{r} < \frac{1}{r^2} e^{-\alpha}.$$

Donc, à l'intérieur du domaine A, $p\left(\frac{\mathcal{L}z}{i} - i\alpha\right)$ n'a qu'un infini, $z = e^{-\alpha}$.

D'ailleurs

$$p\left(\frac{\mathcal{L}z}{i} - i\alpha\right) = \left\{\frac{2\left[p\left(\frac{\mathcal{L}z}{i}\right)p(i\alpha) - \frac{1}{4}g_2\right]\left[p\left(\frac{\mathcal{L}z}{i}\right) + p(i\alpha)\right] - g_3}{2\left[p\left(\frac{\mathcal{L}z}{i}\right) - p(i\alpha)\right]^2}\right\}$$
$$+ i\left\{\frac{p'\left(\frac{\mathcal{L}z}{i}\right)\frac{p'(i\alpha)}{i}}{2\left[p\left(\frac{\mathcal{L}z}{i}\right) - p(i\alpha)\right]^2}\right\}.$$

D'autre part, puisque l'on a $r < e^{-\alpha} < 1$, j'en conclus $e^{\alpha} > 1$, puis $r^2 e^{\alpha} < r$.

Donc, $p\left(\frac{\mathcal{L}z}{i} + i\alpha\right)$ a le caractère d'une fonction entière à l'intérieur du domaine A.

Il suit de là que $p\left(\frac{\mathcal{L}z}{i} - i\alpha\right)$ est une fonction $N_2(z)$.

$p'(u)$ ayant les mêmes infinis que $p(u)$, $p'\left(\frac{\mathcal{L}z}{i} - i\alpha\right)$ est une fonction $N_3(z)$.

$$p\left(\frac{1}{i}\mathcal{L}z - i\alpha\right)p\left(\frac{1}{i}\mathcal{L}z + i\alpha\right) \quad \text{et} \quad p'\left(\frac{1}{i}\mathcal{L}z - i\alpha\right)p'\left(\frac{1}{i}\mathcal{L}z + i\alpha\right)$$

sont des fonctions $k(z)$.

Il en est de même de

$$\frac{1}{2}\,p\left(\frac{\mathcal{L}z}{i} - i\alpha\right) + \frac{1}{2}\,p\left(\frac{\mathcal{L}z}{i} + i\alpha\right),$$

de

$$\frac{1}{2i}\,p\left(\frac{\mathcal{L}z}{i} - i\alpha\right) - \frac{1}{2i}\,p\left(\frac{\mathcal{L}z}{i} + i\alpha\right),$$

de

$$\frac{1}{2}\,\wp'\left(\frac{\mathfrak{L}z}{i} - i\alpha\right) + \frac{1}{2}\,\wp'\left(\frac{\mathfrak{L}z}{i} + i\alpha\right),$$

et de

$$\frac{1}{2i}\wp'\left(\frac{\mathfrak{L}z}{i} - i\alpha\right) - \frac{1}{2i}\wp'\left(\frac{\mathfrak{L}z}{i} + i\alpha\right).$$

D'une façon générale, envisageons la fonction

$$\Phi\left(\frac{\mathfrak{L}z}{i}\right) = \frac{\sigma\left(\frac{\mathfrak{L}z}{i} - a_1\right)\sigma\left(\frac{\mathfrak{L}z}{i} - a_2\right)\cdots\sigma\left(\frac{\mathfrak{L}z}{i} - a_n\right)}{\sigma\left(\frac{\mathfrak{L}z}{i} - b_1\right)\sigma\left(\frac{\mathfrak{L}z}{i} - b_2\right)\cdots\sigma\left(\frac{\mathfrak{L}z}{i} - b_n\right)}$$

avec la condition

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n.$$

On sait qu'elle peut s'exprimer rationnellement en fonction de $\wp\left(\frac{\mathfrak{L}z}{i}\right)$ et de $\wp'\left(\frac{\mathfrak{L}z}{i}\right)$.

Donc, elle est *uniforme*.

Ses infinis sont donnés par la formule

$$\frac{1}{i}\mathfrak{L}z = b_\lambda + 2m\pi + 2m'\omega' = b_\lambda + 2m\pi + 2m'i\mathfrak{L}\frac{1}{r} \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, n)$$

ou

$$\mathfrak{L}z = i(\beta_\lambda + i\beta'_\lambda) + 2mi\pi - 2m'\mathfrak{L}\frac{1}{r} \qquad (\beta_\lambda \text{ et } \beta'_\lambda \text{ étant réels}),$$

ou, enfin, par

$$z_{m'} = r^{2m'}e^{-\beta'_\lambda}e^{i\beta_\lambda}.$$

Si, maintenant, nous définissons $\overline{\Phi}\left(\frac{\mathfrak{L}z}{i}\right)$ par la formule

$$\overline{\Phi}\left(\frac{\mathfrak{L}z}{i}\right) = \frac{\sigma\left(\frac{1}{i}\mathfrak{L}z - a'_1\right)\sigma\left(\frac{1}{i}\mathfrak{L}z - a'_2\right)\cdots\sigma\left(\frac{1}{i}\mathfrak{L}z - a'_n\right)}{\sigma\left(\frac{1}{i}\mathfrak{L}z - b'_1\right)\sigma\left(\frac{1}{i}\mathfrak{L}z - b'_2\right)\cdots\sigma\left(\frac{1}{i}\mathfrak{L}z - b'_n\right)},$$

a'_λ et b'_λ désignant les quantités imaginaires conjuguées de a_λ et de b_λ, on a

$$a'_1 + a'_2 + \ldots + a'_n = b'_1 + b'_2 + \ldots + b'_n,$$

et les infinis sont donnés par la formule

$$(z)_{m'} = r^{2m'}e^{\beta'_\lambda}e^{i\beta_\lambda}.$$

Supposons que $\mathfrak{Z}_\lambda$ ait été choisi de manière que l'on ait

$$r < e^{-\beta'_\lambda} < 1.$$

On a vu plus haut que le seul infini $z_{m'}$ inclus dans le domaine A est

$$z_0 = e^{-\beta'_\lambda} e^{i\beta_\lambda},$$

et qu'il n'y a pas d'infinis $(z)_{m'}$ dans ce même domaine.

Faisons la même hypothèse, $r < e^{-\beta'_\lambda} < 1$, pour toutes les valeurs de λ, depuis 1 jusqu'à n.

On voit que $\Phi\left(\frac{\mathfrak{L}z}{i}\right)$ se comporte à l'intérieur de A comme une fonction rationnelle, et $\overline{\Phi}\left(\frac{\mathfrak{L}z}{i}\right)$ comme une fonction entière.

Donc $\Phi\left(\frac{\mathfrak{L}z}{i}\right)$ est une fonction N(z).

Les fonctions

$$\Phi\left(\frac{1}{i}\mathfrak{L}z\right)\overline{\Phi}\left(\frac{1}{i}\mathfrak{L}z\right),$$

$$\frac{1}{2}\Phi\left(\frac{\mathfrak{L}z}{i}\right) + \frac{1}{2}\overline{\Phi}\left(\frac{\mathfrak{L}z}{i}\right)$$

et

$$\frac{1}{2i}\Phi\left(\frac{\mathfrak{L}z}{i}\right) - \frac{1}{2i}\overline{\Phi}\left(\frac{\mathfrak{L}z}{i}\right)$$

sont des fonctions K(z).

Nous pouvons ainsi former la fonction K(z) qui correspond à telle fonction rationnelle que l'on voudra, pourvu que cette fonction K(z) existe.

Ajoutons que, $p(z)$ étant la fonction rationnelle donnée, le problème de Dirichlet est, par cela même, résolu pour le domaine A considéré relativement aux fonctions réelles de x et de y

$$\tfrac{1}{2}p(z) + \tfrac{1}{2}\overline{p}(z'), \quad \frac{1}{2i}p(z) - \frac{1}{2i}\overline{p}(z').$$

37. Soit maintenant $\mathcal{A}$ un autre domaine doublement connexe.

Il existe une fonction J(z) ayant à l'intérieur de A le caractère d'une fonction entière, prenant sur la limite extérieure $\mathfrak{L}_0$ des valeurs réelles, et sur la limite intérieure $\mathfrak{L}_1$ des valeurs dont la partie imaginaire est i.

Soit 2α la période *réelle* dont augmente J(z) quand z décrit un contour fermé une seule fois dans le sens direct, ce contour fermé étant tout entier à l'intérieur de $\mathcal{A}$ et entourant la ligne $\mathfrak{L}_1$.

Alors la fonction $\frac{\pi}{\alpha}\,\mathrm{J}(z)$ admet la période 2π.

Sur $\mathcal{L}_0$, elle est réelle.

Sur $\mathcal{L}_1$, la partie imaginaire de $\frac{\pi}{\alpha}\,\mathrm{J}(z)$ est constante et égale à $\frac{i\pi}{\alpha}$.

Déterminons le rayon r du cercle L_1 considéré dans le numéro précédent par la condition $\mathcal{L}\frac{1}{r} = \frac{\pi}{\alpha}$,

$$r = e^{-\frac{\pi}{\alpha}}$$

(nous supposons $\alpha > 0$, de façon que l'on a $r < 1$).

Ceci posé, considérons la fonction

$$z = e^{\frac{i\pi}{\alpha}\mathrm{J}(z_1)}.$$

1° Quand $\mathrm{J}(z_1)$ augmente de $2m\alpha$, z demeure invariable;

2° Si z_1 parcourt $\mathcal{L}_0$, le point z parcourt la circonférence L_0, puisque la valeur absolue de z est 1.

3° Si le point z_1 parcourt $\mathcal{L}_1$, la valeur absolue de z est constante et égale à $e^{-\frac{\pi}{\alpha}} = r$.

Le point z parcourt la circonférence L_1.

A un point z_1 du domaine $\mathcal{A}$ ne correspond qu'un point z du domaine A.

Réciproquement, si le point z est donné dans le domaine A, $\mathrm{J}(z_1)$ sera connu (à un multiple de 2α près).

A la valeur $\mathrm{J}(z_1)$ ainsi déterminée ne correspondra, dans $\mathcal{A}$, qu'un point z_1.

La formule $z = e^{\frac{i\pi}{\alpha}\mathrm{J}(z_1)}$ réalise donc la représentation conforme du domaine $\mathcal{A}$ sur le domaine A où l'on a convenablement choisi la valeur de r.

Remarquons que la formule $\zeta = z e^{i\beta}$ (simple rotation autour de l'origine) nous permettra de faire se correspondre deux points quelconques choisis, soit sur les limites extérieures, L_0, $\mathcal{L}_0$, soit sur les limites intérieures, L_1, $\mathcal{L}_1$.

Au contraire, la formule $\zeta = \frac{r}{z} e^{i\beta}$ (β étant toujours réel) permettra de faire correspondre un point de $\mathcal{L}_0$ à un point de L_1, ou un point de $\mathcal{L}_1$ à un point de L_0.

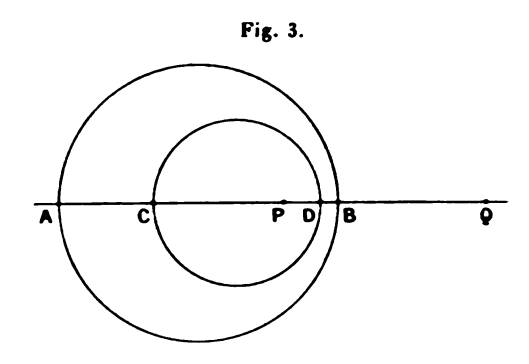
En résumé, on pourra réaliser la représentation de manière à faire se correspondre deux points quelconques pris, l'un sur la limite de A, l'autre sur la limite de $\mathcal{A}$.

38. Voici un premier exemple :

Considérons un domaine $\mathcal{A}$ (*fig.* 3) limité par deux circonférences, une exté-

rieure $\mathcal{L}_0$, l'autre intérieure $\mathcal{L}_1$. On sait qu'il existe sur la ligne des centres deux points P et Q tels que le rapport $\frac{\mathrm{RP}}{\mathrm{RQ}}$ reste constant aussi bien quand le point R

Fig. 3.



parcourt la première circonférence $\mathcal{L}_0$ que lorsqu'il parcourt $\mathcal{L}_1$. Ce sont les points doubles de l'involution déterminée par les deux couples (A, B), (C, D).

Soient g et h les deux rapports

$$g = \left|\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{AQ}}\right|, \qquad h = \left|\frac{\mathrm{CP}}{\mathrm{CQ}}\right|.$$

Soient $z = a$ la quantité imaginaire dont l'affixe est P; $z = b$ la quantité imaginaire dont l'affixe est Q.

Sur $\mathcal{L}_0$ on a

$$\left|\frac{z-a}{z-b}\right| = g;$$

sur $\mathcal{L}_1$ on a

$$\left|\frac{z-a}{z-b}\right| = h.$$

L'équation de $\mathcal{L}_0$ sera

$$\frac{z-a}{z-b} = ge^{i\varphi}$$

(φ étant une variable réelle); celle de $\mathcal{L}_1$

$$\frac{z-a}{z-b} = he^{i\varphi}.$$

Posons

$$\mathcal{L}\frac{z-a}{z-b} = i\,\mathrm{J}(z).$$

Sur $\mathcal{L}_0$,

$$i\,\mathrm{J}(z) = i\varphi + \mathcal{L}g, \qquad \mathrm{J}(z) = \varphi - i\,\mathcal{L}g;$$

sur $\mathfrak{L}_1$,

$$iJ(z) = i\varphi + \mathfrak{L}h, \qquad J(z) = \varphi - i\mathfrak{L}h.$$

Les deux points P et Q étant extérieurs au domaine $\mathfrak{A}$, la fonction $J(z)$ a bien le caractère d'une fonction entière à l'intérieur de $\mathfrak{A}$. Elle a la période 2π.

Pour représenter le domaine $\mathfrak{A}$ sur le domaine type A, posons

$$z = \frac{1}{g}\,\frac{z_1 - a}{z_1 - b}.$$

Il faudra choisir r par la formule

$$r = \frac{h}{g}.$$

39. Considérons maintenant deux ellipses homofocales.

Soient

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} = 1,$$

$$\frac{\xi^2}{a_1^2} + \frac{\eta^2}{b_1^2} = 1$$

leurs équations, avec

$$a^2 - b^2 = a_1^2 - b_1^2.$$

Posons

$$\xi = a\cos\varphi, \qquad n = b\sin\varphi,$$

$$z = \xi + i\eta = a\cos\varphi + ib\sin\varphi.$$

Soient

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}, \qquad a = c\cos(i\alpha), \qquad b = -ic\sin(i\alpha) \qquad (\alpha \text{ réel}).$$

Alors

$$z = c\cos(\varphi - i\alpha),$$

d'où

$$\varphi = i\alpha + \operatorname{arc\,cos}\left(\frac{z}{c}\right).$$

Sur $\mathfrak{L}_1$,

$$\xi = a_1\cos\varphi, \qquad \eta = b_1\sin\varphi.$$

Posons

$$a_1 = c\cos i\alpha_1, \qquad b_1 = -ic\sin(i\alpha_1) \qquad (\alpha_1 \text{ réel}).$$

Alors

$$z = c\cos(\varphi - i\alpha_1), \qquad \varphi = i\alpha_1 + \operatorname{arc\,cos}\left(\frac{z}{c}\right).$$

Ainsi, sur $\mathfrak{L}_0$,

$$i\alpha + \operatorname{arc\,cos}\left(\frac{z}{c}\right) \qquad \text{est réel.}$$

Sur $\mathcal{L}_1$,

$$i\alpha_1 + \operatorname{arc}\cos\frac{z}{c} \qquad \text{est réel.}$$

Prenons

$$J(z) = \operatorname{arc}\cos\frac{z}{c} + i\alpha = i\alpha - i\mathcal{L}\,\frac{z + \sqrt{z^2 - c^2}}{c}.$$

Sur $\mathcal{L}_0$, $J(z)$ prend des valeurs réelles.

Sur $\mathcal{L}_1$, la partie imaginaire de $J(z)$ est $i(\alpha_1 - \alpha)$.

Les points critiques $z = \pm c$, qui sont les foyers communs aux deux ellipses, sont extérieurs au domaine $\mathcal{A}$.

$J(z)$ a donc bien le caractère d'une fonction entière à l'intérieur du domaine $\mathcal{A}$. Sa période est 2π.

Pour représenter le domaine $\mathcal{A}$ sur le domaine type, on se servira de la fonction

$$z = e^{-\alpha}\,\frac{z_1 + \sqrt{z_1^2 - c}}{c}.$$

Ici,

$$r = e^{\alpha_1 - \alpha}.$$

Comme on a

$$e^{\alpha} = \frac{a + b}{c}, \qquad e^{\alpha_1} = \frac{a_1 + b_1}{c},$$

$$r = e^{\alpha_1 - \alpha} = \frac{a_1 + b_1}{a + b}.$$

De la formule précédente, on tire

$$z_1 = \frac{c}{2}\left(z e^{\alpha} + \frac{1}{z e^{\alpha}}\right).$$

RECHERCHES SUR L'HYDRODYNAMIQUE,

Par M. P. DUHEM.

DEUXIÈME PARTIE.

SUR LA PROPAGATION DES ONDES.

(SUITE ET FIN.)

CHAPITRE II.

LA MÉTHODE D'HUGONIOT.

§ 1. — Définitions diverses. Les deux lemmes d'Hugoniot.

Nous avons étudié, au Chapitre précédent, les propriétés des surfaces le long desquelles les éléments du mouvement d'un fluide, c'est-à-dire les six quantités

$$u, \quad v, \quad w, \quad \rho, \quad \Pi, \quad T,$$

sont discontinus. Dorénavant, nous supposerons que, dans la région étudiée, et pendant le laps de temps considéré, ils demeurent continus. Mais, dans cette région et pendant ce laps de temps, chacun de ces éléments peut se composer de plusieurs fonctions analytiques différentes. De là découlent divers problèmes qui seront examinés aux deux Chapitres suivants. Au présent Chapitre sera exposée la méthode propre à traiter ces problèmes.

Considérons une certaine région de l'espace et un certain laps de temps. Soient $u_1(x, y, z, t)$, $u_2(x, y, z, t)$ deux fonctions analytiques uniformes définies en tous les points (x, y, z) de cette région et à tous les instants t de ce laps de temps.

Supposons qu'à l'instant t une certaine surface S soit tracée dans la région considérée et qu'elle partage cette région en deux parties 1 et 2.

Supposons que cette surface S jouisse, à l'instant t, des propriétés suivantes :

Sur la surface S, les deux fonctions u_1, u_2 sont égales entre elles ; il en est de même de deux dérivées partielles correspondantes quelconques de ces deux

[illegible]

c'est-à-dire qu'il existe au moins une dérivée partielle du second ordre de la fonction u, qui, calculée du côté 1 sur la surface S, n'est pas égale à la dérivée partielle correspondante de la fonction u.

Une surface le long de laquelle la fonction u serait discontinue pourrait, à ce point de vue, être regardée comme une onde d'ordre 0.

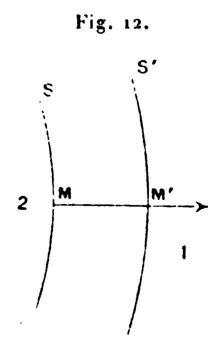
Lorsque nous mènerons à une telle surface une normale, nous la dirigerons du côté 1 vers le côté 2 et nous désignerons par α, β, γ les cosinus des angles que cette direction fait avec Ox, Oy, Oz.

Il arrivera souvent qu'aux divers instants t d'un certain laps de temps on pourra faire correspondre une surface S variable avec t et qu'à chacun de ces instants t la surface S sera une onde d'ordre n pour la fonction $u(x, y, z, t)$; on dira alors que cette surface variable avec t représente une *onde persistante*.

Soient S, S' (fig. [illegible]) les positions respectives d'une telle onde aux instants t et $t + dt$. Par un point M de la surface S, menons une normale à cette surface;

cette normale rencontre en M′ la surface S′; désignons par δ la longueur MM′,

Fig. 12.



comptée positivement si la direction MM′ va du côté 2 au côté 1, et négativement dans le cas contraire; posons enfin :

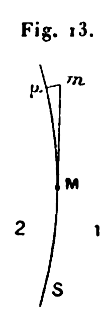
$$\delta = \mathfrak{N}\, dt.$$

$\mathfrak{N}$ sera la *vitesse normale du déplacement de l'onde.*

L'étude des ondes de divers ordres d'une fonction repose sur deux lemmes à la fois très simples et très féconds. Ces deux lemmes ont été donnés par Hugoniot qui en a tiré, touchant la Mécanique, de remarquables conséquences ([1]).

Soit M un point d'une surface S qui est, à l'instant t, pour la fonction u, une

Fig. 13.



onde du premier ordre (*fig.* 13). Soient a, b, c trois quantités finies assujetties seulement à la relation

$$a\alpha + b\beta + c\gamma = 0 \tag{95}$$

et ε une quantité infiniment petite. Par le point M, menons un segment Mm dont

([1]) HUGONIOT, *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 4ᵉ série, t. III, 1887, p. 477.

les composantes soient εa, εb, εc; ce segment sera tangent en M à la surface S.

Les deux fonctions u_1, u_2 étant analytiques dans la partie de l'espace que l'on considère, on peut écrire

$$\frac{u_1(\mathrm{M}) - u_1(m)}{\varepsilon} = \frac{\partial u_1}{\partial x} a + \frac{\partial u_1}{\partial y} b + \frac{\partial u_1}{\partial z} c + \varepsilon \theta_1,$$

$$\frac{u_2(\mathrm{M}) - u_2(m)}{\varepsilon} = \frac{\partial u_2}{\partial x} a + \frac{\partial u_2}{\partial y} b + \frac{\partial u_2}{\partial z} c + \varepsilon \theta_2,$$

les dérivées partielles du second membre se rapportant au point M et les quantités θ_1, θ_2 demeurant finies lorsque ε tend vers o.

Retranchons ces égalités membre à membre en observant que

$$u_1(\mathrm{M}) = u_2(\mathrm{M});$$

nous trouvons l'égalité

$$(96) \qquad \frac{u_1(m) - u_2(m)}{\varepsilon} + \varepsilon(\theta_1 - \theta_2)$$
$$= \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial x}\right) a + \left(\frac{\partial u_2}{\partial y} - \frac{\partial u_1}{\partial y}\right) b + \left(\frac{\partial u_2}{\partial z} - \frac{\partial u_1}{\partial z}\right) c.$$

Projetons normalement le point M en μ sur la surface S; *si la courbure de la surface* S *au point* M' *n'est pas infiniment grande,* la distance $m\mu$ est un infiniment petit du second ordre par rapport à ε. Alors les fonctions u_1, u_2 étant analytiques, on peut écrire

$$u_1(m) = u_1(\mu) + \varepsilon^2 \varphi_1,$$
$$u_2(m) = u_2(\mu) + \varepsilon^2 \varphi_2,$$

φ_1, φ_2 demeurant finis lorsque ε tend vers o.

Si l'on observe en outre que

$$u_1(\mu) = u_2(\mu),$$

on voit que la relation (96) devient

$$\varepsilon(\varphi_1 - \varphi_2 + \theta_1 - \theta_2) = \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial x}\right) a + \left(\frac{\partial u_2}{\partial y} - \frac{\partial u_1}{\partial y}\right) b + \left(\frac{\partial u_2}{\partial z} - \frac{\partial u_1}{\partial z}\right) c.$$

Le premier membre tend vers o avec ε; le second ne dépend pas de ε; il doit

donc être nul. L'égalité

$$\left(\frac{\partial u_2}{\partial x}-\frac{\partial u_1}{\partial x}\right)a+\left(\frac{\partial u_2}{\partial y}-\frac{\partial u_1}{\partial y}\right)b+\left(\frac{\partial u_2}{\partial z}-\frac{\partial u_1}{\partial z}\right)c=0$$

est donc une conséquence de l'égalité (95).

Pour cela, il faut et il suffit qu'il existe une grandeur l telle que l'on ait, quels que soient a, b, c, l'égalité

$$\left(\frac{\partial u_2}{\partial x}-\frac{\partial u_1}{\partial x}-\alpha l\right)a+\left(\frac{\partial u_2}{\partial y}-\frac{\partial u_1}{\partial y}-\beta l\right)b+\left(\frac{\partial u_2}{\partial z}-\frac{\partial u_1}{\partial z}-\gamma l\right)c=0.$$

D'où la proposition suivante, qui est le PREMIER LEMME D'HUGONIOT :

Soit S *une surface qui est, à l'instant* t, ONDE DU PREMIER ORDRE *pour la fonction* u. *A chaque point de cette surface où la courbure n'est pas infinie correspond une grandeur* l *telle que*

$$(97)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u_2}{\partial x}-\dfrac{\partial u_1}{\partial x}=\alpha l,\\[2mm] \dfrac{\partial u_2}{\partial y}-\dfrac{\partial u_1}{\partial y}=\beta l,\\[2mm] \dfrac{\partial u_2}{\partial z}-\dfrac{\partial u_1}{\partial z}=\gamma l. \end{cases}$$

Supposons maintenant que la surface S soit, pour la fonction u, une *onde du premier ordre persistante;* soient S sa position à l'instant t et S' sa position à un instant t', voisin de t. Par un point M de la surface S menons une normale à cette surface; cette normale rencontre en M' la surface S'. Si les coordonnées du point M sont x, y, z et si les coordonnées du point M' sont x', y', z', on a, par définition de la vitesse $\mathfrak{N}$,

$$\begin{aligned} \frac{x'-x}{t'-t}&=\mathfrak{N}\alpha+\varphi(t'-t),\\ \frac{y'-y}{t'-t}&=\mathfrak{N}\beta+\psi(t'-t),\\ \frac{z'-z}{t'-t}&=\mathfrak{N}\gamma+\chi(t'-t), \end{aligned}$$

les quantités φ, ψ, χ demeurant finies lorsque $(t'-t)$ tend vers 0.

D'autre part, la fonction u_1 étant analytique, on aura

$$\frac{u_1(\mathrm{M}',t')-u_1(\mathrm{M},t)}{t'-t}=\frac{\partial u_1}{\partial t}+\frac{\partial u_1}{\partial x}\frac{x'-x}{t'-t}+\frac{\partial u_1}{\partial y}\frac{y'-y}{t'-t}+\frac{\partial u_1}{\partial z}\frac{z'-z}{t'-t}+\theta_1(t'-t),$$

θ_1 ne croissant pas au delà de toute limite lorsque $(t'-t)$ tend vers 0, et les dérivées partielles se rapportant au point M et à l'instant t.

Ces diverses égalités permettent d'écrire

$$\frac{u_1(M', t') - u_1(M, t)}{t' - t} = \frac{\partial u_1}{\partial t} + \left(\frac{\partial u_1}{\partial x}\alpha + \frac{\partial u_1}{\partial y}\beta + \frac{\partial u_1}{\partial z}\gamma\right)\mathcal{N} + \eta_1(t' - t),$$

η_1 ne croissant pas au delà de toute limite lorsque $(t' - t)$ tend vers o.

On a de même

$$\frac{u_2(M', t') - u_2(M, t)}{t' - t} = \frac{\partial u_2}{\partial t} + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x}\alpha + \frac{\partial u_2}{\partial y}\beta + \frac{\partial u_2}{\partial z}\gamma\right)\mathcal{N} + \eta_2(t' - t),$$

η_2 ne croissant pas au delà de toute limite lorsque $(t' - t)$ tend vers o.

Retranchons membre à membre ces deux égalités, en observant que

$$u_1(M, t) = u_2(M, t), \qquad u_1(M', t') = u_2(M', t')$$

et en tenant compte des égalités (97). Nous trouvons

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} - \frac{\partial u_1}{\partial t} + \mathcal{N} l = (\eta_1 - \eta_2)(t' - t).$$

Le second membre de cette égalité tend vers o avec $(t' - t)$; le premier, qui ne dépend pas de $(t' - t)$, doit être nul; d'où le DEUXIÈME LEMME D'HUGONIOT :

Soit une fonction u qui admet une ONDE PERSISTANTE DU PREMIER ORDRE; *à chaque instant et en tout point de l'onde relative à cet instant, pourvu qu'en ce point la courbure de l'onde ne soit pas infiniment grande, on a l'égalité*

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} - \frac{\partial u_1}{\partial t} + \mathcal{N} l = 0. \tag{98}$$

On observera que les deux lemmes précédents demeureraient vrais au cas où les trois variables x, y, z seraient remplacées par un nombre quelconque de variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

§ 2. — EXPRESSION DE LA VITESSE DE DÉPLACEMENT $\mathcal{N}$ POUR LES ONDES DE DIVERS ORDRES [1].

Les lemmes précédents suffisent à résoudre le problème suivant :

Une fonction u admet une onde persistante d'ordre n; au moyen des déri-

---

[1] *Sur le théorème d'Hugoniot et quelques théorèmes analogues* (*Comptes rendus*, t. CXXXI, 24 décembre 1900, p. 1171).

vées partielles d'ordre n des fonctions u_1, u_2, former une expression de la vitesse de déplacement $\mathfrak{N}$ qui demeure invariable par un changement de coordonnées rectangulaires.

1° *Onde du premier ordre.* — Les égalités (97) et (98) donnent les trois relations

$$(99)\quad \left\{\begin{aligned} &\mathfrak{N}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial x}\right) = -\left(\frac{\partial u_2}{\partial t} - \frac{\partial u_1}{\partial t}\right)\alpha, \\ &\mathfrak{N}\left(\frac{\partial u_2}{\partial y} - \frac{\partial u_1}{\partial y}\right) = -\left(\frac{\partial u_2}{\partial t} - \frac{\partial u_1}{\partial t}\right)\beta, \\ &\mathfrak{N}\left(\frac{\partial u_2}{\partial z} - \frac{\partial u_1}{\partial z}\right) = -\left(\frac{\partial u_2}{\partial t} - \frac{\partial u_1}{\partial t}\right)\gamma. \end{aligned}\right.$$

Élevons au carré les deux membres de chacune de ces égalités et ajoutons membre à membre les résultats obtenus; nous trouvons la formule

$$(100)\quad \mathfrak{N}^2\left\{\left[\frac{\partial(u_2-u_1)}{\partial x}\right]^2 + \left[\frac{\partial(u_2-u_1)}{\partial y}\right]^2 + \left[\frac{\partial(u_2-u_1)}{\partial z}\right]^2\right\} = \left[\frac{\partial(u_2-u_1)}{\partial t}\right]^2$$

qui résout, pour les ondes du premier ordre, la question posée.

2° *Onde du second ordre.* — Une telle onde est onde du premier ordre pour la fonction $\frac{\partial u}{\partial x}$ et aussi pour la fonction $\frac{\partial u}{\partial t}$; à chacune de ces deux fonctions appliquons la première des égalités (99); nous trouvons les deux égalités

$$\mathfrak{N}\frac{\partial^2(u_2-u_1)}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2(u_2-u_1)}{\partial x\,\partial t}\alpha,$$

$$\mathfrak{N}\frac{\partial^2(u_2-u_1)}{\partial x\,\partial t} = -\frac{\partial^2(u_2-u_1)}{\partial t^2}\alpha.$$

Multipliées membre à membre, elles donnent la première des égalités

$$\mathfrak{N}^2\frac{\partial^2(u_2-u_1)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2(u_2-u_1)}{\partial t^2}\alpha^2.$$

$$\mathfrak{N}^2\frac{\partial^2(u_2-u_1)}{\partial y^2} = \frac{\partial^2(u_2-u_1)}{\partial t^2}\beta^2,$$

$$\mathfrak{N}^2\frac{\partial^2(u_2-u_1)}{\partial z^2} = \frac{\partial^2(u_2-u_1)}{\partial t^2}\gamma^2.$$

Les deux autres se démontrent d'une manière analogue.

En ajoutant membre à membre ces égalités, nous trouvons la relation

$$\mathfrak{N}^2 \Delta(u_2 - u_1) = \frac{\partial^2 (u_2 - u_1)}{\partial t^2}, \tag{101}$$

qui résout, pour les ondes du second ordre, le problème posé.

Cette relation est due à Hugoniot (¹).

3° *Onde d'ordre pair : $n = 2q$.* — Désignons par Δ_q le résultat de l'opération Δ répétée q fois de suite. Nous allons prouver que l'on a

$$\mathfrak{N}^n \Delta_q(u_2 - u_1) = \frac{\partial^n (u_2 - u_1)}{\partial t^n}. \tag{102}$$

L'égalité (101) nous montre que cette formule est exacte lorsqu'on fait $q = 1$ et, partant, $n = 2$; pour en établir la généralité, il nous suffit de prouver que, si elle est vraie jusqu'à une certaine valeur de q et, partant, de n, elle demeure encore vraie lorsqu'on augmente q d'une unité et, partant, n de deux unités.

En d'autres termes, il s'agit de prouver que si la formule (102) est exacte pour toutes les ondes d'ordre pair jusqu'à l'ordre $n = 2q$, on a, pour toute onde d'ordre $(n + 2)$,

$$\mathfrak{N}^{n+2} \Delta_{q+1}(u_2 - u_1) = \frac{\partial^{n+2} (u_2 - u_1)}{\partial t^{n+2}}. \tag{102 bis}$$

Une onde d'ordre $(n + 2)$ pour la fonction u est une onde d'ordre 2 pour la fonction $\Delta_q u$; on a donc, selon la formule (101),

$$\mathfrak{N}^2 \Delta_{q+1}(u_2 - u_1) = \frac{\partial^2 \Delta_q (u_2 - u_1)}{\partial t^2}.$$

Une onde d'ordre $(n + 2)$ pour la fonction u est une onde d'ordre n pour la fonction $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$; on a donc, selon la formule (102),

$$\mathfrak{N}^n \Delta_q \frac{\partial^2 (u_2 - u_1)}{\partial t^2} = \frac{\partial^{n+2} (u_2 - u_1)}{\partial t^{n+2}}.$$

Enfin

$$\frac{\partial^2 \Delta_q (u_2 - u_1)}{\partial t^2} = \Delta_q \frac{\partial^2 (u_2 - u_1)}{\partial t^2}.$$

Ces trois égalités justifient l'égalité (102 *bis*).

(¹) HUGONIOT, *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 4ᵉ série, t. III, 1887, p. 477.

4° *Onde d'ordre impair :* $n = 2q + 1$. — Une onde d'ordre $(2q+1)$ pour la fonction u est du premier ordre pour la fonction $\Delta_q u$; on a donc, selon la formule (100),

$$\mathfrak{N}^2 \left\{ \left[\frac{\partial \Delta_q(u_2 - u_1)}{\partial x} \right]^2 + \left[\frac{\partial \Delta_q(u_2 - u_1)}{\partial y} \right]^2 + \left[\frac{\partial \Delta_q(u_2 - u_1)}{\partial z} \right]^2 \right\} = \left[\frac{\partial \Delta_q(u_2 - u_1)}{\partial t} \right]^2.$$

Cette onde est en même temps d'ordre $2q$ par rapport à la fonction $\frac{\partial u}{\partial t}$, en sorte que la formule (102) donne

$$\mathfrak{N}^{2q} \Delta_q \frac{\partial (u_2 - u_1)}{\partial t} = \frac{\partial^n (u_2 - u_1)}{\partial t^n}.$$

Enfin

$$\frac{\partial \Delta_q(u_2 - u_1)}{\partial t} = \Delta_q \frac{\partial (u_2 - u_1)}{\partial t}.$$

Ces trois égalités nous donnent la formule

$$\text{(103)} \quad \mathfrak{N}^{2n} \left\{ \left[\frac{\partial \Delta_q(u_2 - u_1)}{\partial x} \right]^2 + \left[\frac{\partial \Delta_q(u_2 - u_1)}{\partial y} \right]^2 + \left[\frac{\partial \Delta_q(u_2 - u_1)}{\partial z} \right]^2 \right\} = \left[\frac{\partial^n (u_2 - u_1)}{\partial t^n} \right]^2$$

qui achève de résoudre le problème posé.

On voit de suite que ces formules conduiraient presque immédiatement à la solution du problème suivant, que nous nous bornerons à énoncer :

Donner de la vitesse $\mathfrak{N}$, pour les ondes de divers ordres, une expression qui ne varie pas par un changement quelconque de coordonnées curvilignes orthogonales.

§ 3. — Applications diverses de la méthode d'Hugoniot.

Avant d'appliquer la méthode d'Hugoniot aux questions d'Hydrodynamique faisons usage des formules précédentes pour étudier diverses équations aux dérivées partielles que l'on rencontre en Physique mathématique.

La première que nous considérerons, avec Hugoniot [1], est l'équation

$$\text{(104)} \quad a^2 \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

(1) Hugoniot, *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 4e série, t. III, 1887, p. 477.

où a est une constante réelle, que l'on rencontre dans l'étude des petits mouvements des fluides; la comparaison des égalités (101) et (104) montre de suite que si une intégrale de cette équation offre une onde du second ordre, cette onde se déplace avec une vitesse

$$\mathfrak{N} = \pm a. \tag{105}$$

Ce résultat s'étend d'ailleurs à toutes les ondes d'ordre supérieur à 2 que pourrait présenter une intégrale de l'équation (104). En effet, une onde d'ordre n ($n > 2$) pour la fonction u est du deuxième ordre pour la fonction $\frac{\partial^{n-2} u}{\partial t^{n-2}}$; et, d'autre part, cette fonction vérifie encore une équation de la forme (104), comme on le voit en différentiant $(n-2)$ fois par rapport à t les deux membres de l'équation (104).

Des considérations semblables [1] s'appliquent à l'*équation des télégraphistes :*

$$a^2 \Delta u - \mu \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \tag{106}$$

où a et μ sont deux constantes réelles. En tout point d'une onde du second ordre pour la fonction u, on a

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = \frac{\partial u_2}{\partial t},$$

en sorte que l'équation (106) exige que l'on ait, en un tel point,

$$a^2 \Delta(u_2 - u_1) = \frac{\partial^2(u_2 - u_1)}{\partial t^2}.$$

La comparaison de cette égalité avec l'égalité (101) montre que la vitesse de déplacement d'une onde du second ordre pour une intégrale de l'équation (106) est encore donnée par l'égalité (105).

Comme dans le cas précédent, ce résultat s'étend aux ondes d'ordre supérieur à 2.

Il peut arriver que les formules du § 2 conduisent à attribuer à $\mathfrak{N}^2$, pour les ondes d'un certain ordre, une valeur infinie ou négative; dans ce cas, nous sommes certains qu'une intégrale de l'équation considérée n'admet pas d'onde persistante de l'ordre considéré.

---

[1] *Sur l'interprétation théorique des expériences hertziennes* (*L'Éclairage électrique*, t. IV, 1895, p. 494).

Ainsi, en tout point d'une onde du second ordre pour la fonction u, on a

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = \frac{\partial u_2}{\partial t};$$

une intégrale de l'équation

$$\Delta u = \mu \frac{\partial u}{\partial t}, \tag{107}$$

que l'on rencontre dans la théorie de la conductibilité, ne pourrait donc admettre une onde du second ordre sans que l'on eût, en tous les points de cette onde,

$$\Delta(u_2 - u_1) = 0,$$

partant, selon l'égalité (101),

$$\mathfrak{N}^2 = \infty.$$

Une intégrale de l'équation

$$a^2 \Delta u + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \tag{108}$$

ne pourrait admettre une onde du second ordre sans que l'on eût, en vertu de l'égalité (101),

$$\mathfrak{N}^2 = -a^2.$$

Les intégrales des deux équations (107), (108) ne sauraient donc admettre d'onde persistante du second ordre; cette proposition s'étend sans peine aux ondes d'ordre supérieur à 2 et fournit le théorème suivant :

Si, de part et d'autre d'une surface S *qui peut varier avec* t, *deux fonctions analytiques* u_1, u_2 *vérifient soit l'équation* (107), *soit l'équation* (108), *et si l'on a, en tout point de la surface* S *et à tout instant,*

$$u_1 = u_2,$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} = \frac{\partial u_2}{\partial x}, \qquad \frac{\partial u_1}{\partial y} = \frac{\partial u_2}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u_1}{\partial z} = \frac{\partial u_2}{\partial z}, \qquad \frac{\partial u_1}{\partial t} = \frac{\partial u_2}{\partial t},$$

les deux fonctions u_1, u_2 *se prolongent analytiquement l'une l'autre.*

L'équation

$$a^2 \frac{\partial}{\partial t} \Delta u - \mu \Delta u - \mu' \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \tag{109}$$

se rencontre dans l'étude de la propagation de l'électricité au sein des corps con-

ducteurs [1] et dans l'étude des petits mouvements des fluides compressibles visqueux [2]. Imaginons qu'une intégrale de cette équation admette une onde du troisième ordre. Nous aurons, en tout point de cette onde,

$$\Delta(u_2 - u_1) = 0, \qquad \frac{\partial^2(u_2 - u_1)}{\partial t^2} = 0,$$

partant

$$\Delta \frac{\partial(u_2 - u_1)}{\partial t} = 0.$$

D'autre part, cette onde du troisième ordre pour la fonction u serait du premier ordre pour la fonction Δu; si elle était persistante, on aurait, en vertu des égalités (97) et (98),

$$\mathfrak{N} \frac{\partial}{\partial x} \Delta(u_2 - u_1) = -\alpha \frac{\partial}{\partial t} \Delta(u_2 - u_1) = -\alpha \Delta \frac{\partial(u_2 - u_1)}{\partial t}$$

et, partant,

$$\mathfrak{N} = 0.$$

Une intégrale de l'équation (109) ne peut donc admettre d'onde persistante du troisième ordre [3], ni, comme on le prouverait sans peine, d'onde persistante d'ordre plus élevé, à moins que cette onde ne soit immobile.

Une intégrale de l'équation de Laplace

$$\Delta u = 0, \tag{110}$$

où u est une fonction des seules variables x, y, z, à l'exclusion de t, peut-elle admettre une onde du second ordre? Appliquée immédiatement, l'égalité (101) devient une identité; mais on peut remarquer que les théorèmes précédents sont encore vrais si, au lieu des trois variables x, y, z, la fonction étudiée ne dépend que de deux variables x, y; qu'en remplaçant dans l'équation précédente la lettre z par la lettre t, elle devient

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

---

(1) *Sur l'interprétation théorique des expériences hertziennes* (*L'Éclairage électrique*, t. IV, 1895, p. 494).

(2) *Sur la généralisation d'un théorème de Clebsch* (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 5e série, t. VI, 1900, p. 213).

(3) *Sur la théorie électrodynamique de Helmholtz et la théorie électromagnétique de la lumière* (*Archives néerlandaises des Sciences exactes et naturelles*, 2e série, t. V, 1901, p. 227).

et que, si une intégrale de cette équation admettait une onde persistante du second ordre, la formule (101) donnerait, pour cette onde,

$$\mathcal{N}^2 = -1,$$

ce qui est impossible.

Le même procédé conduit, sans aucune difficulté, à la démonstration de la proposition suivante :

Une intégrale de l'équation aux dérivées partielles d'ordre $2n$

$$\Delta_n u + A\frac{\partial^{2n-1} u}{\partial x^{2n-1}} + B\frac{\partial^{2n-1} u}{\partial x^{2n-2}\partial y} + \ldots + Lu = 0, \tag{111}$$

où A, B, ..., L *sont des fonctions des seules variables* x, y, z, *analytiques dans tout l'espace, et où* u *est une fonction des seules variables* x, y, z, *n'admet ni onde d'ordre* n, *ni onde d'ordre supérieur à* n.

Ce théorème entraîne l'impossibilité d'ondes dont l'ordre serait égal ou supérieur à 2 non seulement pour les intégrales de l'équation de Laplace, mais encore pour les intégrales de l'équation

$$\Delta u + k^2 u = 0, \tag{112}$$

que l'on rencontre dans l'étude des mouvements vibratoires des fluides et dans une foule de questions d'Acoustique, d'Optique ou d'Électrodynamique.

Il démontre l'impossibilité d'ondes d'ordre égal ou supérieur à 4 pour les intégrales de l'équation

$$\Delta\Delta u = 0, \tag{113}$$

que l'on rencontre dans l'étude des corps élastiques isotropes en équilibre.

§ 4. — Les paramètres de M. Hadamard.

Les deux lemmes d'Hugoniot, énoncés et démontrés au § 1, peuvent être étendus aux ondes d'ordre n sous une forme très remarquable qui a été indiquée par M. Hadamard [1].

Supposons que la surface S soit, à l'instant t, onde d'ordre n pour la fonction u; elle est évidemment onde d'ordre 1 pour la fonction $\frac{\partial^{(n-1)} u}{\partial x^a \partial y^b \partial z^c \partial t^p}$, où

$$a + b + c = n - p - 1.$$

[1] J. Hadamard, *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XXX, p. 50, 19 décembre 1900.

A cette fonction appliquons le premier terme d'Hugoniot, qu'expriment les égalités (97); nous aurons les égalités

$$\frac{\dfrac{\partial^n(u_2-u_1)}{\partial x^{a+1}\,\partial y^b\,\partial z^c\,\partial t^p}}{\alpha}=\frac{\dfrac{\partial^n(u_2-u_1)}{\partial x^a\,\partial y^{b+1}\,\partial z^c\,\partial t^p}}{\beta}=\frac{\dfrac{\partial^n(u_2-u_1)}{\partial x^a\,\partial y^b\,\partial z^{c+1}\,\partial t^p}}{\gamma}$$

que l'on peut encore écrire

$$\frac{\dfrac{\partial^n(u_2-u_1)}{\partial x^{a+1}\,\partial y^b\,\partial z^c\,\partial t^p}}{\alpha^{a+1}\beta^b\gamma^c}=\frac{\dfrac{\partial^n(u_2-u_1)}{\partial x^a\,\partial y^{b+1}\,\partial z^c\,\partial t^p}}{\alpha^a\beta^{b+1}\gamma^c}=\frac{\dfrac{\partial^n(u_2-u_1)}{\partial x^a\,\partial y^b\,\partial z^{c+1}\,\partial t^p}}{\alpha^a\beta^b\gamma^{c+1}}.$$

Le rapport

$$\frac{\dfrac{\partial^n(u_2-u_1)}{\partial x^{a+1}\,\partial y^b\,\partial z^c\,\partial t^p}}{\alpha^{a+1}\beta^b\gamma^c}$$

prend donc, en un point donné de l'onde, une valeur qui ne change pas lorsqu'au numérateur on remplace une dérivation par rapport à x par une dérivation par rapport à y ou par une dérivation par rapport à z, pourvu qu'en même temps, au dénominateur, on remplace un facteur α par un facteur β ou par un facteur γ.

Cela posé, considérons la fonction

$$\frac{\partial^n(u_2-u_1)}{\partial x^i\,\partial y^j\,\partial z^k\,\partial t^p},$$

où i, j, k ont des valeurs entières et non négatives qui vérifient la relation

$$i+j+k=n-p. \tag{114}$$

Cette fonction peut se déduire de la fonction

$$\frac{\partial^n(u_2-u_1)}{\partial x^{n-p}\,\partial t^p}$$

en remplaçant j fois de suite une différentiation par rapport à x par une différentiation par rapport à y et k fois de suite une différentiation par rapport à x par une différentiation par rapport à z.

Nous arrivons ainsi, au théorème suivant :

Premier lemme de M. Hadamard. — *Si la fonction u admet à l'instant t la surface* S *pour onde d'ordre n, en chaque point de cette onde le rapport*

$$\frac{\dfrac{\partial^n(u_2-u_1)}{\partial x^i\,\partial y^j\,\partial z^k\,\partial t^p}}{\alpha^i\beta^j\gamma^k},$$

où les indices i, j, k peuvent prendre toutes les valeurs entières et non négatives qui vérifient l'égalité

$$i+j+k=n-p,$$

a une valeur l_p qui dépend de p, mais point de i, j, k.

Ce lemme peut donc encore s'énoncer de la manière suivante :

A chaque point de la surface S *correspondent* $(n+1)$ *paramètres*

$$l_0,\quad l_1,\quad \ldots,\quad l_n,$$

au moyen desquels toutes les dérivées partielles d'ordre de la différence (u_2-u_1) *s'expriment, en ce point, par les formules*

$$(115)\quad \left\{\begin{array}{l}
\dfrac{\partial^n(u_2-u_1)}{\partial x^i\,\partial y^j\,\partial z^k}=\alpha^i\beta^j\gamma^k l_0 \qquad (i+j+k=n),\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\dfrac{\partial^n(u_2-u_1)}{\partial x^i\,\partial y^j\,\partial z^k\,\partial t^p}=\alpha^i\beta^j\gamma^k l_p \qquad (i+j+k=n-p),\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\dfrac{\partial^n(u_2-u_1)}{\partial x\,\partial t^{n-1}}=\alpha l_{n-1},\qquad \dfrac{\partial^n(u_2-u_1)}{\partial y\,\partial t^{n-1}}=\beta l_{n-1},\qquad \dfrac{\partial^n(u_2-u_1)}{\partial z\,\partial t^{n-1}}=\gamma l_{n-1},\\
\qquad\qquad\qquad\qquad \dfrac{\partial^n(u_2-u_1)}{\partial t^n}=l_n.
\end{array}\right.$$

Supposons maintenant que la surface S soit, pour la fonction u, une onde *persistante* d'ordre n. Prenons un point sur cette surface; en ce point, les trois quantités α, β, γ, ne peuvent être nulles à la fois; pour fixer les idées, supposons α différent de o.

L'onde considérée est une onde persistante du premier ordre pour la fonction

$$\frac{\partial^{n-1}u}{\partial x^{n-p-1}\,\partial t^p}.$$

A cette fonction appliquons la seconde égalité (99), qui découle du second lemme d'Hugoniot; nous trouvons

$$(116)\qquad \mathfrak{N}\frac{\partial^n(u_2-u_1)}{\partial x^{n-p}\,\partial t^p}+\alpha\frac{\partial^n(u_2-u_1)}{\partial x^{n-p-1}\,\partial t^{p+1}}=0.$$

Mais les égalités (115) donnent

$$\frac{\partial^n(u_2-u_1)}{\partial x^{n-p}\,\partial t^p}=\alpha^{n-p}l_p,$$

$$\frac{\partial^n(u_2-u_1)}{\partial x^{n-p-1}\,\partial t^{p+1}}=\alpha^{n-p-1}l_{p+1}.$$

Moyennant ces égalités, et après suppression du facteur α^{n-p} qui n'est pas nul, l'égalité (116) prend la forme

$$l_{p+1} + \mathfrak{N} l_p = 0 \tag{117}$$

qui entraîne la proposition suivante :

Second lemme de M. Hadamard. — *Si la surface S est, pour la fonction u, une onde persistante d'ordre n, les $(n+1)$ paramètres*

$$l_0, \quad l_1, \quad \ldots, \quad l_n$$

forment, en chaque point de cette onde et à chaque instant, une progression géométrique de raison — $\mathfrak{N}$.

On peut donner (¹) des paramètres

$$l_0, \quad l_1, \quad \ldots, \quad l_n$$

des expressions, formées au moyen des dérivées partielles d'ordre n de la différence $(u_2 - u_1)$, expressions qui ne changent pas par un changement quelconque de coordonnées rectangulaires.

Deux cas sont à distinguer :

Premier cas : *$(n-p)$ est pair,*

$$n - p = 2q. \tag{118}$$

Visiblement, nous avons, pour une fonction f quelconque,

$$\Delta_q f = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right)^{(q)},$$

la puissance qui figure au second membre étant une puissance symbolique. Il en résulte que

$$\Delta_q \frac{\partial^p (u_2 - u_1)}{\partial t^p} = \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{\partial^p (u_2 - u_1)}{\partial t^p} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\frac{\partial^p (u_2 - u_1)}{\partial t^p} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\frac{\partial^p (u_2 - u_1)}{\partial t^p}\right]^{(q)}.$$

Les égalités (115) transforment sans peine cette égalité en

$$\Delta_q \frac{\partial^p (u_2 - u_1)}{\partial t^p} = (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)^q l_p$$

(¹) *Sur les théorèmes d'Hugoniot, les lemmes de M. Hadamard et la propagation des ondes dans les fluides visqueux* (*Comptes rendus*, t. CXXXII, 13 mai 1901, p. 1163).

ou bien, comme $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$, en

$$l_p=\frac{\partial^p}{\partial t^p}\Delta_q(u_2-u_1), \tag{119}$$

formule qui résout la question proposée.

Deuxième cas : *$(n-p)$ est impair,*

$$n-p=2q+1. \tag{120}$$

Dans ce cas, on a

$$\begin{aligned}\Delta_q &\frac{\partial^{p+1}(u_2-u_1)}{\partial x\,\partial t^p}\\ &=\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{\partial^{p+1}(u_2-u_1)}{\partial x\,\partial t^p}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\frac{\partial^{p+1}(u_2-u_1)}{\partial y\,\partial t^p}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\frac{\partial^{p+1}(u_2-u_1)}{\partial z\,\partial t^p}\right]^{(q)}.\end{aligned}$$

Selon les égalités (115), cette égalité devient

$$\Delta_q\frac{\partial^{p+1}(u_2-u_1)}{\partial x\,\partial t^p}=\alpha(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)^q\,l_p$$

et donne la première des égalités

$$\begin{aligned}\alpha\,l_p&=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^p\Delta_q(u_2-u_1)}{\partial t^p},\\ \beta\,l_p&=\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial^p\Delta_q(u_2-u_1)}{\partial t^p},\\ \gamma\,l_p&=\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial^p\Delta_q(u_2-u_1)}{\partial t^p}.\end{aligned}$$

Les deux autres se démontrent d'une manière analogue.

Si l'on élève au carré ces trois égalités et qu'on ajoute membre à membre les résultats obtenus, on trouve la formule

$$l_p^2=\left[\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^p\Delta_q(u_2-u_1)}{\partial t^p}\right]^2+\left[\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial^p\Delta_q(u_2-u_1)}{\partial t^p}\right]^2+\left[\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial^p\Delta_q(u_2-u_1)}{\partial t^p}\right]^2 \tag{121}$$

qui résout la question posée.

L'égalité (117) nous permet d'écrire, en vertu de la dernière égalité (115),

$$(-\mathfrak{N})^{n-p}\,l_p=\frac{\partial^n(u_2-u_1)}{\partial t^n}. \tag{122}$$

Si $(n-p)$ est pair,

$$n-p=2q, \tag{118}$$

les égalités (119) et (122) donnent la relation

$$(123) \qquad \mathcal{K}^{n-p} \frac{\partial^p}{\partial t^p} \Delta_q(u_2 - u_1) = \frac{\partial^n (u_2 - u_1)}{\partial t^n}.$$

Si $(n-p)$ *est impair*,

$$(120) \qquad n - p = 2q + 1,$$

les égalités (121) et (122) donnent

$$(124) \qquad \mathcal{K}^{2(n-p)} \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^p \Delta_q(u_2 - u_1)}{\partial t^p}\right]^2 + \left[\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial^p \Delta_q(u_2 - u_1)}{\partial t^p}\right]^2 + \left[\frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial^p \Delta_q(u_2 - u_1)}{\partial t^p}\right]^2 \right\} = \left[\frac{\partial^n (u_2 - u_1)}{\partial t^n}\right]^2.$$

Ces égalités (123) et (124) redonnent immédiatement les formules démontrées au § 2. En effet, si n est pair, l'égalité (118) est vérifiée lorsqu'on y fait $p = 0$, et l'égalité (123) reproduit l'égalité (102); si n est impair, l'égalité (120) est vérifiée lorsqu'on y fait $p = 0$, et l'égalité (124) reproduit l'égalité (103).

§ 3. — Onde qui propage un vecteur. — Vecteurs de M. Hadamard.

Supposons que les trois fonctions

$$u(x, y, z, t), \quad v(x, y, z, t), \quad w(x, y, z, t)$$

soient les trois composantes d'un vecteur V. Si la surface S est, à l'instant t, onde d'ordre n pour l'une au moins des trois fonctions u, v, w et si, pour les deux autres, elle est onde d'ordre n ou d'ordre supérieur à n, ou enfin d'ordre infini, cas auquel elle n'interrompt pas le caractère analytique de ces deux fonctions, on dit que *la surface* S *est, à l'instant* t, *onde d'ordre* n *pour le vecteur* V.

La notion de *permanence* de l'onde s'étend sans peine à ce cas.

Si la surface S est onde d'ordre n pour le vecteur V, les dérivées partielles d'ordre n de la fonction $(u_2 - u_1)$ s'expriment toutes par les égalités (115), au moyen des $(n+1)$ paramètres $l_0, l_1, \ldots, l_n$; les dérivées partielles d'ordre n de la fonction $(v_2 - v_1)$ s'expriment de même au moyen de $(n+1)$ paramètres m_0, $m_1, \ldots, m_n$; enfin les dérivées partielles d'ordre n de la fonction $(w_2 - w_1)$ s'expriment de même au moyen de $(n+1)$ paramètres $n_0, n_1, \ldots, n_n$.

Mais les paramètres l_p, m_p, n_p peuvent être regardés comme les trois composantes d'un vecteur W_p. On peut donc énoncer le théorème suivant :

Si, à l'instant t, *la surface* S *est onde d'ordre* n *pour le vecteur* V, *il*

existe, en chaque point de cette surface, $(n+1)$ *vecteurs*

$$\mathrm{W}_0, \quad \mathrm{W}_1, \quad \ldots, \quad \mathrm{W}_n,$$

au moyen desquels s'expriment, en ce point et à cet instant, les dérivées partielles d'ordre n des composantes de la différence géométrique $\mathrm{V}_2 - \mathrm{V}_1$.

Supposons maintenant que l'onde soit persistante. Les égalités (117) nous donneront les relations

$$l_{p+1} + \mathfrak{M}\, l_p = 0, \qquad m_{p+1} + \mathfrak{M}\, m_p = 0, \qquad n_{p+1} + \mathfrak{M}\, n_p = 0,$$

qui entraînent la proposition suivante :

Si la surface S *est une onde permanente d'ordre n pour le vecteur* V, *à chaque instant et en chaque point de cette onde, les* $(n+1)$ *vecteurs* W_0, $\mathrm{W}_1, \ldots, \mathrm{W}_n$ *sont dirigés suivant une même droite; si on les compte positivement suivant une direction* D *choisie sur cette droite, ils forment une progression géométrique de raison* $(-\mathfrak{M})$.

La direction D se nomme alors *direction de la perturbation propagée par l'onde* S; lorsqu'elle est sans cesse normale à l'onde S, on dit que celle-ci propage une *perturbation longitudinale;* lorsqu'elle est sans cesse tangente à l'onde S, on dit que celle-ci propage une *perturbation transversale.*

Les considérations contenues en ce dernier paragraphe sont dues en entier à M. Hadamard.

CHAPITRE III.

DES ONDES DANS LES FLUIDES VISQUEUX.

§ 1. — Des ondes du premier ordre par rapport a certains éléments du mouvement (¹).

Imaginons qu'en un fluide visqueux une surface σ soit, à l'instant t, onde au moins du premier ordre pour les trois composantes u, v, w de la vitesse, pour la température T et, en outre, si le fluide est compressible, pour la densité.

(¹) *Sur les théorèmes d'Hugoniot, les lemmes de M. Hadamard et la propagation des ondes dans les fluides visqueux* (*Comptes rendus*, t. CXXXII, 13 mai 1901, p. 1163). *Des ondes qui peuvent persister en un fluide visqueux* (*Ibid.*, t. CXXXIII, 14 octobre 1901, p. 579).

Quant à la pression Π, nous ne la contraindrons pas à varier d'une manière continue au travers de la surface considérée.

Cette onde pourra-t-elle être persistante?

Pour discuter cette question, nous n'avons pas le droit de faire usage des équations du mouvement des fluides visqueux, telles qu'elles sont données par les équations (74) de la première Partie; celles-ci, en effet, reposent sur une transformation qui a été exposée en cette première Partie, au § 3 du Chapitre I, et la légitimité de cette transformation, comme nous l'avons formellement observé en cet endroit, est subordonnée à une condition : c'est que les six quantités $\nu_x, \nu_y, \nu_z, \tau_x, \tau_y, \tau_z$ soient continues dans tout le fluide et admettent, en tous les points de ce fluide, des dérivées partielles finies.

Or, si nous admettons pour $\nu_x, \nu_y, \nu_z, \tau_x, \tau_y, \tau_z$ les expressions données par les égalités (51) de la première Partie ou (43) de la seconde Partie, nous voyons que ces six quantités sont précisément discontinues le long de l'onde σ.

Nous devons donc renoncer à imposer à la quantité $d\mathcal{C}_e$, donnée par l'égalité (46) de la première Partie, la transformation que nous lui avions fait subir et chercher à la transformer d'une autre manière.

Traçons dans le fluide, à l'instant t, une surface fermée Σ contenant la surface σ à son intérieur; soit a la masse fluide que renferme la surface σ, et soit b la masse fluide qui lui est extérieure.

La quantité $d\mathcal{C}_e$ peut toujours s'exprimer ainsi

$$d\mathcal{C}_e = d\mathcal{C}_{ea} - d\mathcal{C}_{eb}, \tag{125}$$

$d\mathcal{C}_{ea}$, $d\mathcal{C}_{eb}$ étant définis par les égalités

$$d\mathcal{C}_{ea} = \int_a \left[\nu_x \frac{\partial\,\delta x}{\partial x} - \ldots - \tau_z\left(\frac{\partial\,\delta x}{\partial y} + \frac{\partial\,\delta y}{\partial x}\right)\right] d\varpi, \tag{126}$$

$$d\mathcal{C}_{eb} = \int_b \left[\nu_x \frac{\partial\,\delta x}{\partial x} - \ldots - \tau_z\left(\frac{\partial\,\delta x}{\partial y} + \frac{\partial\,\delta y}{\partial x}\right)\right] d\varpi. \tag{127}$$

Au sein de la partie b, les six quantités $\nu_x, \nu_y, \nu_z, \tau_x, \tau_y, \tau_z$ sont continues et admettent des dérivées partielles qui sont finies; on peut donc appliquer à $d\mathcal{C}_{eb}$ la transformation que, dans la première Partie, nous avons fait subir à la quantité $d\mathcal{C}_e$ tout entière.

Conservons à $p_x, p_y, p_z, q_x, q_y, q_z$ la signification que donnent les égalités (48) et (49) de la première Partie; en chaque point de la surface Σ désignons par n_b la normale vers l'intérieur de la partie b; posons

$$\left\{\begin{aligned} \Pi_x &= -[\nu_x \cos(n_b, x) - \tau_z \cos(n_b, y) - \tau_y \cos(n_b, z)],\\ \Pi_y &= -[\tau_z \cos(n_b, x) - \nu_y \cos(n_b, y) - \tau_x \cos(n_b, z)],\\ \Pi_z &= -[\tau_y \cos(n_b, x) - \tau_x \cos(n_b, y) - \nu_z \cos(n_b, z)]. \end{aligned}\right. \tag{128}$$

et les égalités (125) et (127) nous permettront d'écrire

$$(129)\qquad \begin{aligned} d\mathfrak{T}_v = d\mathfrak{T}_{va} &+ \int_b (q_x\,\delta x + q_y\,\delta y + q_z\,\delta z)\,d\varpi \\ &+ \int_S (p_x\,\delta x + p_y\,\delta y + p_z\,\delta z)\,dS \\ &+ \int_\Sigma (\pi_x\,\delta x + \pi_y\,\delta y + \pi_z\,\delta z)\,d\Sigma. \end{aligned}$$

Choisissons la surface Σ d'une manière particulière.

De part et d'autre de la surface σ menons deux surfaces dont la distance h à la surface Σ soit infiniment petite; l'une de ces surfaces, Σ_1, se trouvera du côté 1 de la surface σ; l'autre, Σ_2, se trouvera du côté 2. Nous composerons la surface Σ de l'ensemble des deux surfaces Σ_1 et Σ_2; nous écrirons l'égalité (129) et nous y ferons tendre h vers 0.

Le volume occupé par la masse a du fluide tend vers 0 avec h; dès lors, il résulte de l'égalité (126) que $d\mathfrak{T}_{va}$ tend vers 0; de plus, au second membre de l'égalité (129), le second terme tend vers l'intégrale

$$\int (q_x\,\delta x + q_y\,\delta y + q_z\,\delta z)\,d\varpi,$$

étendue au volume entier occupé par le fluide; à ce même second membre le troisième terme ne varie pas avec h; il nous reste donc à chercher la forme limite du terme

$$(130)\qquad \int_\Sigma (\pi_x\,\delta x + \pi_y\,\delta y + \pi_z\,\delta z)\,d\Sigma.$$

Cette intégrale se partage en deux autres intégrales analogues, l'une relative à la surface Σ_1, l'autre relative à la surface Σ_2.

Chaque élément $d\Sigma_1$ de la surface Σ_1 a pour limite un élément $d\sigma$ de la surface σ; les quantités $\cos(n_b, x)$, $\cos(n_b, y)$, $\cos(n_b, z)$ relatives au premier ont pour limites respectives les quantités α, β, γ relatives au second; les quantités ν_x, ν_y, ν_z, τ_x, τ_y, τ_z ont pour limites respectives ν_{x1}, ν_{y1}, ν_{z1}, τ_{x1}, τ_{y1}, τ_{z1}. Si donc on pose

$$(131)\qquad \begin{cases} \pi_{x1} = \nu_{x1}\,\alpha + \tau_{z1}\,\beta + \tau_{y1}\,\gamma, \\ \pi_{y1} = \tau_{z1}\,\alpha + \nu_{y1}\,\beta + \tau_{x1}\,\gamma, \\ \pi_{z1} = \tau_{y1}\,\alpha + \tau_{x1}\,\beta + \nu_{z1}\,\gamma, \end{cases}$$

la partie de l'intégrale (130) qui se rapporte à la surface Σ_1 aura pour limite

$$-\int_\sigma (\pi_{x1}\,\delta x + \pi_{y1}\,\delta y + \pi_{z1}\,\delta z)\,d\sigma.$$

Si l'on pose de même

$$(131\ bis)\quad \begin{cases} \pi_{x2} = \nu_{x2}\alpha + \tau_{z2}\beta + \tau_{y2}\gamma, \\ \pi_{y2} = \tau_{z2}\alpha + \nu_{y2}\beta + \tau_{x2}\gamma, \\ \pi_{z2} = \tau_{y2}\alpha + \tau_{x2}\beta + \nu_{z2}\gamma, \end{cases}$$

la partie de l'intégrale (130) qui provient de la surface Σ_2 aura pour limite

$$\int_\sigma (\pi_{x2}\,\delta x + \pi_{y2}\,\delta y + \pi_{z2}\,\delta z)\,d\sigma.$$

On pourra donc écrire, en observant que les quantités δx, δy, δz doivent être continues même au travers de la surface σ,

$$(132)\quad \begin{aligned} d\mathfrak{E}_v = & \int (q_x\,\delta x + q_y\,\delta y + q_z\,\delta z)\,d\varpi \\ & + \int_S (p_x\,\delta x + p_y\,\delta y + p_z\,\delta z)\,dS \\ & + \int_\sigma [(\pi_{x2} - \pi_{x1})\,\delta x + (\pi_{y2} - \pi_{y1})\,\delta y + (\pi_{z2} - \pi_{z1})\,\delta z]\,d\sigma. \end{aligned}$$

Telle est l'égalité que l'on doit substituer à l'égalité (47) de la première Partie.

C'est cette expression (132) de $d\mathfrak{E}_v$ que nous devons introduire dans l'équation fondamentale (2) de la première Partie, en sorte que l'on devra avoir, en toute modification virtuelle,

$$(133)\quad \begin{aligned} d\mathfrak{E}_e + d\mathfrak{E}_j - \delta_T\mathfrak{F} & + \int (q_x\,\delta x + q_y\,\delta y + q_z\,\delta z)\,d\varpi \\ & + \int_S (p_x\,\delta x + p_y\,\delta y + p_z\,\delta z)\,dS \\ & + \int_\sigma [(\pi_{x2} - \pi_{x1})\,\delta x + (\pi_{y2} - \pi_{y1})\,\delta y + (\pi_{z2} - \pi_{z1})\,\delta z]\,d\sigma = 0. \end{aligned}$$

Nous pouvons appliquer tout d'abord cette égalité à une modification virtuelle pour laquelle on ait, en tout point de la surface σ,

$$\delta x = 0, \qquad \delta y = 0, \qquad \delta z = 0.$$

Nous serons alors conduits à la proposition suivante :

Il existe une grandeur finie Π, continue dans tout le fluide, sauf peut-être en la surface σ, telle que l'on ait :

1° En tous les points de la surface S qui limite le fluide, les égalités [Ire Partie,

égalités (76)]

$$(134)\quad \begin{cases} \Pi\cos(n_i, x) = P_x + p_x, \\ \Pi\cos(n_i, y) = P_y + p_y, \\ \Pi\cos(n_i, z) = P_z + p_z; \end{cases}$$

2° En tout point de la masse fluide hors la surface σ, les égalités [Ire Partie, égalités (74) et (75)]

$$(135)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\Pi}{\partial x} - \rho(X_i + X_e - \gamma_x) - q_x = 0, \\ \dfrac{\partial\Pi}{\partial y} - \rho(X_i + X_e - \gamma_y) - q_y = 0, \\ \dfrac{\partial\Pi}{\partial z} - \rho(X_i + X_e - \gamma_z) - q_z = 0 \end{cases}$$

et, si le fluide est compressible, l'égalité

$$(136)\quad \Pi + \rho^2(A_i + A_e) - \rho^2 \frac{\partial\zeta}{\partial\rho} = 0.$$

Donnons maintenant à la masse fluide un déplacement virtuel quelconque. Au moyen des égalités (134), (135), (136), et par un calcul très semblable à celui qui occupe le début du Chapitre I, § 8, nous trouverons que l'on a

$$\begin{aligned} d\mathfrak{G}_e + d\mathfrak{G}_j - \delta_T \mathfrak{F} &+ \int (q_x\,\delta x + q_y\,\delta y + q_z\,\delta z)\,d\varpi \\ &+ \int_S (p_x\,\delta x + p_y\,\delta y + p_z\,\delta z)\,dS \\ = \int_\sigma (\Pi_2 - \Pi_1)&(\alpha\,\delta x + \beta\,\delta y + \gamma\,\delta z)\,d\sigma. \end{aligned}$$

Si l'on conserve alors à $\mathfrak{P}_{x1}$, $\mathfrak{P}_{y1}$, $\mathfrak{P}_{z1}$, $\mathfrak{P}_{x2}$, $\mathfrak{P}_{y2}$, $\mathfrak{P}_{z2}$ le sens que donnent les égalités (35) et (35 *bis*), l'égalité (133) devient

$$\int_\sigma [(\mathfrak{P}_{x2} - \mathfrak{P}_{x1})\,\delta x + (\mathfrak{P}_{y2} - \mathfrak{P}_{y1})\,\delta y + (\mathfrak{P}_{z2} - \mathfrak{P}_{z1})\,\delta z]\,d\sigma = 0.$$

Cette égalité doit avoir lieu quelle que soit la modification virtuelle imposée au fluide, par conséquent quelle que soit, le long de la surface σ, la loi de variation des quantités δx, δy, δz; la condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi est la suivante :

On a, en tout point de l'onde ϖ, les trois égalités

$$(137)\qquad \left\{\begin{aligned} &\mathfrak{P}_{x2} - \mathfrak{P}_{x1} = 0,\\ &\mathfrak{P}_{y2} - \mathfrak{P}_{y1} = 0,\\ &\mathfrak{P}_{z2} - \mathfrak{P}_{z1} = 0,\end{aligned}\right.$$

qui peuvent s'écrire plus explicitement, en vertu des égalités (35) et (35 *bis*),

$$(138)\qquad \left\{\begin{aligned} &(\nu_{x2} - \nu_{x1})\alpha + (\tau_{z2} - \tau_{z1})\beta + (\tau_{y2} - \tau_{y1})\gamma + (\Pi_2 - \Pi_1)\alpha = 0,\\ &(\tau_{z2} - \tau_{z1})\alpha + (\nu_{y2} - \nu_{y1})\beta + (\tau_{x2} - \tau_{x1})\gamma + (\Pi_2 - \Pi_1)\beta = 0,\\ &(\tau_{y2} - \tau_{y1})\alpha + (\tau_{x2} - \tau_{x1})\beta + (\nu_{z2} - \tau_{z1})\gamma + (\Pi_2 - \Pi_1)\gamma = 0.\end{aligned}\right.$$

Les quantités ν_x, ν_y, ν_z, τ_x, τ_y, τ_z sont supposées données par les égalités (43).

Or, selon ce que nous avons vu au Chapitre II, § 5, il doit exister, en chaque point de la surface ϖ, un vecteur (l_0, m_0, n_0) tel que l'on ait

$$(139)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial(u_2 - u_1)}{\partial x} = \alpha l_0, && \frac{\partial(u_2 - u_1)}{\partial y} = \beta l_0, && \frac{\partial(u_2 - u_1)}{\partial z} = \gamma l_0,\\ &\frac{\partial(v_2 - v_1)}{\partial x} = \alpha m_0, && \frac{\partial(v_2 - v_1)}{\partial y} = \beta m_0, && \frac{\partial(v_2 - v_1)}{\partial z} = \gamma m_0,\\ &\frac{\partial(w_2 - w_1)}{\partial x} = \alpha n_0, && \frac{\partial(w_2 - w_1)}{\partial y} = \beta n_0, && \frac{\partial(w_2 - w_1)}{\partial z} = \gamma n_0.\end{aligned}\right.$$

Ces égalités donnent

$$(140)\qquad \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial w_2}{\partial z} - \frac{\partial u_1}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} - \frac{\partial w_1}{\partial z} = \alpha l_0 + \beta m_0 + \gamma n_0,$$

$$(141)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial v_2}{\partial z} + \frac{\partial w_2}{\partial y} - \frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial w_1}{\partial y} = \gamma m_0 + \beta n_0,\\ &\frac{\partial w_2}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial z} - \frac{\partial w_1}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial z} = \alpha n_0 + \gamma l_0,\\ &\frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y} - \frac{\partial u_2}{\partial x} = \beta l_0 + \alpha m_0.\end{aligned}\right.$$

En vertu de ces égalités (139), (140), (141), les égalités (43) donnent

$$(142)\qquad \left\{\begin{aligned} &\nu_{x2} - \nu_{x1} = -\lambda(\rho, T)(\alpha l_0 + \beta m_0 + \gamma n_0) - 2\mu(\rho, T)\alpha l_0,\\ &\nu_{y2} - \nu_{y1} = -\lambda(\rho, T)(\alpha l_0 + \beta m_0 + \gamma n_0) - 2\mu(\rho, T)\beta m_0,\\ &\nu_{z2} - \nu_{z1} = -\lambda(\rho, T)(\alpha l_0 + \beta m_0 + \gamma n_0) - 2\mu(\rho, T)\gamma n_0,\\ &\tau_{x2} - \tau_{x1} = -\mu(\rho, T)(\gamma m_0 + \beta n_0),\\ &\tau_{y2} - \tau_{y1} = -\mu(\rho, T)(\alpha n_0 + \gamma l_0),\\ &\tau_{z2} - \tau_{z1} = -\mu(\rho, T)(\beta l_0 + \alpha m_0).\end{aligned}\right.$$

En vertu de ces égalités (142), les égalités (138) deviennent

$$(143)\quad \left\{\begin{array}{l} \alpha[\Pi_2-\Pi_1-(\lambda+2\mu)(\alpha l_0+\beta m_0+\gamma n_0)]-\mu[\beta(\beta l_0-\alpha m_0)-\gamma(\alpha n_0-\gamma l_0)]=0,\\ \beta[\Pi_2-\Pi_1-(\lambda+2\mu)(\alpha l_0+\beta m_0+\gamma n_0)]-\mu[\gamma(\gamma m_0-\beta n_0)-\alpha(\beta l_0-\alpha m_0)]=0,\\ \gamma[\Pi_2-\Pi_1-(\lambda+2\mu)(\alpha l_0+\beta m_0+\gamma n_0)]-\mu[\alpha(\alpha n_0-\gamma l_0)-\beta(\gamma m_0-\beta n_0)]=0. \end{array}\right.$$

Ajoutons ces égalités membre à membre après les avoir multipliées respectivement par α, β, γ; nous trouvons

$$(144)\qquad \Pi_2-\Pi_1-[\lambda(\rho,T)+2\mu(\rho,T)](\alpha l_0+\beta m_0+\gamma n_0)=0.$$

Pour tirer les conséquences de cette égalité, nous distinguerons deux cas, selon que le fluide est ou non compressible.

Supposons d'abord que le fluide soit incompressible. Dans ce cas, l'on a

$$\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial v_1}{\partial y}+\frac{\partial w_1}{\partial z}=0,\qquad \frac{\partial u_2}{\partial x}+\frac{\partial v_2}{\partial y}+\frac{\partial w_2}{\partial z}=0$$

et, par conséquent, en vertu de l'égalité (140),

$$(145)\qquad \alpha l_0+\beta m_0+\gamma n_0=0.$$

Cette égalité (145), jointe à l'égalité (144), donne

$$(146)\qquad \Pi_2=\Pi_1.$$

Il n'est donc pas possible, en un fluide incompressible, d'observer une surface au passage de laquelle les composantes de la vitesse et la température varieraient d'une manière continue, tandis que la pression varierait d'une manière discontinue.

Par anticipation, nous avions énoncé ce théorème au Chapitre I, § 11.

Moyennant l'égalité (144), les égalités (143) peuvent s'écrire :

$$\begin{array}{l} \mu(\rho,T)[l_0-\alpha(\alpha l_0+\beta m_0+\gamma n_0)]=0,\\ \mu(\rho,T)[m_0-\beta(\alpha l_0+\beta m_0+\gamma n_0)]=0,\\ \mu(\rho,T)[n_0-\gamma(\alpha l_0+\beta m_0+\gamma n_0)]=0 \end{array}$$

ou bien, en observant que l'on a [Ire Partie, condition (62 *bis*)],

$$\mu(\rho,T)>0$$

et en tenant compte de l'égalité (145),

$$(147)\qquad l_0=0,\qquad m_0=0,\qquad n_0=0.$$

Les égalités (139) deviennent alors

$$(148)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial x} = \dfrac{\partial u_2}{\partial x}, & \dfrac{\partial u_1}{\partial y} = \dfrac{\partial u_2}{\partial y}, & \dfrac{\partial u_1}{\partial z} = \dfrac{\partial u_2}{\partial z}, \\ \dfrac{\partial v_1}{\partial x} = \dfrac{\partial v_2}{\partial x}, & \dfrac{\partial v_1}{\partial y} = \dfrac{\partial v_2}{\partial y}, & \dfrac{\partial v_1}{\partial z} = \dfrac{\partial v_2}{\partial z}, \\ \dfrac{\partial w_1}{\partial x} = \dfrac{\partial w_2}{\partial x}, & \dfrac{\partial w_1}{\partial y} = \dfrac{\partial w_2}{\partial y}, & \dfrac{\partial w_1}{\partial z} = \dfrac{\partial w_2}{\partial z}. \end{cases}$$

Supposons maintenant que l'onde σ soit *persistante*. Selon ce que nous avons vu au Chapitre I, § 5, nous aurons

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} - \frac{\partial u_1}{\partial t} + \mathfrak{N} l_0 = 0,$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial t} - \frac{\partial v_1}{\partial t} + \mathfrak{N} m_0 = 0,$$

$$\frac{\partial w_2}{\partial t} - \frac{\partial w_1}{\partial t} + \mathfrak{N} n_0 = 0.$$

Moyennant les égalités (147), ces égalités deviennent

$$(149)\quad \frac{\partial u_1}{\partial t} = \frac{\partial u_2}{\partial t}, \qquad \frac{\partial v_1}{\partial t} = \frac{\partial v_2}{\partial t}, \qquad \frac{\partial w_1}{\partial t} = \frac{\partial w_2}{\partial t}.$$

Voyons maintenant ce que donne l'égalité (144) lorsque le fluide est supposé compressible.

Dans ce cas, nous devons écrire, de part et d'autre de la surface σ,

$$(136)\quad \Pi + \rho^2(A_i + A_e) - \rho^2 \frac{\partial \zeta(\rho, T)}{\partial \rho} = 0,$$

ρ et T variant d'une manière continue lorsqu'on traverse la surface σ; il en est de même, d'après ce que nous avons vu (Ire Partie, Chap. I, § 4), de

$$\rho^2(A_i + A_e) - \rho^2 \frac{\partial \zeta(\rho, T)}{\partial \rho}$$

et, partant, de Π. On a donc

$$(146)\quad \Pi_1 = \Pi_2.$$

L'égalité (144) devient alors

$$[\lambda(\rho, T) + 2\mu(\rho, T)](\alpha l_0 + \beta m_0 + \gamma n_0) = 0.$$

Mais on a [Ire Partie, condition (65)]

$$\lambda(\rho, T) + 2\mu(\rho, T) > 0.$$

L'égalité précédente devient donc

$$(145) \qquad \alpha l_0 + \beta m_0 + \gamma n_0 = 0.$$

Les égalités (148) et (149) s'établissent alors comme dans le cas précédent; l'onde considérée ne peut persister que si elle est, par rapport aux composantes de la vitesse, d'ordre supérieur au premier.

Dans le cas où le fluide est compressible, la densité variant d'une manière continue sur la surface σ, il doit exister une grandeur R_0 telle que l'on ait, en tout point de la surface σ,

$$(150) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial(\rho_2 - \rho_1)}{\partial x} = \alpha R_0, \quad \dfrac{\partial(\rho_2 - \rho_1)}{\partial y} = \beta R_0, \quad \dfrac{\partial(\rho_2 - \rho_1)}{\partial z} = \gamma R_0, \\ \dfrac{\partial(\rho_2 - \rho_1)}{\partial t} + \mathfrak{N} R_0 = 0. \end{cases}$$

En vertu des égalités (148) et (150), l'équation de continuité

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u\frac{\partial \rho}{\partial x} + v\frac{\partial \rho}{\partial y} + w\frac{\partial \rho}{\partial z} + \rho\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) = 0$$

donne, en tout point de la surface σ,

$$(151) \qquad (\alpha u + \beta v + \gamma w - \mathfrak{N}) R_0 = 0.$$

La température étant également continue sur la surface σ, il existe une grandeur Θ_0 telle que, sur cette surface,

$$(152) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial(T_2 - T_1)}{\partial x} = \alpha \Theta_0, \quad \dfrac{\partial(T_2 - T_1)}{\partial y} = \beta \Theta_0, \quad \dfrac{\partial(T_2 - T_1)}{\partial z} = \gamma \Theta_0, \\ \dfrac{\partial(T_2 - T_1)}{\partial t} + \mathfrak{N} \Theta_0 = 0. \end{cases}$$

Supposons, d'abord, le *fluide bon conducteur*.

De part et d'autre de la surface σ, traçons (*fig.* 14) deux surfaces σ_1, σ_2, parallèles à σ et situées à une distance h de σ. Sur la surface σ prenons une aire $MN = A$; par le contour de cette aire, élevons des normales à la surface σ; ces normales découpent sur la surface σ_1 une aire M_1N_1 et sur la surface σ_2 une aire M_2N_2. Pendant le temps dt, le fluide qui se trouve à l'instant t dans le volume $M_1N_1M_2N_2$ (ou a) dégage une quantité de chaleur $\lambda\, dt$, qui s'obtiendrait

[illegible] commentaire [illegible]

[illegible]

[illegible] permet d'établir immédiatement que [illegible]

[illegible] se compose de deux parties

[illegible] $M_1 N_1$ [illegible]

[illegible] a pour limite

[illegible]

[illegible] $M_2 N_2$ [illegible]

[illegible]

Si nous tenons compte des égalités (152), nous voyons que l'intégrale $\int k \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial n_a} d\mathrm{S}$ a pour limite $\int_{\mathrm{A}} k \Theta_0 \, d\sigma$ et que la forme limite de l'égalité (153) est

$$\int_{\mathrm{A}} k \Theta_0 \, d\sigma = 0.$$

L'aire A étant une aire quelconque prise sur la surface σ, il revient au même de dire que l'on a, en tous les points de la surface σ,

$$\Theta_0 = 0. \tag{154}$$

Supposons maintenant que *le fluide soit mauvais conducteur*. La quantité de chaleur $d\mathrm{Q}$ dégagée dans le temps dt par chaque élément $d\varpi$ du fluide est égale à o. Selon l'égalité (90) de la première Partie, cette condition s'exprime par l'égalité

$$\begin{aligned}
&\mathrm{T}\rho \frac{\partial^2 \zeta(\rho, \mathrm{T})}{\partial \mathrm{T}^2} \left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial x} u + \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial y} v + \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial z} w + \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial t} \right) \\
&- \mathrm{T}\rho^2 \frac{\partial^2 \zeta(\rho, \mathrm{T})}{\partial \rho \, \partial \mathrm{T}} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\
&+ \lambda(\rho, \mathrm{T}) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \\
&+ 2\mu(\rho, \mathrm{T}) \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right. \\
&\qquad \left. + \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] = 0.
\end{aligned}$$

En vertu des égalités (148) et (152), cette quantité se réduit à

$$(\alpha u + \beta v + \gamma w - \mathfrak{N}) \Theta_0 = 0. \tag{155}$$

La démonstration des égalités (154) et (155) est évidemment valable pour tous les fluides, compressibles ou non, visqueux ou non; l'égalité (154) suppose seulement que l'onde soit au moins du *premier* ordre par rapport à u, v, w et ρ.

En réunissant les résultats obtenus, nous allons être en mesure de répondre à cette question :

Au sein d'un fluide visqueux en mouvement, peut-on observer une surface qui soit onde persistante du premier ordre pour l'une au moins des six quantités u, v, w, ρ, Π, T et onde d'ordre égal ou supérieur à 1 pour les cinq autres?

Première section. — *Fluides incompressibles bons conducteurs.*

Les égalités (148) et (149) montrent que la surface σ est d'ordre supérieur au premier pour les composantes u, v, w de la vitesse; les égalités (152) et (154) montrent qu'il en est de même pour la température. Si la surface σ était onde du premier ordre pour l'un des éléments du mouvement, ce ne pourrait être que pour la pression Π. Mais nous démontrerons au paragraphe suivant la proposition que voici : Si, en un fluide incompressible, une surface σ est onde au moins du second ordre pour u, v, w, T, elle est au moins du second ordre pour la pression Π. Admettant d'avance cette proposition, nous pouvons énoncer ce théorème :

Au sein d'un fluide visqueux, incompressible, bon conducteur, aucune surface ne peut être onde persistante du premier ordre pour l'un au moins des éléments du mouvement et d'ordre égal ou supérieur à 1 pour les autres.

Deuxième section. — *Autres fluides.*

Premier cas. — *On n'a pas*

$$\mathfrak{M} = \alpha u + \beta v + \gamma w. \tag{156}$$

Dans ce cas, si le fluide est compressible, on a, en vertu de l'égalité (151),

$$R_0 = 0. \tag{157}$$

Si le fluide est mauvais conducteur, on a, en vertu de l'égalité (155),

$$\Theta_0 = 0. \tag{154}$$

Dès lors, en vertu des égalités (148) et (149), la surface considérée est onde au moins du second ordre par rapport aux composantes u, v, w de la vitesse; en vertu des égalités (154) et (152) il en est de même par rapport à la température T; enfin, si le fluide est compressible, en vertu des égalités (157) et (150) il en est de même de la densité ρ.

Reste à savoir si l'onde considérée ne pourrait pas être du premier ordre par rapport à la pression Π.

Si le fluide considéré est incompressible, cela sera impossible en vertu de la proposition que nous avons déjà invoquée et qui sera démontrée au paragraphe suivant.

Dans le cas où le fluide est compressible et où les actions qu'il subit ne sont pas newtoniennes, la démonstration de cette proposition nécessite quelques remarques préliminaires.

Si, dans un certain domaine, la densité ρ admet, par rapport à x, y, z, t, des

dérivées partielles jusqu'à l'ordre n inclusivement et si ces dérivées sont continues, il en est certainement de même, en général, de la fonction A_e; mais il n'est nullement certain qu'il en soit de même de la grandeur A_i; l'existence ou la non-existence de ces dérivées dépend évidemment de la manière dont la fonction $\psi(\rho, \rho', r)$, qui est infinie pour $r = 0$, se comporte pour les valeurs de r voisines de o. Aussi avons-nous été amenés (Ire Partie, Chap. I, § 4) à faire l'HYPOTHÈSE suivante :

La fonction $\psi(\rho, \rho', r)$ est d'une nature telle que la grandeur A_i admette par rapport à x, y, z, t des dérivées partielles continues jusqu'à l'ordre n dans tout domaine où la densité ρ admet des dérivées partielles continues jusqu'à l'ordre n.

Dans tous les cas où cette hypothèse est justifiée l'égalité

$$\Pi + \rho^2(A_i + A_e) - \rho^2 \frac{\partial \zeta(\rho, T)}{\partial \rho} = 0 \tag{136}$$

nous montre que, *si, dans un certain domaine, en un fluide compressible, la densité ρ et la température T admettent des dérivées partielles continues jusqu'à l'ordre n, il en est de même de la pression Π.*

Dès lors, les égalités (150), (152), (154) et (157) nous montrent que la surface ϖ est, pour la pression Π, en un fluide compressible, une onde d'ordre supérieur au premier.

Nous pouvons désormais énoncer la proposition suivante :

En un fluide visqueux, il est impossible d'observer une onde qui soit du premier ordre pour certains éléments du mouvement et d'ordre au moins égal à 1 pour les autres, à moins que l'onde ne soit la surface de séparation de deux masses fluides qui restent les mêmes pendant toute la durée du mouvement.

DEUXIÈME CAS. — *On a*

$$\mathfrak{N} = \alpha u + \beta v + \gamma w. \tag{156}$$

Dans ce cas, si le fluide est compressible, l'égalité (151) est compatible avec l'hypothèse que R_0 est différent de o; si le fluide est mauvais conducteur, l'égalité (155) est compatible avec l'hypothèse que Θ_0 est différent de o; nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

En un fluide visqueux, qui est ou mauvais conducteur, ou compressible, ou à la fois compressible et mauvais conducteur, on peut observer des ondes qui sont du premier ordre par rapport à certains éléments du mouvement et d'ordre supérieur au premier pour les autres. Les deux masses fluides que sépare une telle onde restent les mêmes pendant toute la durée du mouvement.

PREMIÈRE SECTION. — *Fluides incompressibles bons conducteurs.*

Les égalités (148) et (149) montrent que la surface σ est d'ordre supérieur au premier pour les composantes u, v, w de la vitesse; les égalités (152) et (154) montrent qu'il en est de même pour la température. Si la surface σ était onde du premier ordre pour l'un des éléments du mouvement, ce ne pourrait être que pour la pression Π. Mais nous démontrerons au paragraphe suivant la proposition que voici : Si, en un fluide incompressible, une surface σ est onde au moins du second ordre pour u, v, w, T, elle est au moins du second ordre pour la pression Π. Admettant d'avance cette proposition, nous pouvons énoncer ce théorème :

Au sein d'un fluide visqueux, incompressible, bon conducteur, aucune surface ne peut être onde persistante du premier ordre pour l'un au moins des éléments du mouvement et d'ordre égal ou supérieur à 1 pour les autres.

DEUXIÈME SECTION. — *Autres fluides.*

PREMIER CAS. — *On n'a pas*

$$\mathfrak{N} = \alpha u + \beta v + \gamma w. \tag{156}$$

Dans ce cas, si le fluide est compressible, on a, en vertu de l'égalité (151),

$$R_0 = 0. \tag{157}$$

Si le fluide est mauvais conducteur, on a, en vertu de l'égalité (155),

$$\Theta_0 = 0. \tag{154}$$

Dès lors, en vertu des égalités (148) et (149), la surface considérée est onde au moins du second ordre par rapport aux composantes u, v, w de la vitesse; en vertu des égalités (154) et (152) il en est de même par rapport à la température T; enfin, si le fluide est compressible, en vertu des égalités (157) et (150) il en est de même de la densité ρ.

Reste à savoir si l'onde considérée ne pourrait pas être du premier ordre par rapport à la pression Π.

Si le fluide considéré est incompressible, cela sera impossible en vertu de la proposition que nous avons déjà invoquée et qui sera démontrée au paragraphe suivant.

Dans le cas où le fluide est compressible et où les actions qu'il subit ne sont pas newtoniennes, la démonstration de cette proposition nécessite quelques remarques préliminaires.

Si, dans un certain domaine, la densité ρ admet, par rapport à x, y, z, t, des

Une telle onde présente, pour les diverses espèces de fluides, les caractères suivants :

1° FLUIDES INCOMPRESSIBLES ET MAUVAIS CONDUCTEURS. — *L'onde, du premier ordre pour* T *et* Π, *est d'ordre plus élevé pour* u, v, w.

2° FLUIDES COMPRESSIBLES ET BONS CONDUCTEURS. — *L'onde, du premier ordre pour* ρ *et* Π, *est d'ordre plus élevé pour* u, v, w *et* T.

3° FLUIDES COMPRESSIBLES ET MAUVAIS CONDUCTEURS. — *L'onde, du premier ordre pour* ρ, Π *et* T, *est d'ordre plus élevé pour* u, v, w.

§ 2. — DES ONDES DU SECOND ORDRE PAR RAPPORT A CERTAINS ÉLÉMENTS DU MOUVEMENT.

Supposons qu'à l'instant t, au sein d'un fluide visqueux, une surface σ soit onde au moins du second ordre pour les composantes u, v, w de la vitesse, pour la température T et, en outre, si le fluide est compressible, pour la densité ρ. Quant à la pression Π, nous supposerons seulement, au début, que, pour elle, l'onde est au moins du premier ordre. Nous serons amené ainsi à démontrer un théorème invoqué au paragraphe précédent.

La condition restrictive indiquée en la Ire Partie, au Chapitre I, § 3, est remplie dans l'hypothèse où nous nous plaçons. Nous pouvons donc faire usage des équations du mouvement des fluides visqueux sous la forme qui a été donnée en cet endroit par les égalités (74). Cette forme n'est autre que celle qui est donnée en la présente Partie par les égalités (135), avec les expressions suivantes de q_x, q_y, q_z [Ire Partie, égalités (58)] :

$$(158)\quad \left\{\begin{aligned}
q_x &= (\lambda+\mu)\frac{\partial\theta}{\partial x} + \mu\,\Delta u + \theta\frac{\partial\lambda}{\partial x}\\
&\quad + 2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial\mu}{\partial x} + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\frac{\partial\mu}{\partial y} + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)\frac{\partial\mu}{\partial z},\\
q_y &= (\lambda+\mu)\frac{\partial\theta}{\partial y} + \mu\,\Delta v + \theta\frac{\partial\lambda}{\partial y}\\
&\quad + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)\frac{\partial\mu}{\partial x} + 2\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial\mu}{\partial y} + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)\frac{\partial\mu}{\partial z},\\
q_z &= (\lambda+\mu)\frac{\partial\theta}{\partial z} + \mu\,\Delta w + \theta\frac{\partial\lambda}{\partial z}\\
&\quad + \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)\frac{\partial\mu}{\partial x} + \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right)\frac{\partial\mu}{\partial y} + 2\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial\mu}{\partial z},
\end{aligned}\right.$$

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}.$$

L'onde ϖ étant supposée au moins du deuxième ordre pour u, v, w, il existe en chaque point de cette surface un vecteur l_0, m_0, n_0 tel que l'on ait

$$(159)\quad \left\{\begin{array}{lll} \dfrac{\partial^2(u_2-u_1)}{\partial x^2}=\alpha^2 l_0, & \dfrac{\partial^2(u_2-u_1)}{\partial y^2}=\beta^2 l_0, & \dfrac{\partial^2(u_2-u_1)}{\partial z^2}=\gamma^2 l_0. \\ \dfrac{\partial^2(u_2-u_1)}{\partial y\,\partial z}=\beta\gamma l_0, & \dfrac{\partial^2(u_2-u_1)}{\partial z\,\partial x}=\gamma\alpha l_0, & \dfrac{\partial^2(u_2-u_1)}{\partial x\,\partial y}=\alpha\beta l_0, \\ \dfrac{\partial^2(v_2-v_1)}{\partial x^2}=\alpha^2 m_0, & \dots\dots\dots\dots, & \dots\dots\dots\dots, \\ \dots\dots\dots\dots, & \dots\dots\dots\dots, & \dots\dots\dots\dots \end{array}\right.$$

ρ et T étant continus, ainsi que leurs dérivées partielles du premier ordre, sur la surface ϖ, il en est de même de $\lambda(\rho, T)$ et de $\mu(\rho, T)$, de sorte que les égalités (158) permettent d'écrire

$$(160)\quad \left\{\begin{array}{l} q_{x2}-q_{x1}=[\lambda(\rho,T)+\mu(\rho,T)](\alpha l_0+\beta m_0+\gamma n_0)\alpha+\mu(\rho,T)l_0, \\ q_{y2}-q_{y1}=[\lambda(\rho,T)+\mu(\rho,T)](\alpha l_0+\beta m_0+\gamma n_0)\beta+\mu(\rho,T)m_0, \\ q_{z2}-q_{z1}=[\lambda(\rho,T)+\mu(\rho,T)](\alpha l_0+\beta m_0+\gamma n_0)\gamma+\mu(\rho,T)n_0. \end{array}\right.$$

Les hypothèses faites sur u, v, w nous assurent que γ_x, γ_y, γ_z varient d'une manière continue au travers de la surface ϖ; les hypothèses faites sur ρ, jointes à ce qui a été supposé en la Ire Partie, Chapitre I, § 4, nous assurent qu'il en est de même pour X_i, X_e, Y_i, Y_e, Z_i, Z_e; enfin, la surface ϖ étant onde au moins du premier ordre pour la pression Π, il existe assurément un vecteur P, tel que

$$(161)\quad \frac{\partial(\Pi_2-\Pi_1)}{\partial x}=\alpha P,\qquad \frac{\partial(\Pi_2-\Pi_1)}{\partial y}=\beta P,\qquad \frac{\partial(\Pi_2-\Pi_1)}{\partial z}=\gamma P.$$

Dès lors, les équations (135) permettent d'écrire, en chaque point de la surface ϖ,

$$(162)\quad \left\{\begin{array}{l} \{P-[\lambda(\rho,T)+\mu(\rho,T)](\alpha l_0+\beta m_0+\gamma n_0)\}\alpha-\mu(\rho,T)l_0=0, \\ \{P-[\lambda(\rho,T)+\mu(\rho,T)](\alpha l_0+\beta m_0+\gamma n_0)\}\beta-\mu(\rho,T)m_0=0, \\ \{P-[\lambda(\rho,T)+\mu(\rho,T)](\alpha l_0+\beta m_0+\gamma n_0)\}\gamma-\mu(\rho,T)n_0=0. \end{array}\right.$$

Ajoutons membre à membre ces égalités après les avoir multipliées respectivement par α, β, γ et nous trouvons

$$(163)\quad P-[\lambda(\rho,T)+2\mu(\rho,T)](\alpha l_0+\beta m_0+\gamma n_0)=0.$$

Supposons, tout d'abord, que le fluide soit *incompressible*. Nous aurons identiquement

$$\theta=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0,$$

partant,

$$\frac{\partial\theta}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial\theta}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial\theta}{\partial z} = 0,$$

ce qui permettra d'écrire, en tout point de la surface ϖ,

$$\frac{\partial(\theta_2 - \theta_1)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial(\theta_2 - \theta_1)}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial(\theta_2 - \theta_1)}{\partial z} = 0$$

ou bien, en vertu des égalités (159),

$$(\alpha l_0 + \beta m_0 + \gamma n_0)\alpha = 0,$$
$$(\alpha l_0 + \beta m_0 + \gamma n_0)\beta = 0,$$
$$(\alpha l_0 + \beta m_0 + \gamma n_0)\gamma = 0,$$

égalités qui entraînent celle-ci :

$$\alpha l_0 + \beta m_0 + \gamma n_0 = 0. \tag{164}$$

L'égalité (163) donne alors

$$P = 0 \tag{165}$$

et partant, selon les égalités (161),

$$\frac{\partial(\Pi_2 - \Pi_1)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial(\Pi_2 - \Pi_1)}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial(\Pi_2 - \Pi_1)}{\partial z} = 0. \tag{166}$$

D'ailleurs, si l'onde est persistante, on doit avoir, selon l'égalité (98),

$$\frac{\partial(\Pi_2 - \Pi_1)}{\partial t} + \mathfrak{N} P = 0,$$

en sorte que l'égalité (165) donne

$$\frac{\partial(\Pi_2 - \Pi_1)}{\partial t} = 0. \tag{167}$$

Les égalités (166) et (167) justifient le théorème suivant, déjà invoqué au précédent paragraphe :

Au sein d'un fluide visqueux incompressible, une onde persistante, qui est au moins du second ordre pour les composantes u, v, w de la vitesse et pour la température T, *est aussi au moins du second ordre pour la pression* Π.

Supposons maintenant le fluide *compressible*. D'après ce qui a été dit au paragraphe 1, la surface ϖ, onde du second ordre pour la densité ρ et la tempéra-

ture T, est aussi onde du second ordre pour la pression Π; on a donc encore

$$(165)\qquad P = 0,$$

en sorte que l'égalité (163) devient

$$[\lambda(\rho, T) + 2\mu(\rho, T)](\alpha l_0 + \beta m_0 + \gamma n_0) = 0.$$

Mais on a [1[re] Partie, condition (65)]

$$\lambda(\rho, T) + 2\mu(\rho, T) > 0.$$

L'égalité précédente devient donc

$$(164)\qquad \alpha l_0 + \beta m_0 + \gamma n_0 = 0.$$

Les égalités (164) et (165) étant ainsi établies pour tous les fluides visqueux, reportons-les dans les égalités (162); nous trouvons

$$\mu(\rho, T) l_0 = 0, \qquad \mu(\rho, T) m_0 = 0, \qquad \mu(\rho, T) n_0 = 0,$$

et comme on a [1[re] Partie, condition (62 *bis*)]

$$\mu(\rho, T) > 0,$$

les égalités précédentes deviennent

$$(168)\qquad l_0 = 0, \qquad m_0 = 0, \qquad n_0 = 0.$$

D'autre part, d'après ce que nous avons vu au Chapitre II, § 5, il existe un vecteur l_1, m_1, n_1 tel que l'on ait

$$(169)\quad \left\{ \begin{array}{lll} \dfrac{\partial^2(u_2 - u_1)}{\partial x\, \partial t} = \alpha l_1, & \dfrac{\partial^2(u_2 - u_1)}{\partial y\, \partial t} = \beta l_1, & \dfrac{\partial^2(u_2 - u_1)}{\partial z\, \partial t} = \gamma l_1, \\ \dfrac{\partial^2(v_2 - v_1)}{\partial x\, \partial t} = \alpha m_1, & \dfrac{\partial^2(v_2 - v_1)}{\partial y\, \partial t} = \beta m_1, & \dfrac{\partial^2(v_2 - v_1)}{\partial z\, \partial t} = \gamma m_1, \\ \dfrac{\partial^2(w_2 - w_1)}{\partial x\, \partial t} = \alpha n_1, & \dfrac{\partial^2(w_2 - w_1)}{\partial y\, \partial t} = \beta n_1, & \dfrac{\partial^2(w_2 - w_1)}{\partial z\, \partial t} = \gamma n_1, \end{array} \right.$$

et si l'onde considérée est persistante, on a

$$(170)\quad \left\{ \begin{array}{lll} l_1 + \mathfrak{N} l_0 = 0, & m_1 + \mathfrak{N} m_0 = 0, & n_1 + \mathfrak{N} n_0 = 0, \\ \dfrac{\partial^2(u_2 - u_1)}{\partial t^2} + \mathfrak{N} l_1 = 0, & \dfrac{\partial^2(v_2 - v_1)}{\partial t^2} + \mathfrak{N} m_1 = 0, & \dfrac{\partial^2(w_2 - w_1)}{\partial t^2} + \mathfrak{N} n_1 = 0. \end{array} \right.$$

Les égalités (159), (168), (169), (170) nous enseignent alors que toutes les

dérivées partielles du second ordre des différences $(u_2 - u_1)$, $(v_2 - v_1)$, $(w_2 - w_1)$ sont nulles sur la surface σ. Si l'onde considérée est persistante, elle est certainement d'ordre supérieur au second pour les composantes de la vitesse.

Si le fluide est compressible, il existe deux grandeurs R_0, R_1, telles que l'on ait, en tout point de la surface σ,

$$(171)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2(\rho_2-\rho_1)}{\partial x^2} = \alpha^2 R_0, & \dfrac{\partial^2(\rho_2-\rho_1)}{\partial y^2} = \beta^2 R_0, & \dfrac{\partial^2(\rho_2-\rho_1)}{\partial z^2} = \gamma^2 R_0, \\ \dfrac{\partial^2(\rho_2-\rho_1)}{\partial y\,\partial z} = \beta\gamma R_0, & \dfrac{\partial^2(\rho_2-\rho_1)}{\partial z\,\partial x} = \gamma\alpha R_0, & \dfrac{\partial^2(\rho_2-\rho_1)}{\partial x\,\partial y} = \alpha\beta R_0, \end{cases}$$

$$(172)\quad \frac{\partial^2(\rho_2-\rho_1)}{\partial x\,\partial t} = \alpha R_1, \qquad \frac{\partial^2(\rho_2-\rho_1)}{\partial y\,\partial t} = \beta R_1, \qquad \frac{\partial^2(\rho_2-\rho_1)}{\partial z\,\partial t} = \gamma R_1.$$

En outre, si l'onde est persistante,

$$(173)\qquad R_1 + \mathfrak{N} R_0 = 0, \qquad \frac{\partial^2(\rho_2-\rho_1)}{\partial t^2} + \mathfrak{N} R_1 = 0.$$

L'équation de continuité nous enseigne que l'on a identiquement, en tout point,

$$(174)\qquad K = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\rho u + \frac{\partial}{\partial y}\rho v + \frac{\partial}{\partial z}\rho w = 0,$$

partant

$$\frac{\partial K}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial K}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial K}{\partial z} = 0,$$

ce qui permet d'écrire, en tout point de la surface σ,

$$\frac{\partial(K_2-K_1)}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial(K_2-K_1)}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial(K_2-K_1)}{\partial z} = 0$$

ou bien, en vertu des égalités (171), (172), (173) et (174),

$$(\alpha u + \beta v + \gamma w - \mathfrak{N}) R_0 \alpha = 0,$$
$$(\alpha u + \beta v + \gamma w - \mathfrak{N}) R_0 \beta = 0,$$
$$(\alpha u + \beta v + \gamma w - \mathfrak{N}) R_0 \gamma = 0,$$

égalités qui donnent

$$(175)\qquad (\alpha u + \beta v + \gamma w - \mathfrak{N}) R_0 = 0.$$

Il existe deux grandeurs Θ_0, Θ_1 telles que, sur la surface σ,

$$(176)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2(T_2-T_1)}{\partial x^2} = \alpha^2\Theta_0, & \dfrac{\partial^2(T_2-T_1)}{\partial y^2} = \beta^2\Theta_0, & \dfrac{\partial^2(T_2-T_1)}{\partial z^2} = \gamma^2\Theta_0, \\ \dfrac{\partial^2(T_2-T_1)}{\partial y\,\partial z} = \beta\gamma\Theta_0, & \dfrac{\partial^2(T_2-T_1)}{\partial z\,\partial x} = \gamma\alpha\Theta_0, & \dfrac{\partial^2(T_2-T_1)}{\partial x\,\partial y} = \alpha\beta\Theta_0, \end{cases}$$

$$(177)\quad \frac{\partial^2(T_2-T_1)}{\partial x\,\partial t} = \alpha\ \Theta_1, \qquad \frac{\partial^2(T_2-T_1)}{\partial y\,\partial t} = \beta\ \Theta_1, \qquad \frac{\partial^2(T_2-T_1)}{\partial z\,\partial t} = \gamma\ \Theta_1.$$

En outre, si l'onde est persistante, on a

$$(178)\qquad \Theta_1 + \mathfrak{N}\Theta_0 = 0, \qquad \frac{\partial^2(T_2-T_1)}{\partial t^2} + \mathfrak{N}\Theta_1 = 0.$$

Considérons la relation supplémentaire [Ire Partie, égalité (94)] et supposons d'abord le *fluide bon conducteur :*

$$k(\rho, T) > 0.$$

Elle nous donnera, en tout point de la surface σ,

$$k(\rho, T)\Delta(T_2 - T_1) = 0$$

ou, selon les égalités (176),

$$k(\rho, T)\Theta_0 = 0,$$

ou enfin

$$(179)\qquad \Theta_0 = 0.$$

Supposons, au contraire, le *fluide mauvais conducteur :*

$$k(\rho, T) = 0.$$

Nous aurons, en tout point,

$$(180)\quad \begin{aligned} J = {} & \frac{T}{E}\rho\frac{\partial^2\zeta}{\partial T^2}\left(\frac{\partial T}{\partial x}u + \frac{\partial T}{\partial y}v + \frac{\partial T}{\partial z}w + \frac{\partial T}{\partial t}\right) \\ & - \frac{T}{E}\rho^2\frac{\partial^2\zeta}{\partial T\,\partial\rho}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) \\ & + \frac{\lambda(\rho, T)}{E}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 \\ & + \frac{2\mu(\rho, T)}{E}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 \right. \\ & \left. + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right] = 0, \end{aligned}$$

partant

$$\frac{\partial J}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial J}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial J}{\partial z} = 0,$$

ce qui permet d'écrire, en tout point de la surface ϖ,

$$\frac{\partial(J_2 - J_1)}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial(J_2 - J_1)}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial(J_2 - J_1)}{\partial z} = 0.$$

Si l'on observe que la surface ϖ, onde du second ordre pour ρ et T, est d'ordre supérieur au second pour u, v, w, on voit que ces égalités deviennent

$$\begin{aligned}
u\frac{\partial^2(T_2 - T_1)}{\partial x^2} + v\frac{\partial^2(T_2 - T_1)}{\partial x\,\partial y} + w\frac{\partial^2(T_2 - T_1)}{\partial x\,\partial z} + \frac{\partial^2(T_2 - T_1)}{\partial x\,\partial t} &= 0,\\
u\frac{\partial^2(T_2 - T_1)}{\partial y\,\partial x} + v\frac{\partial^2(T_2 - T_1)}{\partial y^2} + w\frac{\partial^2(T_2 - T_1)}{\partial y\,\partial z} + \frac{\partial^2(T_2 - T_1)}{\partial y\,\partial t} &= 0,\\
u\frac{\partial^2(T_2 - T_1)}{\partial z\,\partial x} + v\frac{\partial^2(T_2 - T_1)}{\partial z\,\partial y} + w\frac{\partial^2(T_2 - T_1)}{\partial z^2} + \frac{\partial^2(T_2 - T_1)}{\partial z\,\partial t} &= 0,
\end{aligned}$$

ou bien, en vertu des égalités (176), (177), (178),

$$\begin{aligned}
(\alpha u + \beta v + \gamma w - \mathfrak{N})\Theta_0\alpha &= 0,\\
(\alpha u + \beta v + \gamma w - \mathfrak{N})\Theta_0\beta &= 0,\\
(\alpha u + \beta v + \gamma w - \mathfrak{N})\Theta_0\gamma &= 0.
\end{aligned}$$

Ces égalités donnent

$$(181) \qquad (\alpha u + \beta v + \gamma w - \mathfrak{N})\Theta_0 = 0.$$

Discutons les diverses égalités obtenues.

Première Section. — *Fluides incompressibles et bons conducteurs.*

L'égalité (179), jointe aux égalités (176), (177), (178), nous enseigne que la surface ϖ est onde d'ordre supérieur au second pour la température T, comme elle l'est déjà pour les composantes u, v, w de la vitesse; si donc elle pouvait être du second ordre par rapport à quelque élément du mouvement, ce serait par rapport à la pression Π; mais, au paragraphe suivant, nous démontrerons qu'elle est, au moins, du troisième ordre par rapport à la pression Π; nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

Au sein d'un fluide visqueux, incompressible et bon conducteur, on ne peut observer aucune onde qui soit du second ordre par rapport à certains éléments du mouvement et d'ordre au moins égal à 2 par rapport aux autres éléments.

DEUXIÈME SECTION. — *Autres fluides.*

Ici, nous devons distinguer deux cas.

PREMIER CAS. — *On n'a pas*

$$\mathfrak{N} = \alpha u + \beta v + \gamma w. \tag{156}$$

Dans ce cas, l'égalité (181) donne l'égalité

$$\Theta_0 = 0, \tag{179}$$

même si le fluide est mauvais conducteur. Les égalités (176), (177), (178) montrent alors que la surface σ est, pour la température T, une onde d'ordre supérieur à 2.

Si le fluide est compressible, l'égalité (175) donne

$$R_0 = 0,$$

ce qui, moyennant les égalités (171), (172), (173), montre que la surface σ est une onde au moins du troisième ordre pour la densité ρ.

Il reste à examiner si l'onde ne peut pas être du second ordre par rapport à la pression Π. Que cela soit impossible pour un fluide incompressible, nous en sommes assurés par un théorème qui sera démontré au paragraphe suivant; si, au contraire, le fluide est compressible, nous savons, par ce qui a été dit au § 1, que la surface σ, onde au moins du troisième ordre pour la densité ρ et la température T, est, au moins, du troisième ordre pour la pression Π.

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

En aucun fluide visqueux on ne peut observer une onde qui soit du second ordre par rapport à certains éléments du mouvement et d'ordre au moins égal à 2 pour les autres, à moins que les deux masses fluides séparées par cette onde ne demeurent les mêmes pendant toute la durée du mouvement.

SECOND CAS. — *On a*

$$\mathfrak{N} = \alpha u + \beta v + \gamma w. \tag{156}$$

Dans ce cas, si le fluide est mauvais conducteur, l'égalité (181) peut être vérifiée, bien que Θ_0 diffère de 0; si le fluide est compressible, l'égalité (175) peut être vérifiée, bien que R_0 diffère de 0.

Nous pouvons donc énoncer les propositions suivantes :

Si un fluide visqueux est ou mauvais conducteur, ou compressible, ou à la fois mauvais conducteur et compressible, on peut y observer une onde du second

ordre par rapport à certains éléments du mouvement, d'ordre supérieur à 2 pour les autres éléments et qui, pendant toute la durée du mouvement, sépare les mêmes masses fluides.

Pour les diverses catégories de fluides visqueux, cette onde présente les particularités suivantes :

FLUIDE VISQUEUX, INCOMPRESSIBLE ET MAUVAIS CONDUCTEUR. — *Du second ordre par rapport à la température* T *et à la pression* Π, *l'onde est au moins du troisième ordre par rapport aux composantes* u, v, w *de la vitesse.*

FLUIDE VISQUEUX, COMPRESSIBLE ET BON CONDUCTEUR. — *Du second ordre par rapport à la densité* ρ *et à la pression* Π, *l'onde est au moins du troisième ordre par rapport aux composantes* u, v, w *de la vitesse et à la température* T.

FLUIDE VISQUEUX, COMPRESSIBLE ET MAUVAIS CONDUCTEUR. — *Du second ordre par rapport à la densité* ρ, *à la température* T *et à la pression* Π, *l'onde est au moins du troisième ordre par rapport aux composantes* u, v, w *de la vitesse.*

§ 3. — DES ONDES DU TROISIÈME ORDRE PAR RAPPORT A CERTAINS ÉLÉMENTS DU MOUVEMENT.

Continuant notre analyse, nous allons supposer que la surface ϖ est au moins onde du troisième ordre relativement aux grandeurs

$$u, \quad v, \quad w, \quad \rho, \quad T.$$

En ce qui concerne la pression Π, nous supposerons seulement qu'elle est au moins du second ordre.

Selon les lemmes de M. Hadamard, énoncés et démontrés au Chapitre précédent, les dérivées du troisième ordre $(u_2 - u_1)$, $(v_2 - v_1)$, $(w_2 - w_1)$ s'expriment toutes, sur la surface ϖ, au moyen de quatre vecteurs (l_0, m_0, n_0), (l_1, m_1, n_1), (l_2, m_2, n_2), (l_3, m_3, n_3). Si l'onde ϖ est persistante, on a

$$\begin{array}{lll} l_1 + \mathfrak{N} l_0 = 0, & l_2 + \mathfrak{N} l_1 = 0, & l_3 + \mathfrak{N} l_2 = 0, \\ m_1 + \mathfrak{N} m_0 = 0, & m_2 + \mathfrak{N} m_1 = 0, & m_3 + \mathfrak{N} m_2 = 0, \\ n_1 + \mathfrak{N} n_0 = 0, & n_2 + \mathfrak{N} n_1 = 0, & n_3 + \mathfrak{N} n_2 = 0. \end{array}$$

Il suffira de démontrer que

$$l_0 = 0, \quad m_0 = 0, \quad n_0 = 0 \tag{182}$$

pour prouver que toutes les dérivées partielles du troisième ordre de $(u_2 - u_1)$, $(v_2 - v_1)$, $(w_2 - w_1)$ sont nulles sur la surface ϖ, et que celle-ci est une onde au moins du quatrième ordre pour les composantes u, v, w de la vitesse.

Toutes les dérivées partielles du second ordre de la différence $(\Pi_2 - \Pi_1)$ s'expriment, sur la surface σ, au moyen de trois quantités P_0, P_1, P_2, liées par les relations

$$P_1 + \mathfrak{N} P_0 = 0, \qquad P_2 + \mathfrak{N} P_1 = 0.$$

Il suffira de prouver que l'on a

$$P_0 = 0 \tag{183}$$

pour démontrer que l'onde σ est au moins du troisième ordre par rapport à la pression Π.

Considérons les équations, vérifiées en tout point du fluide [égalités (135) et (158)],

$$\begin{gathered}\frac{\partial \Pi}{\partial x} - \rho(X_i + X_e - \gamma_x) - (\lambda + \mu)\frac{\partial \theta}{\partial x} - \mu \Delta u - \theta \frac{\partial \lambda}{\partial x} \\ - 2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial \mu}{\partial x} - \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\frac{\partial \mu}{\partial y} - \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)\frac{\partial \mu}{\partial z} = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{gathered}$$

En différentiant la première de ces égalités par rapport à x, la seconde par rapport à y et la troisième par rapport à z, nous obtenons trois nouvelles égalités, vérifiées en tout point du fluide, et qui sont

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2} - (\lambda + \mu)\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \mu \frac{\partial}{\partial x}\Delta u + \ldots = 0, \\ &\frac{\partial^2 \Pi}{\partial y^2} - (\lambda + \mu)\frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} - \mu \frac{\partial}{\partial y}\Delta v + \ldots = 0, \\ &\frac{\partial^2 \Pi}{\partial z^2} - (\lambda + \mu)\frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} - \mu \frac{\partial}{\partial z}\Delta w + \ldots = 0,\end{aligned}\right. \tag{184}$$

les ... désignant des termes qui varient d'une manière continue lorsqu'on traverse la surface σ.

Ces égalités montrent de suite que l'on a, sur la surface σ,

$$\left\{\begin{aligned} &\{P_0 - [\lambda(\rho, T) + \mu(\rho, T)](\alpha l_0 + \beta m_0 + \gamma n_0)\}\alpha^2 - \mu(\rho, T)\alpha l_0 = 0, \\ &\{P_0 - [\lambda(\rho, T) + \mu(\rho, T)](\alpha l_0 + \beta m_0 + \gamma n_0)\}\beta^2 - \mu(\rho, T)\beta l_0 = 0, \\ &\{P_0 - [\lambda(\rho, T) + \mu(\rho, T)](\alpha l_0 + \beta m_0 + \gamma n_0)\}\gamma^2 - \mu(\rho, T)\gamma l_0 = 0.\end{aligned}\right. \tag{185}$$

En ajoutant ces égalités membre à membre, on trouve l'égalité

$$P_0 - [\lambda(\rho, T) + 2\mu(\rho, T)](\alpha l_0 + \beta m_0 + \gamma n_0) = 0. \tag{186}$$

Supposons d'abord que le fluide soit incompressible.

Nous avons, en tout point, $\theta = 0$, partant $\Delta\theta = 0$, ce qui donne, sur la surface σ,

$$\alpha l_0 + \beta m_0 + \gamma n_0 = 0. \tag{187}$$

L'égalité (186) devient alors

$$(183) \qquad P_0 = 0.$$

D'où le théorème suivant, invoqué sans démonstration au paragraphe précédent :

Au sein d'un fluide incompressible, une onde qui est au moins du troisième ordre par rapport à u, v, w et T, *est aussi au moins du troisième ordre par rapport à* Π.

Si le fluide est compressible, nous savons, par ce qui a été dit au § 1, que la surface σ, onde au moins du troisième ordre par rapport à ρ et à T, est au moins du troisième ordre par rapport à Π; nous avons donc l'égalité (183). Mais, d'autre part, nous avons l'inégalité [Ire Partie, inégalité (65)]

$$\lambda(\rho, T) + 2\mu(\rho, T) > 0.$$

Les égalités (183) et (186) nous donnent alors l'égalité (187).

Les égalités (183) et (187) étant vraies en toutes circonstances, les égalités (185) donnent

$$(182) \qquad l_0 = 0, \qquad m_0 = 0, \qquad n_0 = 0,$$

car on a [Ire Partie, inégalité (62 *bis*)]

$$\mu(\rho, T) > 0.$$

L'onde considérée est donc au moins du quatrième ordre par rapport aux composantes u, v, w de la vitesse.

Sur la surface σ, toutes les dérivées du troisième ordre de la différence $(\rho_2 - \rho_1)$ s'expriment au moyen de quatre grandeurs R_0, R_1, R_2, R_3, liées par les relations

$$(188) \qquad R_1 + \mathfrak{N} R_0 = 0, \qquad R_2 + \mathfrak{N} R_1 = 0, \qquad R_3 + \mathfrak{N} R_2 = 0.$$

L'égalité $R_0 = 0$ enseigne que la surface σ est onde au moins du quatrième ordre pour la densité ρ.

Si le fluide est compressible, on a, en chaque point et à chaque instant,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\rho u + \frac{\partial}{\partial y}\rho v + \frac{\partial}{\partial z}\rho w = 0$$

et, par conséquent,

$$\Delta\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\rho u + \frac{\partial}{\partial y}\rho v + \frac{\partial}{\partial z}\rho w\right) = 0.$$

Cette égalité peut s'écrire

$$\frac{\partial}{\partial t}\Delta\rho + u\frac{\partial}{\partial x}\Delta\rho + v\frac{\partial}{\partial y}\Delta\rho + w\frac{\partial}{\partial z}\Delta\rho + \ldots = 0,$$

... désignant des termes qui varient d'une manière continue au travers de la surface σ.

On en conclut sans peine, en vertu des égalités (188), que l'on a, sur la surface σ,

$$(189) \qquad (\alpha u + \beta v + \gamma w - \mathfrak{N})R_0 = 0.$$

Sur la surface σ, les dérivées du troisième ordre de la température T s'expriment au moyen de quatre quantités Θ_0, Θ_1, Θ_2, Θ_3, liées par les relations

$$(190) \qquad \Theta_1 + \mathfrak{N}\Theta_0 = 0, \qquad \Theta_2 + \mathfrak{N}\Theta_1 = 0, \qquad \Theta_3 + \mathfrak{N}\Theta_2 = 0.$$

Si l'on a

$$(191) \qquad \Theta_0 = 0,$$

l'onde considérée est au moins du quatrième ordre par rapport à la température T.

Supposons d'abord le fluide *bon conducteur*. En tout point et à tout instant sont vérifiées la relation supplémentaire [Ire Partie, égalité (94)] et aussi les égalités que l'on obtient en différentiant celle-ci par rapport à x, ou à y, ou à z. Ces dernières égalités peuvent s'écrire

$$k(\rho, T)\frac{\partial}{\partial x}\Delta T + \ldots = 0,$$

$$k(\rho, T)\frac{\partial}{\partial y}\Delta T + \ldots = 0,$$

$$k(\rho, T)\frac{\partial}{\partial z}\Delta T + \ldots = 0,$$

les ... désignant des termes qui varient d'une manière continue au travers de la surface σ. On en conclut sans peine que l'on a, sur la surface σ,

$$\alpha\Theta_0 = 0, \qquad \beta\Theta_0 = 0, \qquad \gamma\Theta_0 = 0,$$

ce qui entraîne l'égalité (191).

Supposons maintenant le fluide *mauvais conducteur*. L'égalité (180) est vérifiée en tout point et à tout instant; il en est de même de l'égalité

$$\Delta J = 0$$

qui peut s'écrire

$$\frac{T}{E}\rho\frac{\partial^2\zeta}{\partial T^2}\left(u\frac{\partial}{\partial x}\Delta T + v\frac{\partial}{\partial y}\Delta T + w\frac{\partial}{\partial z}\Delta T + \frac{\partial}{\partial t}\Delta T\right) + \ldots = 0,$$

. . . désignant un ensemble de termes qui varient d'une manière continue au travers de la surface ϖ. On en conclut, en vertu des égalités (190), que l'on a, en tout point de la surface ϖ,

$$(\alpha u + \beta v + \gamma w - \mathcal{N})\Theta_0 = 0. \tag{192}$$

La discussion s'achève alors comme au paragraphe précédent et conduit aux conclusions que voici :

Au sein d'un FLUIDE VISQUEUX, INCOMPRESSIBLE ET BON CONDUCTEUR, *on ne peut observer aucune onde qui soit du troisième ordre par rapport à certains éléments du mouvement et d'ordre au moins égal à* 3 *pour les autres éléments.*

Au sein de tout autre FLUIDE VISQUEUX, *on peut observer une telle onde.*

Si le fluide est INCOMPRESSIBLE ET MAUVAIS CONDUCTEUR, *cette onde est du troisième ordre pour* T *et* Π *et d'ordre au moins égal à* 4 *pour* u, v, w.

Si le fluide est COMPRESSIBLE ET BON CONDUCTEUR, *cette onde est du troisième ordre pour* ρ *et* Π *et d'ordre au moins égal à* 4 *pour* u, v, w *et* T.

Si le fluide est COMPRESSIBLE ET MAUVAIS CONDUCTEUR, *cette onde est du troisième ordre pour* ρ, T *et* Π *et d'ordre au moins égal à* 4 *pour* u, v, w.

Les deux masses fluides que sépare la surface de l'onde demeurent les mêmes pendant toute la durée du mouvement, car on a

$$\mathcal{N} = \alpha u + \beta v + \gamma w. \tag{193}$$

§ 4. — Résumé des propriétés des ondes au sein des fluides visqueux [1].

On voit sans peine que les démonstrations données aux §§ 2 et 3 s'étendent de proche en proche et s'appliquent aux ondes de tous ordres. Si l'on réunit alors ce qui a été dit dans le présent Chapitre aux résultats obtenus au Chapitre I, § 11, on parvient à des théorèmes entièrement généraux au sujet des ondes qui peuvent persister en un fluide visqueux. Ces théorèmes s'appliquent même aux surfaces de discontinuité pour certains éléments, surfaces qui sont des ondes d'ordre 0 par rapport à ces éléments.

---

[1] *Des ondes qui peuvent persister en un fluide visqueux* (*Comptes rendus*, t. CXXXIII, 14 octobre 1901, p. 579).

Voici ces théorèmes :

THÉORÈME I. — *Au sein d'un* FLUIDE VISQUEUX, INCOMPRESSIBLE ET BON CONDUCTEUR, *il ne peut persister aucune onde, quel qu'en soit l'ordre par rapport aux divers éléments du mouvement.*

En toute la masse d'un tel fluide et pendant toute la durée du mouvement, sauf peut-être à un instant isolé, u, v, w *et* T *sont des fonctions continues et analytiques de* x, y, z, t.

THÉORÈME II. — *Au sein d'un* FLUIDE VISQUEUX *qui est ou* COMPRESSIBLE, *ou* MAUVAIS CONDUCTEUR, *ou* A LA FOIS COMPRESSIBLE ET MAUVAIS CONDUCTEUR, *on peut observer des ondes persistantes.*

Si le fluide est INCOMPRESSIBLE ET MAUVAIS CONDUCTEUR, *une onde d'ordre* n *par rapport à* T *et à* Π *est au moins d'ordre* $(n+1)$ *par rapport à* u, v, w.

Si le fluide est COMPRESSIBLE ET BON CONDUCTEUR, *une onde d'ordre* n *par rapport à* ρ *et à* Π *est au moins d'ordre* $(n+1)$ *par rapport à* u, v, w *et à* T.

Si le fluide est COMPRESSIBLE ET MAUVAIS CONDUCTEUR, *une onde d'ordre* n *par rapport à* ρ, *à* T *et à* Π *est au moins d'ordre* $(n+1)$ *par rapport à* u, v, w.

THÉORÈME III. — *La vitesse de déplacement de l'onde est égale, en chacun des points de cette onde, à la projection de la vitesse du fluide sur la normale à l'onde :*

$$\mathfrak{N} = \alpha u + \beta v + \gamma w.$$

Les ondes partagent donc le fluide en masses qui demeurent les mêmes pendant toute la durée du mouvement.

Au sein de chacune de ces masses u, v, w, ρ, T, Π *sont des fonctions continues et analytiques de* x, y, z, t.

CHAPITRE IV.

DES ONDES DANS LES FLUIDES PARFAITS.

§ 1. — QUELQUES PROPRIÉTÉS THERMODYNAMIQUES DES FLUIDES SANS VISCOSITÉ (1).

Dans ce Chapitre, nous nous proposons d'étudier les propriétés des *fluides parfaits,* c'est-à-dire des fluides pour lesquels les deux coefficients de viscosité

(1) *Sur les chaleurs spécifiques des fluides dont les éléments sont soumis à leurs actions mutuelles* (*Comptes rendus*, t. CXXXII, 11 février 1901, p. 292).

sont identiquement nuls :

$$\lambda(\rho, T) = 0, \qquad \mu(\rho, T) = 0.$$

Nous exposerons d'abord quelques considérations sur les coefficients calorifiques de ces fluides, considérations qui nous seront utiles ensuite.

Dans une modification réelle ou virtuelle où la densité ρ et la température T varient de $\delta\rho$, δT, la masse élémentaire dm dégage une quantité de chaleur dQ que donne l'égalité (82) de la première Partie, à condition d'y supprimer le travail $d\tau_v\, d\varpi$ des actions de viscosité; nous avons donc

$$dQ = \frac{T}{E}\left(\frac{\partial^2 \zeta(\rho, T)}{\partial\rho\, \partial T}\delta\rho + \frac{\partial^2 \zeta(\rho, T)}{\partial T^2}\delta T\right). \tag{194}$$

La quantité

$$c(\rho, T) = -\frac{T}{E}\frac{\partial^2 \zeta(\rho, T)}{\partial T^2} \tag{195}$$

est [Ire Partie, égalité (84)] la *chaleur spécifique à densité constante* du fluide.

Selon le *postulat de Helmholtz,* cette quantité est essentiellement positive :

$$c > 0, \qquad \frac{\partial^2 \zeta(\rho, T)}{\partial T^2} < 0. \tag{196}$$

D'autre part, en tout point non situé sur une surface de discontinuité, nous avons [Ire Partie, égalité (75)]

$$\Pi + \rho^2(A_i + A_e) - \rho\frac{\partial \zeta(\rho, T)}{\partial \rho} = 0. \tag{197}$$

Nous allons écrire cette dernière condition sous une forme un peu différente.

Considérons les fonctions $\mathcal{A}_i(R, x, y, z, t)$, $\mathcal{A}_e(R, x, y, z, t)$, définies en la Ire Partie, Chapitre I, § 4.

Nous aurons

$$A_i(x, y, z, t) = \mathcal{A}_i(\rho, x, y, z, t),$$
$$A_e(x, y, z, t) = \mathcal{A}_e(\rho, x, y, z, t)$$

L'égalité (197) pourra alors s'écrire

$$\Pi + \rho^2[\mathcal{A}_i(\rho, x, y, z, t) + \mathcal{A}_e(\rho, x, y, z, t)] - \rho^2\frac{\partial \zeta(\rho, T)}{\partial \rho} = 0. \tag{198}$$

Cette égalité peut s'interpréter.

Supprimons toutes les parties du fluide qui sont contiguës à l'élément dm;

mais, aux corps extérieurs qui exercent l'action $\mathcal{A}_e(\rho, x, y, z, t)$, adjoignons d'autres corps exerçant précisément une action égale à $\mathcal{A}_i(\rho, x, y, z, t)$. Pour conserver à l'élément dm sa densité et son état de repos ou de mouvement, il faudra appliquer à sa surface une pression Π donnée par l'égalité (198).

Supposons ces corps extérieurs fictifs choisis de telle manière que la forme de la fonction $\mathcal{A}_i(\rho, x, y, z, t)$ demeure invariable. A des variations $\delta\rho$, δT de la densité ρ et de la température T correspondrait une variation $\delta\Pi$ de la pression Π donnée par l'égalité

$$(199)\qquad \delta\Pi + \rho\left[2\left(\mathcal{A}_i + \mathcal{A}_e - \frac{\partial\zeta}{\partial\rho}\right) + \rho\left(\frac{\partial\mathcal{A}_i}{\partial\rho} + \frac{\partial\mathcal{A}_e}{\partial\rho} - \frac{\partial^2\zeta}{\partial\rho^2}\right)\right]\delta\rho - \rho^2\frac{\partial^2\zeta}{\partial\rho\,\partial T}\delta T = 0.$$

Posons

$$(200)\qquad J(\rho, T, x, y, z, t) = \rho\left[2\left(\frac{\partial\zeta}{\partial\rho} - \mathcal{A}_i - \mathcal{A}_e\right) + \rho\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial\rho^2} - \frac{\partial\mathcal{A}_i}{\partial\rho} - \frac{\partial\mathcal{A}_e}{\partial\rho}\right)\right].$$

L'égalité (199) nous enseigne que si, dans la modification définie plus haut à laquelle cette égalité se rapporte, la température T demeure invariable, la densité ρ augmente de $\left(\frac{d\rho}{d\Pi}\right)_T \delta\Pi$, avec

$$(201)\qquad \left(\frac{d\rho}{d\Pi}\right)_T = \frac{1}{J},$$

tandis que si la pression Π demeure invariable, la densité augmente de $\left(\frac{d\rho}{dT}\right)_\Pi \delta T$, avec

$$(202)\qquad \left(\frac{d\rho}{dT}\right)_\Pi = -\frac{\rho^2}{J}\frac{\partial^2\zeta}{\partial\rho\,\partial T}.$$

Au sein d'un fluide qui est en état d'équilibre stable, on a [1]

$$(203)\qquad J > 0.$$

Toutes les fois que cette inégalité est vérifiée, $\left(\frac{d\rho}{d\Pi}\right)_T$ est positif et $\frac{\partial^2\zeta}{\partial\rho\,\partial T}$ est de signe contraire à $\left(\frac{d\rho}{dT}\right)_\Pi$.

Considérons une modification du genre de celles que nous venons de définir et où la pression Π garde une valeur invariable; ρ croît de $\left(\frac{d\rho}{dT}\right)_\Pi \delta T$; selon les éga-

---

(1) *Sur la stabilité de l'équilibre d'une masse fluide dont les éléments sont soumis à leurs actions mutuelles* [*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 5e série, t. III, p. 174; condition (63); 1897].

lités (194) et (195), la quantité de chaleur dégagée par l'élément dm devient

$$dQ = \left[\frac{T}{E}\frac{\partial^2\zeta}{\partial\rho\,\partial T}\left(\frac{d\rho}{dT}\right)_{\Pi} - c(\rho, T)\right]\delta T$$

ou bien, en vertu de l'égalité (202),

$$(204) \qquad dQ = -C(\rho, T, x, y, z, t)\,\delta T,$$

en posant

$$(205) \qquad C(\rho, T, x, y, z, t) = c(\rho, T) + \frac{T}{E}\frac{\rho^2}{J(\rho, T, x, y, z, t)}\left[\frac{\partial^2\zeta(\rho, T)}{\partial\rho\,\partial T}\right]^2.$$

La quantité $C(\rho, T, x, y, z, t)$ peut, en vertu de l'égalité (204), être regardée comme la *chaleur spécifique à pression constante* de l'élément dm; elle diffère de la chaleur spécifique à densité constante par un caractère essentiel; pour la connaître, il ne suffit pas de connaître la densité ρ et la température T au sein de l'élément dm; il faut en outre connaître la disposition et l'état des corps dont proviennent les actions extérieures, la figure du fluide et la distribution des masses au sein de cette figure.

Si la condition de stabilité (203) *est satisfaite, la chaleur spécifique à pression constante* $C(\rho, T, x, y, z, t)$ *est, en chaque point, supérieure à la chaleur spécifique à densité constante.*

Considérons une des modifications pour lesquelles est écrite l'égalité (199) et supposons qu'elle constitue, pour l'élément dm, une modification *isentropique*.

L'entropie $\sigma(\rho, T)\,dm$ de l'élément dm est définie par l'égalité [I[re] Partie, égalité (85)]

$$\sigma(\rho, T) = -\frac{1}{E}\frac{\partial\zeta(\rho, T)}{\partial T}.$$

On a donc, en une modification isentropique quelconque,

$$(206) \qquad \frac{\partial^2\zeta(\rho, T)}{\partial\rho\,\partial T}\delta\rho + \frac{\partial^2\zeta(\rho, T)}{\partial T^2}\delta T = 0.$$

Entre les égalités (199) et (206), éliminons δT et remplaçons $\delta\rho$ par $\left(\frac{d\rho}{d\Pi}\right)_Q \delta\Pi$. Nous trouverons, en tenant compte de l'égalité (200),

$$(207) \qquad \left[J\frac{\partial^2\zeta}{\partial T^2} - \rho^2\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial\rho\,\partial T}\right)^2\right]\left(\frac{d\rho}{d\Pi}\right)_Q = \frac{\partial^2\zeta}{\partial T^2},$$

ce qui peut encore s'écrire

$$\left[-\frac{T}{E}\frac{\partial^2\zeta}{\partial T^2}+\frac{T}{E}\frac{\rho^2}{J}\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial\rho\,\partial T}\right)^2\right]\left(\frac{d\rho}{d\Pi}\right)_Q=-\frac{1}{J}\frac{T}{E}\frac{\partial^2\zeta}{\partial T^2}$$

ou bien, en vertu des égalités (201), (195) et (204),

$$C(\rho, T, x, y, z, t)\left(\frac{d\rho}{d\Pi}\right)_Q = c(\rho, T)\left(\frac{d\rho}{d\Pi}\right)_T, \tag{208}$$

égalité qui est la généralisation de la classique *relation de Reech*.

La relation (206), qui exprime que la modification est isentropique, peut s'écrire, en vertu de l'égalité (202),

$$\delta T = -\frac{J\left(\frac{d\rho}{dT}\right)_\Pi}{\rho^2\frac{\partial^2\zeta}{\partial T^2}}\delta\rho$$

ou bien, en vertu de l'égalité (195),

$$\delta T = \frac{TJ\left(\frac{d\rho}{dT}\right)_\Pi}{Ec(\rho, T)}\delta\rho.$$

Mais ici $\delta\rho = \left(\frac{d\rho}{d\Pi}\right)_Q\delta\Pi$; si donc on tient compte des égalités (201) et (208) et si l'on remplace δT par $\left(\frac{dT}{d\Pi}\right)_Q\delta\Pi$, on trouve l'égalité

$$\left(\frac{dT}{d\Pi}\right)_Q = \frac{T}{E\,C(\rho, T, x, y, z, t)}\left(\frac{d\rho}{dT}\right)_\Pi,$$

ce qui est la généralisation d'une relation due à Joule.

Ainsi, toutes les lois que l'on démontre, en Thermodynamique élémentaire, pour un fluide soumis uniquement à une pression normale et uniforme, s'étendent à un fluide dont les éléments exercent les uns sur les autres des actions quelconques, newtoniennes ou non. Mais tandis que, dans le premier cas, ces lois sont générales, elles ne s'appliquent, dans le second cas, qu'à certaines modifications virtuelles définies d'une manière particulière, à savoir celles pour lesquelles il est permis d'écrire la relation (199).

Malgré le caractère abstrait et, semble-t-il, purement artificiel, des considérations que nous venons de développer, nous allons en reconnaître l'intérêt par l'étude de la propagation des ondes au sein des fluides parfaits.

§ 2. — Propagation des ondes au sein des fluides parfaits. Emploi des équations d'Euler.

La propagation des ondes dans les fluides parfaits a déjà fait l'objet de recherches extrêmement importantes de la part d'Hugoniot ([1]); c'est à cette occasion qu'ont été imaginées les méthodes développées aux Chapitres II, III et IV du présent écrit. Toutefois, l'analyse d'Hugoniot est susceptible de certains développements et de certaines généralisations ([2]) que favorise singulièrement l'emploi des vecteurs de M. Hadamard.

Cette étude de la propagation des ondes dans les fluides parfaits peut se faire, comme l'a déjà observé Hugoniot, soit au moyen des équations hydrodynamiques dites *équations d'Euler,* soit au moyen des équations hydrodynamiques dites *équations de Lagrange;* nous allons employer successivement ces deux procédés, en usant d'abord des équations d'Euler.

Pour obtenir les équations d'Euler, il suffit de prendre les équations générales de l'Hydrodynamique [Ire Partie, égalités (79)] et d'y annuler les fonctions $\lambda(\rho, T)$, $\mu(\rho, T)$. Nous obtenons alors les équations

$$(209)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial \Pi}{\partial x} - \rho(X_i + X_e) + \rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right) = 0,\\ &\frac{\partial \Pi}{\partial y} - \rho(Y_i + Y_e) + \rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}\right) = 0,\\ &\frac{\partial \Pi}{\partial z} - \rho(Z_i + Z_e) + \rho\left(\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}\right) = 0. \end{aligned}\right.$$

A ces équations, il faut joindre l'*équation de continuité*

$$(210)\quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\rho u + \frac{\partial}{\partial y}\rho v + \frac{\partial}{\partial z}\rho w = 0,$$

dans le cas où le fluide est compressible, la relation

$$(198)\quad \Pi + \rho^2[\mathcal{A}_i(\rho, x, y, z, t) + \mathcal{A}_e(\rho, x, y, z, t)] - \rho^2\frac{\partial \zeta(\rho, T)}{\partial \rho} = 0$$

et, enfin, la *relation supplémentaire*.

([1]) Hugoniot, *Mémoire sur la propagation du mouvement dans un fluide indéfini* (*Journal de Mathématiques pures et appliquées,* 4e série, t. III, 1887, p. 188, et t. IV, 1888, p. 153).

([2]) *Sur les ondes longitudinales et transversales dans les fluides parfaits* (*Comptes rendus,* t. CXXXII, 3 juin 1901, p. 1303).

Imaginons qu'une surface σ soit onde persistante du premier ordre pour u, v, w. Il existera un vecteur (l_0, m_0, n_0) tel que, sur la surface σ,

$$(211)\quad \left\{\begin{array}{llll} \dfrac{\partial(u_2-u_1)}{\partial x}=\alpha l_0, & \dfrac{\partial(u_2-u_1)}{\partial y}=\beta l_0, & \dfrac{\partial(u_2-u_1)}{\partial z}=\gamma l_0, & \dfrac{\partial(u_2-u_1)}{\partial t}+\mathfrak{N} l_0=0, \\ \dfrac{\partial(v_2-v_1)}{\partial x}=\alpha m_0, & \dfrac{\partial(v_2-v_1)}{\partial y}=\beta m_0, & \dfrac{\partial(v_2-v_1)}{\partial z}=\gamma m_0, & \dfrac{\partial(v_2-v_1)}{\partial t}+\mathfrak{N} m_0=0, \\ \dfrac{\partial(w_2-w_1)}{\partial x}=\alpha n_0, & \dfrac{\partial(w_2-w_1)}{\partial y}=\beta n_0, & \dfrac{\partial(w_2-w_1)}{\partial z}=\gamma n_0, & \dfrac{\partial(w_2-w_1)}{\partial t}+\mathfrak{N} n_0=0. \end{array}\right.$$

Moyennant ces égalités, on a, sur la surface σ,

$$(212)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial u_2}{\partial t}+u\dfrac{\partial u_2}{\partial x}+v\dfrac{\partial u_2}{\partial y}+w\dfrac{\partial u_2}{\partial z} \\ -\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial t}+u\dfrac{\partial u_1}{\partial x}+v\dfrac{\partial u_1}{\partial y}+w\dfrac{\partial u_1}{\partial z}\right)=(\alpha u+\beta v+\gamma w-\mathfrak{N})l_0, \\ \dfrac{\partial v_2}{\partial t}+u\dfrac{\partial v_2}{\partial x}+v\dfrac{\partial v_2}{\partial y}+w\dfrac{\partial v_2}{\partial z} \\ -\left(\dfrac{\partial v_1}{\partial t}+u\dfrac{\partial v_1}{\partial x}+v\dfrac{\partial v_1}{\partial y}+w\dfrac{\partial v_1}{\partial z}\right)=(\alpha u+\beta v+\gamma w-\mathfrak{N})m_0, \\ \dfrac{\partial w_2}{\partial t}+u\dfrac{\partial w_2}{\partial x}+v\dfrac{\partial w_2}{\partial y}+w\dfrac{\partial w_2}{\partial z} \\ -\left(\dfrac{\partial w_1}{\partial t}+u\dfrac{\partial w_1}{\partial x}+v\dfrac{\partial w_1}{\partial y}+w\dfrac{\partial w_1}{\partial z}\right)=(\alpha u+\beta v+\gamma w-\mathfrak{N})n_0. \end{array}\right.$$

D'après ce que nous avons vu au Chapitre I, § 11, la surface σ, au travers de laquelle les composantes de la vitesse varient d'une manière continue, est onde au moins du premier ordre pour la pression Π et la densité ρ; il existe donc deux grandeurs P_0, R_0 telles que l'on ait, en tout point de la surface σ,

$$(213)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial(\Pi_2-\Pi_1)}{\partial x}=\alpha P_0, \quad \dfrac{\partial(\Pi_2-\Pi_1)}{\partial y}=\beta P_0, \quad \dfrac{\partial(\Pi_2-\Pi_1)}{\partial z}=\gamma P_0, \\ \dfrac{\partial(\Pi_2-\Pi_1)}{\partial t}+\mathfrak{N} P_0=0, \end{array}\right.$$

$$(214)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial(\rho_2-\rho_1)}{\partial x}=\alpha R_0, \quad \dfrac{\partial(\rho_2-\rho_1)}{\partial y}=\beta R_0, \quad \dfrac{\partial(\rho_2-\rho_1)}{\partial z}=\gamma R_0, \\ \dfrac{\partial(\rho_2-\rho_1)}{\partial t}+\mathfrak{N} R_0=0. \end{array}\right.$$

Moyennant les égalités (211) et (214), l'équation de continuité (210) montre

que l'on a, en tout point de la surface σ,

$$(\alpha u + \beta v + \gamma w - \mathfrak{N}) R_0 + \rho(\alpha l_0 + \beta m_0 + \gamma n_0) = 0. \tag{215}$$

En traversant la surface σ, les grandeurs X_e, Y_e, Z_e varient certainement d'une manière continue; il est aisé de voir qu'il en est de même de X_i, Y_i, Z_i; si, en effet, on se reporte à la définition de la fonction $\mathfrak{V}_i(R, x, y, z, t)$ donnée en la Ire Partie, Chapitre I, § 4, on voit que X_i, Y_i, Z_i s'obtiennent en remplaçant R par $\rho(x, y, z, t)$ dans $-\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial x}$, $-\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial y}$, $-\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial z}$; or, d'après ce qui a été supposé en cet endroit, la continuité de ρ assure la continuité de $-\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial x}$, $-\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial y}$, $-\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial z}$.

Les égalités (209), (212), (213) nous montrent alors que l'on a, en tout point de la surface σ,

$$\left\{\begin{array}{l} P_0\alpha + \rho(\alpha u + \beta v + \gamma w - \mathfrak{N}) l_0 = 0, \\ P_0\beta + \rho(\alpha u + \beta v + \gamma w - \mathfrak{N}) m_0 = 0, \\ P_0\gamma + \rho(\alpha u + \beta v + \gamma w - \mathfrak{N}) n_0 = 0. \end{array}\right. \tag{216}$$

Les égalités (215) et (216) sont vraies aussi bien pour les fluides compressibles que pour les fluides incompressibles, et cela quelle que soit la forme de la relation supplémentaire. Discutons, tout d'abord, les conséquences de ces égalités.

Multiplions respectivement les égalités (216) par α, β, γ et ajoutons membre à membre les égalités obtenues; nous trouvons l'égalité

$$P_0 + \rho(\alpha u + \beta v + \gamma w - \mathfrak{N})(\alpha l_0 + \beta m_0 + \gamma n_0) = 0. \tag{217}$$

D'autre part, multiplions respectivement les égalités (216) par l_0, m_0, n_0 et ajoutons membre à membre les résultats obtenus. Nous trouvons l'égalité

$$P_0(\alpha l_0 + \beta m_0 + \gamma n_0) + \rho(\alpha u + \beta v + \gamma w - \mathfrak{N})(l_0^2 + m_0^2 + n_0^2) = 0. \tag{218}$$

Parvenus à ce point, nous distinguerons deux cas :

Premier cas. — *L'onde, du premier ordre par rapport aux composantes u, v, w de la vitesse, est d'ordre supérieur au premier pour la densité ρ :*

$$R_0 = 0. \tag{219}$$

Ce cas est évidemment le seul qui puisse se présenter en un fluide incompressible.

Les égalités (219) et (215) donnent

$$\alpha l_0 + \beta m_0 + \gamma n_0 = 0. \tag{220}$$

Selon la dénomination introduite au Chapitre II, § 5, l'onde est transversale.

L'égalité (217) donne alors

$$P_0 = 0. \tag{221}$$

L'onde est d'ordre supérieur au premier par rapport à la pression.

Enfin, l'égalité (218) donne

$$\mathfrak{N} = \alpha u + \beta v + \gamma w. \tag{222}$$

Les deux masses fluides que sépare l'onde considérée demeurent les mêmes pendant toute la durée du mouvement.

Moyennant les trois égalités (215), (217), (218), il est très facile de voir que chacune des quatre égalités (219), (220), (221), (222) a pour conséquence les trois autres. Donc, *chacune des quatre propositions que nous venons d'énoncer entraîne les trois autres.*

Deuxième cas. — *L'onde, du premier ordre par rapport aux composantes u, v, w de la vitesse, est aussi du premier ordre par rapport à la densité ρ.*

Dans ce cas, on n'a pas l'égalité (219) et, partant, on ne peut avoir aucune des trois égalités (220), (221), (222); en particulier, on n'a pas

$$P_0 = 0. \tag{221}$$

L'onde considérée est certainement du premier ordre par rapport à la pression.

Comme on n'a ni l'égalité (221), ni l'égalité (222), les égalités (216) donnent

$$\frac{l_0}{\alpha} = \frac{m_0}{\beta} = \frac{n_0}{\gamma}. \tag{223}$$

Selon la terminologie définie au Chapitre II, § 5, L'ONDE CONSIDÉRÉE EST LONGITUDINALE.

Les égalités (215) et (217) donnent

$$[(\alpha u + \beta v + \gamma w - \mathfrak{N})^2 R_0 - P_0](\alpha l_0 + \beta m_0 + \gamma n_0) = 0.$$

Dans le cas actuel, où aucune des égalités (219), (220), (221) n'est vérifiée, cette égalité devient

$$(\mathfrak{N} - \alpha u - \beta v - \gamma w)^2 = \frac{P_0}{R_0}. \tag{224}$$

Elle fait connaître la valeur de $\mathfrak{N}$.

Pour pousser plus loin et déterminer la valeur de $\frac{P_0}{R_0}$, il faut faire usage de l'égalité (198) (ce qui est assurément permis, puisque ce second cas ne peut se rencontrer qu'en un fluide compressible) et de la relation supplémentaire.

En tenant compte de la définition de J, donnée par l'égalité (200), l'égalité (198) nous donne

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x} - J\frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho^2 \frac{\partial}{\partial x}(\mathcal{A}_i + \mathcal{A}_e) - \rho^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \rho\, \partial T}\frac{\partial T}{\partial x} = 0. \tag{225}$$

L'onde considérée étant au moins du premier ordre pour la température T (Chapitre I, § 11), il existe une grandeur Θ_0 telle qu'en tout point de la surface σ

$$\frac{\partial(T_2 - T_1)}{\partial x} = \alpha\Theta_0, \quad \frac{\partial(T_2 - T_1)}{\partial y} = \beta\Theta_0, \quad \frac{\partial(T_2 - T_1)}{\partial z} = \gamma\Theta_0. \tag{226}$$

Au passage de la surface σ, $\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \rho\, \partial T}$ varie d'une manière continue comme ρ et T; selon les principes posés en la I[re] Partie, Chapitre I, § 4, il en est de même de $\mathcal{A}_i$, $\frac{\partial \mathcal{A}_i}{\partial \rho}$, $\frac{\partial \mathcal{A}_i}{\partial x}$; enfin, il en est assurément de même de $\mathcal{A}_e$ et de ses dérivées partielles, partant de J. Dès lors, les égalités (213), (214), (225), (226) donnent, en tout point de la surface σ, la première des égalités

$$\left(P_0 - JR_0 - \rho^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \rho\, \partial T}\Theta_0\right)\alpha = 0,$$
$$\left(P_0 - JR_0 - \rho^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \rho\, \partial T}\Theta_0\right)\beta = 0,$$
$$\left(P_0 - JR_0 - \rho^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \rho\, \partial T}\Theta_0\right)\gamma = 0.$$

Les deux dernières s'établissent d'une manière analogue. Ces égalités donnent

$$P_0 - JR_0 - \rho^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \rho\, \partial T}\Theta_0 = 0. \tag{227}$$

Parvenus à ce point, nous devons scinder notre deuxième cas :

A. Le fluide est bon conducteur de la chaleur. — Dans ce cas, selon des considérations exposées au Chapitre III, § 1, considérations qui s'appliquent aussi bien aux fluides parfaits qu'aux fluides visqueux, on a

$$\Theta_0 = 0. \tag{154}$$

L'onde est d'ordre supérieur au premier par rapport à la température.

L'égalité (227) donne alors

$$\frac{P_0}{R_0} = J,$$

en sorte que l'égalité (224) devient

$$(228) \qquad (\mathfrak{N} - \alpha u - \beta v - \gamma w)^2 = J.$$

Elle nous enseigne qu'*une onde longitudinale du premier ordre ne peut persister qu'au sein d'un fluide où la condition* (203) *est vérifiée.*

Selon l'égalité (201), l'égalité (228) peut encore s'écrire

$$(228\ bis) \qquad (\mathfrak{N} - \alpha u - \beta v - \gamma w)^2 = \frac{1}{\left(\frac{d\rho}{d\Pi}\right)_T}.$$

B. Le fluide est mauvais conducteur de la chaleur. — Dans le temps dt, chaque élément $d\varpi$ dégage une quantité de chaleur égale à o. Selon l'égalité (90) de la Ire Partie, cette condition s'écrit

$$(229) \qquad \frac{\partial^2 \zeta}{\partial T^2}\left(\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial x}u + \frac{\partial T}{\partial y}v + \frac{\partial T}{\partial z}w\right) - \rho\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \rho\, \partial T}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) = 0.$$

Selon les égalités (211) et (226), elle nous enseigne que l'on a, en tout point de la surface σ,

$$(230) \qquad \frac{\partial^2 \zeta}{\partial T^2}(\alpha u + \beta v + \gamma w - \mathfrak{N})\Theta_0 - \rho\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \rho\, \partial T}(\alpha l_0 + \beta m_0 + \gamma n_0) = 0.$$

Comme on n'a certainement ni l'égalité (220), ni l'égalité (222), Θ_0 a une valeur finie et différente de o. *L'onde considérée est assurément du premier ordre par rapport à la température.*

Les égalités (215) et (230) donnent

$$\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial T^2}\Theta_0 + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \rho\, \partial T}R_0\right)(\alpha u + \beta v + \gamma w - \mathfrak{N}) = 0,$$

ou bien, puisque l'égalité (222) n'est sûrement pas vérifiée,

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial T^2}\Theta_0 + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \rho\, \partial T}R_0 = 0.$$

L'égalité (227) devient alors

$$\frac{P_0}{R_0} = J - \frac{\rho^2\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \rho\, \partial T}\right)^2}{\frac{\partial^2 \zeta}{\partial T^2}}.$$

L'égalité (224) devient donc

$$(231) \qquad (\mathcal{N} - \alpha u - \beta v - \gamma w)^2 = J - \frac{\rho^2 \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \rho \, \partial T}\right)^2}{\frac{\partial^2 \zeta}{\partial T^2}}.$$

Selon le postulatum de Helmholtz [inégalité (196)], $\frac{\partial^2 \zeta}{\partial T^2}$ est assurément négatif, le second membre de l'égalité (231) est donc certainement positif, partout où la condition (203) est vérifiée.

En vertu de l'égalité (207), l'égalité (231) peut s'écrire

$$(232) \qquad (\mathcal{N} - \alpha u - \beta v - \gamma w)^2 = \frac{1}{\left(\frac{d\rho}{d\Pi}\right)_Q}.$$

En vertu de l'égalité (208), l'égalité (232) devient

$$(233) \qquad (\mathcal{N} - \alpha u - \beta v - \gamma w)^2 = \frac{1}{\left(\frac{d\rho}{d\Pi}\right)_T} \frac{C(\rho, T, x, y, z, t)}{c(\rho, T)}.$$

L'égalité (154) s'applique, au sein d'un fluide bon conducteur, aussi bien à une onde transversale qu'à une onde longitudinale; il en est de même de l'égalité (227), si le fluide est mauvais conducteur et compressible; mais, dans ce cas, on a, en tout point d'une onde transversale,

$$P_0 = 0, \qquad R_0 = 0,$$

en sorte que l'égalité (227) redonne

$$(154) \qquad \Theta_0 = 0.$$

On peut donc compléter ainsi qu'il suit ce que nous savons déjà des ONDES TRANSVERSALES :

Au sein d'un fluide bon conducteur, ou bien au sein d'un fluide compressible et mauvais conducteur, une onde transversale du premier ordre par rapport à u, v, w est d'ordre supérieur à 1 par rapport à T. Au sein d'un fluide incompressible et mauvais conducteur, elle peut être du premier ordre par rapport à T.

Les diverses propositions que nous venons de démontrer touchant les ondes du premier ordre par rapport aux composantes u, v, w de la vitesse s'établissent sans peine pour les ondes d'ordre supérieur au premier; les méthodes à suivre sont

analogues à celles dont nous avons fait usage dans le cas des fluides visqueux, mais elles sont d'un emploi beaucoup plus simple. Nous laissons au lecteur le soin de les développer et nous nous bornerons à énoncer les théorèmes généraux que voici :

Au sein d'un fluide parfait, soumis à des actions newtoniennes ou non, il peut persister en général deux sortes d'onde d'ordre n par rapport aux composantes u, v, w de la vitesse (n étant au moins égal à 1). La première sorte est seule possible si le fluide est incompressible :

1° Des ondes transversales. — *Ces ondes sont au moins d'ordre $(n+1)$ par rapport à la densité et à la pression. Les deux masses fluides que sépare une telle onde sont les mêmes pendant toute la durée du mouvement, en sorte que la vitesse du déplacement de l'onde est donnée par la formule*

$$\mathfrak{N} = \alpha u + \beta v + \gamma w. \tag{222}$$

Enfin cette onde est au moins d'ordre $(n+1)$ par rapport à T, à moins que le fluide ne soit incompressible et mauvais conducteur, cas auquel elle peut être d'ordre n par rapport à T.

2° Des ondes longitudinales. — *Ces ondes sont aussi d'ordre n pour la densité et pour la pression.*

Au sein d'un fluide bon conducteur, *une telle onde est au moins d'ordre $(n+1)$ par rapport à la température T et sa vitesse de déplacement est donnée par la formule*

$$(\mathfrak{N} - \alpha u - \beta v - \gamma w)^2 = \frac{1}{\left(\frac{d\rho}{d\Pi}\right)_T}. \tag{228 bis}$$

Au sein d'un fluide mauvais conducteur, *une telle onde est d'ordre n par rapport à la température T et sa vitesse de déplacement est donnée par la formule*

$$(\mathfrak{N} - \alpha u - \beta v - \gamma w)^2 = \frac{1}{\left(\frac{d\rho}{d\Pi}\right)_T} \frac{C(\rho, T, x, y, z, t)}{c(\rho, T)}. \tag{233}$$

Cette dernière formule est la généralisation de celle que Laplace a donnée pour la vitesse de propagation du son dans l'air.

On remarquera l'analogie qui existe entre les résultats que nous venons d'obtenir pour les ondes d'ordre au moins égal à 1 par rapport à u, v, w et les résultats qui ont été énoncés, à la fin du § 8 et aux §§ 9 et 10 du Chapitre I, pour les surfaces de discontinuité ou ondes d'ordre 0 par rapport à u, v, w.

§ 3. — La méthode de Lagrange. — Considérations cinématiques.

Les problèmes relatifs aux fluides parfaits peuvent être traités par une méthode, distincte de la précédente, que l'on nomme habituellement *méthode de Lagrange*. Vu l'importance des résultats que nous venons d'obtenir par la méthode dite *d'Euler*, nous allons chercher à les retrouver par la méthode dite *de Lagrange*.

Nous allons tout d'abord rappeler quelques formules, de nature cinématique, obtenues par cette méthode.

Dans la méthode de Lagrange, chaque point matériel est déterminé par ses coordonnées a, b, c, à un instant t_0 choisi une fois pour toutes; les coordonnées x, y, z de ce même point matériel à l'instant t sont des fonctions continues et uniformes de a, b, c, t :

$$(234)\qquad \left\{\begin{aligned} x &= x(a, b, c, t), \\ y &= y(a, b, c, t), \\ z &= z(a, b, c, t). \end{aligned}\right.$$

Soit $f(a, b, c, t)$ une fonction des variables a, b, c, t; nous conviendrons d'employer les notations suivantes :

$$df = \frac{\partial f}{\partial a} da + \frac{\partial f}{\partial b} db + \frac{\partial f}{\partial c} dc + \frac{\partial f}{\partial t} dt,$$

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial a} da + \frac{\partial f}{\partial b} db + \frac{\partial f}{\partial c} dc.$$

Selon ces notations,

$$da = \Delta a, \qquad db = \Delta b, \qquad dc = \Delta c.$$

Ces notations nous permettent d'écrire, en vertu des égalités (234),

$$(235)\qquad \left\{\begin{aligned} \Delta x &= \frac{\partial x}{\partial a} \Delta a + \frac{\partial x}{\partial b} \Delta b + \frac{\partial x}{\partial c} \Delta c, \\ \Delta y &= \frac{\partial y}{\partial a} \Delta a + \frac{\partial y}{\partial b} \Delta b + \frac{\partial y}{\partial c} \Delta c, \\ \Delta z &= \frac{\partial z}{\partial a} \Delta a + \frac{\partial z}{\partial b} \Delta b + \frac{\partial z}{\partial c} \Delta c. \end{aligned}\right.$$

Posons

$$(236)\qquad \Theta(a, b, c, t) = \frac{D(x, y, z)}{D(a, b, c)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial a} & \frac{\partial x}{\partial b} & \frac{\partial x}{\partial c} \\ \frac{\partial y}{\partial a} & \frac{\partial y}{\partial b} & \frac{\partial y}{\partial c} \\ \frac{\partial z}{\partial a} & \frac{\partial z}{\partial b} & \frac{\partial z}{\partial c} \end{vmatrix}$$

et résolvons les équations (235) par rapport à Δa, Δb, Δc; nous trouverons, en faisant usage de la notation des déterminants fonctionnels,

$$(237)\quad \begin{cases} \omega\,\Delta a = \dfrac{D(y,z)}{D(b,c)}\Delta x + \dfrac{D(z,x)}{D(b,c)}\Delta y + \dfrac{D(x,y)}{D(b,c)}\Delta z, \\ \omega\,\Delta b = \dfrac{D(y,z)}{D(c,a)}\Delta x + \dfrac{D(z,x)}{D(c,a)}\Delta y + \dfrac{D(x,y)}{D(a,b)}\Delta z, \\ \omega\,\Delta c = \dfrac{D(y,z)}{D(a,b)}\Delta x + \dfrac{D(z,x)}{D(a,b)}\Delta y + \dfrac{D(x,y)}{D(c,a)}\Delta z. \end{cases}$$

Supposons que, résolvant les égalités (234) par rapport à a, b, c, on exprime ces quantités en fonctions de x, y, z, t:

$$(238)\quad \begin{cases} a = a(x,y,z,t), \\ b = b(x,y,z,t), \\ c = c(x,y,z,t). \end{cases}$$

Les égalités (237) nous donneront immédiatement

$$(239)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial a}{\partial x} = \dfrac{1}{\omega}\dfrac{D(y,z)}{D(b,c)}, & \dfrac{\partial a}{\partial y} = \dfrac{1}{\omega}\dfrac{D(z,x)}{D(b,c)}, & \dfrac{\partial a}{\partial z} = \dfrac{1}{\omega}\dfrac{D(x,y)}{D(b,c)}, \\ \dfrac{\partial b}{\partial x} = \dfrac{1}{\omega}\dfrac{D(y,z)}{D(c,a)}, & \dfrac{\partial b}{\partial y} = \dfrac{1}{\omega}\dfrac{D(z,x)}{D(c,a)}, & \dfrac{\partial b}{\partial z} = \dfrac{1}{\omega}\dfrac{D(x,y)}{D(c,a)}, \\ \dfrac{\partial c}{\partial x} = \dfrac{1}{\omega}\dfrac{D(y,z)}{D(a,b)}, & \dfrac{\partial c}{\partial y} = \dfrac{1}{\omega}\dfrac{D(z,x)}{D(a,b)}, & \dfrac{\partial c}{\partial z} = \dfrac{1}{\omega}\dfrac{D(x,y)}{D(a,b)}. \end{cases}$$

Considérons une certaine surface $S(t)$, variable avec le temps t, tracée dans l'espace des x, y, z. Son équation est

$$(240)\quad \Phi(x,y,z,t) = 0.$$

Si, dans cette égalité, on remplace x, y, z par leurs expressions (234), on obtient une nouvelle équation

$$(241)\quad \varphi(a,b,c,t) = 0,$$

qui est l'équation d'une surface $s(t)$, variable avec le temps t et tracée dans l'espace des a, b, c. Les deux surfaces $S(t)$, $s(t)$ sont dites *correspondantes*. Les égalités (234) ou les égalités équivalentes (238) font correspondre point par point la surface $S(t)$ et la surface $s(t)$.

En un point M de la surface $S(t)$, la normale a pour cosinus directeurs α, β, γ et l'on a

$$(242)\quad \frac{\alpha}{\frac{\partial\Phi}{\partial x}} = \frac{\beta}{\frac{\partial\Phi}{\partial y}} = \frac{\gamma}{\frac{\partial\Phi}{\partial z}}$$

Au point m, correspondant du point M, la surface $s(t)$ admet une normale dont λ, μ, ν sont les cosinus directeurs, et l'on a

$$(243) \qquad \frac{\lambda}{\frac{\partial \varphi}{\partial a}} = \frac{\mu}{\frac{\partial \varphi}{\partial b}} = \frac{\nu}{\frac{\partial \varphi}{\partial c}}.$$

En vertu des égalités (238), les égalités (242) peuvent s'écrire

$$\frac{\alpha}{\frac{\partial \varphi}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial x}}$$
$$= \frac{\beta}{\frac{\partial \varphi}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial y}}$$
$$= \frac{\gamma}{\frac{\partial \varphi}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial z} + \frac{\partial \varphi}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial z} + \frac{\partial \varphi}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial z}}.$$

En vertu des égalités (239) et (243), ces égalités prennent la forme

$$(244) \qquad \frac{\alpha}{\mathrm{L}} = \frac{\beta}{\mathrm{M}} = \frac{\gamma}{\mathrm{N}},$$

où l'on a posé

$$(245) \qquad \left\{ \begin{aligned} \mathrm{L} &= \frac{\mathrm{D}(y, z)}{\mathrm{D}(b, c)}\lambda + \frac{\mathrm{D}(y, z)}{\mathrm{D}(c, a)}\mu + \frac{\mathrm{D}(y, z)}{\mathrm{D}(a, b)}\nu, \\ \mathrm{M} &= \frac{\mathrm{D}(z, x)}{\mathrm{D}(b, c)}\lambda + \frac{\mathrm{D}(z, x)}{\mathrm{D}(c, a)}\mu + \frac{\mathrm{D}(z, x)}{\mathrm{D}(a, b)}\nu, \\ \mathrm{N} &= \frac{\mathrm{D}(x, y)}{\mathrm{D}(b, c)}\lambda + \frac{\mathrm{D}(x, y)}{\mathrm{D}(c, a)}\mu + \frac{\mathrm{D}(x, y)}{\mathrm{D}(a, b)}\nu. \end{aligned} \right.$$

Les formules (244) et (245) permettent de calculer α, β, γ lorsque l'on connaît λ, μ, ν.

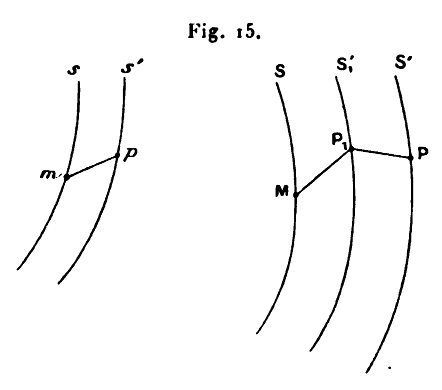
La surface $\mathrm{S}(t)$ occupe la position S à l'instant t (*fig.* 15) et la position S' à l'instant $(t + dt)$ dans l'espace des x, y, z. Les points matériels qui, à l'instant $(t + dt)$, se trouvent sur la surface S', se trouvaient, à l'instant t, sur la surface S'_1.

A la surface S correspond, dans l'espace des a, b, c, une surface s. Aux deux surfaces S', S'_1, lieux, à des instants différents, des mêmes points matériels, correspond, dans l'espace des a, b, c, une même surface s'.

Soient M un point de la surface S et m le point correspondant de la surface s. La distance normale du point M à la surface S', comptée positivement dans la

direction dont α, β, γ sont les cosinus directeurs, sera désignée par $\mathfrak{N}\,dt$. La distance normale du point m à la surface s', comptée positivement dans la direc-

Fig. 15.



tion dont λ, μ, ν sont les cosinus directeurs, sera désignée par $n\,dt$. Cherchons quelle relation existe entre n et $\mathfrak{N}$.

Sur la surface s', prenons un point p voisin du point m; si a, b, c sont les coordonnées du point m, $a + \Delta a$, $b + \Delta b$, $c + \Delta c$ seront celles du point p. La projection du segment mp sur la direction dont λ, μ, ν sont les cosinus directeurs sera précisément $n\,dt$. On a donc

$$n\,dt = \gamma\,\Delta a + \mu\,\Delta b + \nu\,\Delta c. \tag{246}$$

Au point p correspond un point P sur la surface S et un point P_1 sur la surface S_1.

Les composantes de segment MP_1 sont Δx, Δy, Δz, ces quantités étant liées à $\Delta a, \Delta b, \Delta c$ par les égalités (235) ou, ce qui revient au même, par les égalités (237). Quant au segment P_1P, ses composantes sont $\frac{\partial x}{\partial t}dt$, $\frac{\partial y}{\partial t}dt$, $\frac{\partial z}{\partial t}dt$.

La projection du contour MP_1P sur la direction dont α, β, γ sont les cosinus directeurs doit donner précisément $\mathfrak{N}\,dt$. On a donc

$$\mathfrak{N}\,dt = \left(\alpha\frac{\partial x}{\partial t} + \beta\frac{\partial y}{\partial t} + \gamma\frac{\partial z}{\partial t}\right)dt + \alpha\,\Delta x + \beta\,\Delta y + \gamma\,\Delta z. \tag{247}$$

En vertu des égalités (237) et (245), l'égalité (246) peut s'écrire

$$n\,dt = \frac{L\,\Delta x + M\,\Delta y + N\,\Delta z}{\omega}. \tag{248}$$

En vertu des égalités (244), l'égalité (247) peut s'écrire

$$\left(\mathfrak{N} - \alpha\frac{\partial x}{\partial t} - \beta\frac{\partial y}{\partial t} - \gamma\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2 dt^2 = \frac{(L\,\Delta x + M\,\Delta y + N\,\Delta z)^2}{L^2 + M^2 + N^2}. \tag{249}$$

Les égalités (248) et (249) donnent

$$(250)\qquad \left(\mathfrak{N} - \alpha\frac{\partial x}{\partial t} - \beta\frac{\partial y}{\partial t} - \gamma\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2 = \frac{\mathfrak{D}^2}{L^2+M^2+N^2}n^2.$$

Cette formule essentielle est due à Hugoniot [1].

La masse du fluide qu'à l'instant t contient une surface fermée S, tracée dans l'espace des x, y, z, a pour valeur

$$\iiint \rho(x, y, z, t)\,dx\,dy\,dz,$$

l'intégrale s'étendant au volume qu'enclôt la surface S. Par le changement de variables que représentent les équations (234), cette intégrale devient

$$(251)\qquad \iiint \rho(a, b, c, t)\,\mathfrak{D}(a, b, c, t)\,da\,db\,dc,$$

l'intégrale s'étendant au volume enclos par la surface s, qui correspond à la surface S dans l'espace des a, b, c.

Supposons que la première intégrale exprime la masse invariable d'une partie du fluide toujours identique à elle-même. La surface S variera avec t, mais la surface s demeurera invariable, et il en devra être de même de l'intégrale (251).

Donc l'intégrale (251), étendue au volume que renferme une surface invariable quelconque s, tracée dans l'espace des a, b, c, garde une valeur indépendante de t. Il faut et il suffit pour cela que l'on ait

$$(252)\qquad \frac{\partial}{\partial t}[\rho(a, b, c, t)\,\mathfrak{D}(a, b, c, t)] = 0.$$

Cette égalité bien connue représente l'*équation de continuité* dans le système dit *de Lagrange*.

On peut l'écrire plus explicitement

$$\mathfrak{D}(a, b, c, t)\frac{\partial\rho(a, b, c, t)}{\partial t} + \rho(a, b, c, t)\frac{\partial\mathfrak{D}(a, b, c, t)}{\partial t} = 0$$

ou bien, en vertu de l'égalité (236), qui définit $\mathfrak{D}(a, b, c, t)$,

$$(253)\qquad \begin{aligned} \mathfrak{D}\frac{\partial\rho}{\partial t} &+ \frac{D(y, z)}{D(b, c)}\frac{\partial^2 x}{\partial a\,\partial t} + \frac{D(y, z)}{D(c, a)}\frac{\partial^2 x}{\partial b\,\partial t} + \frac{D(y, z)}{D(a, b)}\frac{\partial^2 x}{\partial c\,\partial t} \\ &+ \frac{D(z, x)}{D(b, c)}\frac{\partial^2 y}{\partial a\,\partial t} + \frac{D(z, x)}{D(c, a)}\frac{\partial^2 y}{\partial b\,\partial t} + \frac{D(z, x)}{D(a, b)}\frac{\partial^2 y}{\partial c\,\partial t} \\ &+ \frac{D(x, y)}{D(b, c)}\frac{\partial^2 z}{\partial a\,\partial t} + \frac{D(x, y)}{D(c, a)}\frac{\partial^2 z}{\partial b\,\partial t} + \frac{D(x, y)}{D(a, b)}\frac{\partial^2 z}{\partial c\,\partial t} = 0. \end{aligned}$$

---

[1] HUGONIOT, *Mémoire sur la propagation du mouvement dans un fluide indéfini*, seconde Partie (*Journal de Mathématiques*, 4e série, t. IV, 1888, p. 153).

§ 4. — Propagation des ondes au sein des fluides parfaits. Emploi de la méthode de Lagrange.

Il est clair que nous avons

$$u = \frac{\partial x}{\partial t}, \qquad v = \frac{\partial y}{\partial t}, \qquad w = \frac{\partial z}{\partial t}, \tag{254}$$

$$\gamma_x = \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}, \qquad \gamma_y = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \qquad \gamma_z = \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}. \tag{255}$$

En vertu des égalités (255) et en supposant le fluide parfait, ce qui entraîne

$$q_x = 0, \qquad q_y = 0, \qquad q_z = 0,$$

les équations générales de l'Hydrodynamique [première Partie, égalité (74)] deviennent

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial \Pi}{\partial x} - \rho(X_i + X_e) + \rho\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = 0,\\ &\frac{\partial \Pi}{\partial y} - \rho(Y_i + Y_e) + \rho\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0,\\ &\frac{\partial \Pi}{\partial z} - \rho(Z_i + Z_e) + \rho\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = 0. \end{aligned}\right. \tag{256}$$

On a, d'ailleurs,

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x} = \frac{\partial \Pi}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial \Pi}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial x} + \frac{\partial \Pi}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial x}.$$

Cette égalité, jointe à la première des égalités (239), transforme la première des égalités (256) en la première des égalités

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{D(y,z)}{D(b,c)}\frac{\partial \Pi}{\partial a} + \frac{D(y,z)}{D(c,a)}\frac{\partial \Pi}{\partial b} + \frac{D(y,z)}{D(a,b)}\frac{\partial \Pi}{\partial c} - \rho\,\omega\left(X_i + X_e - \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right) = 0,\\ &\frac{D(z,x)}{D(b,c)}\frac{\partial \Pi}{\partial a} + \frac{D(z,x)}{D(c,a)}\frac{\partial \Pi}{\partial b} + \frac{D(z,x)}{D(a,b)}\frac{\partial \Pi}{\partial c} - \rho\,\omega\left(Y_i + Y_e - \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right) = 0,\\ &\frac{D(x,y)}{D(b,c)}\frac{\partial \Pi}{\partial a} + \frac{D(x,y)}{D(c,a)}\frac{\partial \Pi}{\partial b} + \frac{D(x,y)}{D(a,b)}\frac{\partial \Pi}{\partial c} - \rho\,\omega\left(Z_i + Z_e - \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\right) = 0. \end{aligned}\right. \tag{257}$$

Les deux autres se démontrent d'une manière analogue.

Supposons qu'une surface s, mobile avec t et tracée dans l'espace des a, b, c, soit onde du second ordre pour x, y, z et, partant, du premier ordre pour $\frac{\partial x}{\partial t}$, $\frac{\partial y}{\partial t}$, $\frac{\partial z}{\partial t}$. A cette surface s correspondra, dans l'espace des x, y, z, une surface S,

mobile avec t et qui sera onde du premier ordre pour u, v, w [selon les égalités (254)]. Dès lors, d'après ce que nous avons vu au Chapitre I, § 11, la surface S sera onde au moins du premier ordre pour ρ et Π, et, visiblement, il en sera de même pour la surface s.

Nous pourrons donc, d'après ce qui a été dit au Chapitre II, trouver, en chaque point de la surface s, un vecteur f, g, h et deux grandeurs $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{R}$, tels que l'on ait

$$(258) \quad \left\{ \begin{array}{llll} \dfrac{\partial^2(x_2-x_1)}{\partial a\,\partial t} = \lambda f, & \dfrac{\partial^2(x_2-x_1)}{\partial b\,\partial t} = \mu f, & \dfrac{\partial^2(x_2-x_1)}{\partial c\,\partial t} = \nu f, & \dfrac{\partial^2(x_2-x_1)}{\partial t^2} + nf = 0, \\ \dfrac{\partial^2(y_2-y_1)}{\partial a\,\partial t} = \lambda g, & \dfrac{\partial^2(y_2-y_1)}{\partial b\,\partial t} = \mu g, & \dfrac{\partial^2(y_2-y_1)}{\partial c\,\partial t} = \nu g, & \dfrac{\partial^2(y_2-y_1)}{\partial t^2} + ng = 0, \\ \dfrac{\partial^2(z_2-z_1)}{\partial a\,\partial t} = \lambda h, & \dfrac{\partial^2(z_2-z_2)}{\partial b\,\partial t} = \mu h, & \dfrac{\partial^2(z_2-z_1)}{\partial c\,\partial t} = \nu h, & \dfrac{\partial^2(z_2-z_1)}{\partial t^2} + nh = 0; \end{array} \right.$$

$$(259) \quad \frac{\partial(\rho_2-\rho_1)}{\partial a} = \lambda \mathfrak{R}, \quad \frac{\partial(\rho_2-\rho_1)}{\partial b} = \mu \mathfrak{R}, \quad \frac{\partial(\rho_2-\rho_1)}{\partial c} = \nu \mathfrak{R}, \quad \frac{\partial(\rho_2-\rho_1)}{\partial t} + n\mathfrak{R} = 0,$$

$$(260) \quad \frac{\partial(\Pi_2-\Pi_1)}{\partial a} = \lambda \mathfrak{P}, \quad \frac{\partial(\Pi_2-\Pi_1)}{\partial b} = \mu \mathfrak{P}, \quad \frac{\partial(\Pi_2-\Pi_1)}{\partial c} = \nu \mathfrak{P}, \quad \frac{\partial(\Pi_2-\Pi_1)}{\partial t} + n\mathfrak{P} = 0.$$

La surface s étant onde du second ordre pour x, y, z, les dérivées partielles du premier ordre de ces quantités varient d'une manière continue en traversant cette surface, et il en est de même de $\mathfrak{D}$ et de tous ses mineurs. Dès lors, les égalités (253), (258) et (259), jointes aux égalités (245), montrent que l'on a, en tout point de la surface s,

$$(261) \qquad \mathfrak{D}\mathfrak{R}\,n - \rho(\mathrm{L}f + \mathrm{M}g + \mathrm{N}h) = 0.$$

D'après ce que nous avons vu en la première Partie, Chapitre I, § 4, X_e, Y_e, Z_e, X_i, Y_i, Z_i varient d'une manière continue lorsqu'on traverse la surface S et, partant, la surface s. Dès lors, les égalités (257), (258) et (260), jointes aux égalités (245), montrent que l'on a, en tout point de la surface s, les trois égalités

$$(262) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{P}\mathrm{L} - \rho\mathfrak{D}nf = 0, \\ \mathfrak{P}\mathrm{M} - \rho\mathfrak{D}ng = 0, \\ \mathfrak{P}\mathrm{N} - \rho\mathfrak{D}nh = 0. \end{array} \right.$$

De ces égalités (262) on tire sans peine les deux égalités

$$(263) \qquad \mathfrak{P}(\mathrm{L}f + \mathrm{M}g + \mathrm{N}h) - \rho\mathfrak{D}\,n(f^2 + g^2 + h^2) = 0,$$

$$(264) \qquad \mathfrak{P}(\mathrm{L}^2 + \mathrm{M}^2 + \mathrm{N}^2) - \rho\mathfrak{D}\,n(\mathrm{L}f + \mathrm{M}g + \mathrm{N}h) = 0.$$

Ici, distinguons deux cas :

PREMIER CAS. — *L'onde est d'ordre supérieur à 1 par rapport à la densité* ρ :

$$\mathfrak{R} = 0. \tag{265}$$

L'égalité (261) donne alors

$$Lf + Mg + Nh = 0. \tag{266}$$

Interprétons ce résultat.

En multipliant les deux membres de l'égalité (266) par λ et tenant compte des égalités (258), (254) et (244), nous trouvons la première des égalités

$$\alpha \frac{\partial(u_2 - u_1)}{\partial a} + \beta \frac{\partial(v_2 - v_1)}{\partial a} + \gamma \frac{\partial(w_2 - w_1)}{\partial a} = 0,$$
$$\alpha \frac{\partial(u_2 - u_1)}{\partial b} + \beta \frac{\partial(v_2 - v_1)}{\partial b} + \gamma \frac{\partial(w_2 - w_1)}{\partial b} = 0,$$
$$\alpha \frac{\partial(u_2 - u_1)}{\partial c} + \beta \frac{\partial(v_2 - v_1)}{\partial c} + \gamma \frac{\partial(w_2 - w_1)}{\partial c} = 0.$$

Les deux autres se démontrent d'une manière analogue. Multiplions respectivement ces égalités par $\frac{\partial a}{\partial x}, \frac{\partial b}{\partial x}, \frac{\partial c}{\partial x}$ et ajoutons-les membre à membre; nous trouvons l'égalité

$$\alpha \frac{\partial(u_2 - u_1)}{\partial x} + \beta \frac{\partial(v_2 - v_1)}{\partial x} + \gamma \frac{\partial(w_2 - w_1)}{\partial x} = 0$$

qui, si l'on se reporte aux égalités (211), devient la première des égalités

$$(\alpha l_0 + \beta m_0 + \gamma n_0)\alpha = 0,$$
$$(\alpha l_0 + \beta m_0 + \gamma n_0)\beta = 0,$$
$$(\alpha l_0 + \beta m_0 + \gamma n_0)\gamma = 0.$$

Les deux autres se démontrent d'une manière analogue. Ces égalités montrent que l'on a, en tout point de la surface S,

$$\alpha l_0 + \beta m_0 + \gamma n_0 = 0. \tag{220}$$

L'égalité (266), vérifiée en tout point de la surface s, exprime donc que *la surface* S *est une onde* TRANSVERSALE.

Moyennant l'égalité (266), l'égalité (264) devient

$$\mathfrak{L} = 0. \tag{267}$$

L'onde considérée est d'ordre supérieur au premier par rapport à la pression Π.

$\rho\,\mathfrak{D}$, qui est la densité du fluide à l'instant t_0, ne peut être nul; les égalités (263) et (266) donnent donc

$$n = 0. \tag{268}$$

La surface s est immobile dans l'espace des a, b, c; donc, dans son mouvement, la surface S *sépare toujours l'une de l'autre les deux mêmes masses fluides.*

D'ailleurs, en vertu de l'égalité (250) et des égalités (254), l'égalité (268) donne

$$\mathfrak{N} - \alpha u + \beta v + \gamma w = 0. \tag{222}$$

On voit sans peine, par les égalités (261), (263) et (264), que chacune des égalités (265), (266), (267) et (268) entraîne les trois autres; *chacun des quatre caractères que nous venons d'énumérer entraîne les trois autres.*

On retrouve ainsi tout ce que nous avons démontré, au § 2, au sujet des ondes transversales.

Second cas. — *L'onde est effectivement du premier ordre par rapport à la densité* ρ.

On n'a pas

$$\mathfrak{R} = 0. \tag{265}$$

Dès lors, on ne peut avoir l'égalité (267), en sorte que *l'onde est effectivement du premier ordre par rapport à la pression* Π.

On ne peut avoir non plus l'égalité (268), et, comme $\rho\,\mathfrak{D}$ est essentiellement positif, les égalités (262) donnent

$$\frac{f}{\mathrm{L}} = \frac{g}{n} = \frac{h}{\mathrm{N}}. \tag{269}$$

Interprétons ces relations.

Multiplions les trois numérateurs par

$$\lambda\frac{\partial a}{\partial x} + \mu\frac{\partial b}{\partial x} + \nu\frac{\partial c}{\partial x}$$

et tenons compte des égalités (244); les relations (269) deviendront

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\alpha}\left(\lambda f \frac{\partial a}{\partial x} + \mu f \frac{\partial b}{\partial x} + \nu f \frac{\partial c}{\partial x}\right)\\
&= \frac{1}{\beta}\left(\lambda g \frac{\partial a}{\partial x} + \mu g \frac{\partial b}{\partial x} + \nu g \frac{\partial c}{\partial x}\right)\\
&= \frac{1}{\gamma}\left(\lambda h \frac{\partial a}{\partial x} + \mu h \frac{\partial b}{\partial x} + \nu h \frac{\partial c}{\partial x}\right).
\end{aligned}$$

En vertu des égalités (258) et (254), ces égalités donnent

$$\frac{1}{\alpha}\frac{\partial(u_2 - u_1)}{\partial x} = \frac{1}{\beta}\frac{\partial(v_2 - v_1)}{\partial x} = \frac{1}{\gamma}\frac{\partial(w_2 - w_1)}{\partial x}.$$

Celles-ci, en vertu des égalités (211), donnent la première ligne du groupe suivant

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha l_0}{\alpha} &= \frac{\alpha m_0}{\beta} = \frac{\alpha n_0}{\gamma},\\
\frac{\beta l_0}{\alpha} &= \frac{\beta m_0}{\beta} = \frac{\beta n_0}{\gamma},\\
\frac{\gamma l_0}{\alpha} &= \frac{\gamma m_0}{\beta} = \frac{\gamma n_0}{\gamma}.
\end{aligned}$$

Les deux autres lignes s'obtiennent d'une manière analogue. Ce groupe d'égalités équivaut aux égalités

$$(223) \qquad \frac{l_0}{\alpha} = \frac{m_0}{\beta} = \frac{n_0}{\gamma}.$$

Les égalités (269), vérifiées en tout point de la surface s, expriment donc que *la surface* S *est une onde* LONGITUDINALE.

Les égalités (261) et (264) donnent

$$(270) \qquad n^2 = \frac{L^2 + M^2 + N^2}{\mathfrak{O}^2}\frac{\mathfrak{L}}{\mathfrak{R}}.$$

Transformons cette égalité.

On a

$$\frac{\partial(\Pi_2 - \Pi_1)}{\partial x} = \frac{\partial(\Pi_2 - \Pi_1)}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial(\Pi_2 - \Pi_1)}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial x} + \frac{\partial(\Pi_2 - \Pi_1)}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial x}$$

ou bien, en vertu des égalités (213), (239), (245) et (260), la première des éga-

lités

$$\alpha P_0 = \frac{L\mathfrak{P}}{\omega}, \qquad \beta P_0 = \frac{M\mathfrak{P}}{\omega}, \qquad \gamma P_0 = \frac{N\mathfrak{P}}{\omega}.$$

Les deux autres se démontrent d'une manière analogue.

On en tire, en vertu des égalités (244),

$$P_0 = \frac{\mathfrak{P}}{\omega}\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}. \tag{271}$$

Une démonstration semblable donne

$$R_0 = \frac{\mathfrak{R}}{\omega}\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}, \tag{272}$$

le radical ayant le même signe que dans l'égalité (271).

Des égalités (271) et (272) on tire

$$\frac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{R}} = \frac{P_0}{R_0}. \tag{273}$$

Les égalités (250), (254), (270) et (273) donnent alors l'égalité

$$(\mathfrak{N} - \alpha u - \beta v - \gamma w)^2 = \frac{P_0}{R_0}. \tag{224}$$

Nous avons ainsi retrouvé, par la méthode de Lagrange, tous les résultats qui avaient été obtenus, au § 2, par la méthode d'Euler.

CONCLUSION DE LA SECONDE PARTIE.

En terminant la première Partie de ces recherches, nous avons insisté sur le caractère extrêmement limité et particulier des cas où le mouvement des fluides donne prise aux méthodes ordinaires de l'Hydrodynamique.

On pouvait penser que ces restrictions, qui pèsent sur la plupart des théorèmes dits *généraux* de l'Hydrodynamique, viendraient également borner l'étude de la propagation des ondes; en fait, Hugoniot et M. Hadamard [1] n'ont abordé cette étude qu'en supposant l'existence de la fonction A définie en la première Partie, Chapitre III, § 2; en outre, ils ont supposé que les actions étaient newtoniennes et que le fluide n'était pas visqueux.

---

[1] *Cf.* P. APPELL, *Traité de Mécanique*, t. III, p. 337.

Ces restrictions, heureusement, n'influent pas sur le problème de la propagation des ondes persistantes; ce problème peut être traité avec une généralité qui n'a d'autre limite que la généralité même des équations fondamentales de l'Hydrodynamique; on peut dire que *la solution complète que nous avons donnée de ce problème constitue* LE SEUL THÉORÈME VRAIMENT GÉNÉRAL *que l'on ait obtenu en Hydrodynamique*. En particulier, nous avons obtenu un théorème qui est exact pour tous les fluides possibles, visqueux ou non visqueux, conducteurs ou non conducteurs; seuls, les fluides qui sont à la fois visqueux, incompressibles et bons conducteurs de la chaleur en sont exclus; ce théorème est le suivant :

En tout fluide, on peut observer des ondes, d'ordre quelconque, qui séparent sans cesse les deux mêmes masses fluides et, partant, ne se propagent pas.

Parmi les phénomènes qui manifestent nettement de semblables ondes, on peut citer, outre les cas anciennement connus des tourbillons et des jets, la propagation de la chaleur par convection au sein d'une masse liquide, si bien étudiée, au point de vue expérimental, par M. Bénard (1); les curieuses *cellules* dont ce physicien a observé la formation trouvent leur explication immédiate dans le théorème précédent.

(1) H. BÉNARD, *Journal de Physique*, 3e série, t. IX, 1900, p. 513; t. X, 1901, p. 254.

MÉMOIRE

SUR LE

MOUVEMENT D'UN CORPS SOLIDE

DANS UN LIQUIDE INDÉFINI,

PAR M. W. STEKLOFF.

INTRODUCTION.

1. Le problème du mouvement d'un corps solide dans un liquide indéfini a été posé pour la première fois par Dirichlet en 1852 [1].

Quelques années après, Clebsch, suivant une voie indiquée par Dirichlet, a déduit les équations du mouvement dans le cas particulier d'un ellipsoïde (*Journal de Crelle*, t. 52; 1856).

Ensuite, MM. Thomson et Tait ont établi ces équations dans le cas plus général à l'aide du principe d'Hamilton.

Enfin M. Kirchhoff, en 1871, a développé les idées de MM. Thomson et Tait et a représenté sous la forme usuelle les équations dont il s'agit.

Mais la méthode de M. Kirchhoff ne s'applique qu'aux corps limités par des surfaces simplement connexes (comme l'ont remarqué MM. C. Neumann et Boltzmann), et la méthode la plus naturelle pour établir les équations du mouvement est celle de Dirichlet, qui ramène le problème considéré au problème du mouvement d'un corps solide libre soumis à des forces extérieures données et à des forces de pression du liquide, appliquées normalement à la surface du corps.

Il s'agit, dans le Chapitre I de ce Mémoire, d'établir les équations du mouvement, par la méthode tout à l'heure mentionnée, dans ces suppositions générales :

---

(1) L. DIRICHLET, *Ueber einige Fälle, in welchen sich die Bewegung eines festen Körpers in einem incompressibeln flüssigen Medium theoretisch bestimmen lässt* (*Berliner Monatsberichte*, 1852).

1° Le corps solide est limité par une surface fermée (S) *de l'ordre arbitraire (fini) de connexion* ayant partout un plan tangent déterminé;

2° A l'intérieur du corps il existe un nombre fini q de cavités, limitées par des surfaces fermées, ayant les mêmes propriétés que (S), et remplies de liquides incompressibles;

3° Le corps solide est soumis à des forces extérieures quelconques; les fluides sont soumis à des forces ayant une fonction de forces;

4° La vitesse du mouvement du liquide indéfini contenant le corps mobile, ainsi que celle des liquides contenus dans les cavités, dérive d'un potentiel, et les liquides considérés sont incompressibles et idéaux.

2. L'intégration de ces équations différentielles représente, comme l'on sait, des difficultés presque insurmontables, même dans le cas de l'absence de toute force accélératrice.

Il faut d'abord étudier ce dernier problème, le plus simple; c'est ce que je fais dans le Chapitre II de ce Mémoire, en supposant en même temps que la surface du corps soit simplement connexe.

Je propose une méthode générale, à savoir la méthode d'intégration par des approximations successives, qui s'applique toujours, quel que soit le corps solide, pourvu que le rapport

$$\varepsilon = \frac{\rho}{M},$$

ρ étant la densité du fluide indéfini, M étant la masse totale du corps et des fluides remplissant les cavités, ait une valeur suffisamment petite.

Cette méthode ramène le problème général à l'intégration bien connue des équations du mouvement d'un corps solide libre et à celle de certaines équations linéaires à coefficients variables qui se ramène aux quadratures.

3. Comme les équations du mouvement admettent les solutions périodiques pour $\varepsilon = 0$, ils peuvent les admettre aussi, d'après les théorèmes connus de M. H. Poincaré, pour des valeurs assez petites de ε.

La solution de cette question intéressante fait l'objet du Chapitre III de ce Mémoire, où je démontre l'existence d'une infinité de solutions périodiques ayant lieu, quel que soit le corps solide.

4. Je dois remarquer que ces idées ont été énoncées pour la première fois dans mon Ouvrage *Sur le mouvement d'un corps solide dans un liquide indéfini,* paru en russe en 1893; mais comme le but principal de cet Ouvrage con-

sistait dans la discussion des cas particuliers, où le problème se ramène aux quadratures, je m'y suis borné aux remarques générales. Maintenant, je vais développer en détail mes recherches.

CHAPITRE I.

MOUVEMENT DU LIQUIDE INDÉFINI ET DES LIQUIDES REMPLISSANT LES CAVITÉS.

1. Soit $m+1$ l'ordre de connexion de volume du corps solide, plongé dans un liquide indéfini. Il est possible de rendre ce volume simplement connexe en pratiquant des *coupures;* pour cela, il suffit de prendre m coupures convenablement choisies.

Dans les volumes à connexion multiple on peut tracer des courbes fermées pouvant se réduire, par une déformation continue, à un point, sans sortir du volume et des contours fermés qui ne peuvent se réduire à un point sans sortir du volume.

Nous appellerons ces dernières courbes *contours principaux*.

Les courbes de première espèce ne traversent pas les coupures; les contours principaux les traversent nécessairement.

Désignons par F la fonction des vitesses du liquide indéfini.

F reste uniforme tant qu'on ne traverse pas la coupure, mais la différence des valeurs que prend cette fonction en deux points infiniment voisins d'une coupure, situés de part et d'autre de cette coupure, est finie et s'appelle *circulation principale* correspondant au contour principal qui traverse la coupure considérée.

Cette circulation est une constante déterminée pour chaque contour principal, correspondant à une coupure donnée, et s'appelle *constante cyclique*.

Le nombre de ces constantes est égal à m.

La constante cyclique correspondant au contour principal donné est égale à la valeur de l'intégrale

$$I=\int(U\,dx+V\,dy+W\,dz),$$

prise le long de ce contour, U, V, W étant les composantes de la vitesse d'un point x, y, z du fluide suivant les axes des coordonnées.

Nous désignerons ces constantes par

$$k_s \qquad (s=1, 2, \ldots, m).$$

2. Désignons par n la direction de la normale extérieure à (S) (surface du corps), par

$$\frac{\partial F_i}{\partial n} \quad \text{et} \quad \frac{\partial F_e}{\partial n}$$

les dérivées normales, intérieure et extérieure, de F sur (S).

Envisageons maintenant trois axes mobiles Ox, Oy, Oz, liés au corps solide, et désignons par

$$u, \quad v, \quad w$$

les composantes de la vitesse du point O suivant les axes Ox, Oy, Oz, par

$$p, \quad q, \quad r$$

les composantes d'une rotation instantanée ω.

Les nombres k_s étant donnés, le problème du mouvement du liquide indéfini se ramène au problème suivant :

Trouver à l'extérieur de (S) *une fonction* F *satisfaisant aux conditions suivantes :*

1° F *est une fonction harmonique à l'extérieur de* (S);

2° F *reste continue le long de tout contour fermé de première espèce, tracé dans le liquide, et varie brusquement à la constante* k_s, *lorsque le point décrivant* $s^{\text{ième}}$ *contour principal traverse la coupure correspondante;*

3° *La différence* F — C, C *étant une constante, tend uniformément vers zéro, lorsque la distance* R *du point* x, y, z *à l'origine des coordonnées croît au delà de toute limite;*

4° *La dérivée normale extérieure de* F *satisfait à la condition*

$$\begin{aligned}\frac{\partial F_e}{\partial n} = {} & (u + qz - ry)\cos(n, x) \\ & + (v + rx - pz)\cos(n, y) + (w + py - qx)\cos(n, z) \qquad \text{sur} \quad (S).\end{aligned}$$

On sait que *ce problème ne peut admettre plus d'une solution.*

On peut représenter F sous la forme suivante :

$$F = F_1 + \sum_{s=1}^{m} k_s \mathfrak{I}_s = F_1 + F_2, \tag{1}$$

où F est une fonction satisfaisant aux conditions 1°, 3° et 4°, *continue* avec ses dérivées de deux premiers ordres à l'extérieur de (S), $\mathfrak{I}_s (s = 1, 2, \ldots, m)$ sont des fonctions ne dépendant pas de u, v, w, p, q, r, harmoniques à l'extérieur de (S), variant brusquement à l'unité lorsque le point décrivant le $s^{\text{ième}}$ contour

principal traverse la coupure correspondante, et restant uniforme le long de toutes les autres coupures tracées dans le liquide.

Ces fonctions s'annulent à l'infini avec ses dérivées du premier ordre et satisfont aux conditions

$$\frac{\partial \vartheta_{se}}{\partial n} = 0 \qquad \text{sur la surface du corps.}$$

On appelle cette fonction ϑ_s fonction *monocyclique correspondant à la constante cyclique* k_s.

La fonction F_2 satisfera donc à la condition

$$\frac{\partial F_{2e}}{\partial n} = 0 \qquad \text{sur} \quad (S).$$

Quant à la fonction F_1, elle sera linéaire en $u, v, w; p, q, r$

$$F_1 = u\varphi_1 + v\varphi_2 + w\varphi_3 + p\psi_1 + q\psi_2 + r\psi_3 + C, \tag{2}$$

$\varphi_j, \psi_j (s = 1, 2, 3)$ étant des fonctions du point x, y, z jouissant des propriétés suivantes :

a. Elles sont harmoniques et continues à l'extérieur de (S), ainsi que ses dérivées des deux premiers ordres.

b. Elles tendent uniformément vers zéro lorsque R croît indéfiniment.

c. Elles satisfont aux conditions

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_{1e}}{\partial n} &= \cos(n, x), & \frac{\partial \psi_{1e}}{\partial n} &= y\cos(n, z) - z\cos(n, y) \\ \frac{\partial \varphi_{2e}}{\partial n} &= \cos(n, y), & \frac{\partial \psi_{2e}}{\partial n} &= z\cos(n, x) - x\cos(n, z) \\ \frac{\partial \varphi_{3e}}{\partial n} &= \cos(n, z), & \frac{\partial \psi_{3e}}{\partial n} &= x\cos(n, y) - y\cos(n, x) \end{aligned}\right\} \quad \text{sur} \quad (S).$$

On sait que les conditions énoncées (a, b, c) caractérisent complètement chacune des fonctions φ_j, ψ_j et, par conséquent, la fonction F_1.

Il résulte de ce qui précède que la fonction F

$$F = F_1 + F_2$$

satisfait à toutes les conditions 1°, 2°, 3° et 4°.

La fonction F étant ainsi déterminée, nous aurons

$$u = \frac{\partial F}{\partial x}, \qquad v = \frac{\partial F}{\partial y}, \qquad w = \frac{\partial F}{\partial z},$$

et le problème du mouvement du liquide indéfini sera résolu.

3. Pour déterminer le potentiel F_n des vitesses du liquide remplissant la $n^{\text{ième}}$ cavité, limitée par la surface fermée (S_n), dont l'ordre de connexion soit égal à p_n, posons

$$F_n = F_{1n} + \sum_{s=1}^{p_n} k_s^{(n)} \mathfrak{I}_s^{(n)} = F_{1n} + F_{2n},$$

$k_s^{(n)}$ étant des constantes cycliques correspondant à la surface (S_n), $\mathfrak{I}_s^{(n)}$ étant des fonctions monocycliques correspondant aux constantes $k_s^{(n)}$, F_{1n} étant une fonction de la forme

$$F_{1n} = ux + vy + wz + p\psi_1^{(n)} + q\psi_2^{(n)} + r\psi_3^{(n)}.$$

Quant aux fonctions $\varphi_j^{(n)}$, elles sont harmoniques à l'intérieur de (S_n), continues avec ses dérivées des deux premiers ordres, et satisfont aux conditions

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial\psi_{1i}^{(n)}}{\partial n} &= y\cos(n, z) - z\cos(n, y) \\ \frac{\partial\psi_{2i}^{(n)}}{\partial n} &= z\cos(n, x) - x\cos(n, z) \\ \frac{\partial\psi_{3i}^{(n)}}{\partial n} &= x\cos(n, y) - y\cos(n, x) \quad (^1) \end{aligned}\right\} \quad \text{sur la surface } (S_n).$$

La fonction F_n étant ainsi déterminée, nous aurons

$$u = \frac{\partial F_n}{\partial x}, \qquad v = \frac{\partial F_n}{\partial y}, \qquad w = \frac{\partial F_n}{\partial z} \quad (^2),$$

et le problème du mouvement du liquide dans la $n^{\text{ième}}$ cavité sera résolu.

FORCE VIVE DES MASSES LIQUIDES ET DU SYSTÈME TOTAL.

4. Considérons un volume quelconque dont l'ordre de connexion est égal à $m+1$.

Soient U et V deux fonctions cycliques à l'intérieur du volume ; soient

$$(4)\qquad k_s \quad \text{et} \quad k'_s \qquad (s = 1, 2, \ldots, m)$$

leurs constantes cycliques.

Désignons par $d\tau$ l'élément de volume considéré, limité par une surface

---

(1) n désigne la direction de la normale extérieure à (S_n).

(2) u, v, w désignent les composantes de la vitesse du liquide remplissant la $n^{\text{ième}}$ cavité.

fermée (S), par ds l'élément superficiel de (S), par $d\sigma_s (s = 1, 2, \ldots, m)$ l'élément de $s^{\text{ième}}$ coupure.

Employant le théorème de Green, on trouve

$$(5) \qquad \int \sum \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial x} d\tau = \int U \frac{\partial V_i}{\partial n} ds - \sum_{s=1}^{m} k_s \int \frac{\partial V}{\partial n} d\sigma_s$$

$$= \int V \frac{\partial U_i}{\partial n} ds - \sum_{s=1}^{m} k'_s \int \frac{\partial U}{\partial n} d\sigma_s,$$

en choisissant convenablement la direction positive de la normale n aux coupures correspondant aux constantes k_s et k'_s.

Considérons maintenant le domaine (D'), extérieur à (S).

Soient U et V deux fonctions cycliques à l'extérieur de (S), correspondantes aux constantes (4).

On trouve, comme précédemment,

$$(5_1) \qquad \int \sum \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial x} d\tau' = -\int U \frac{\partial V_e}{\partial n} ds + \sum_{s=1}^{m} k_s \int \frac{\partial V}{\partial n} d\sigma_s$$

$$= -\int V \frac{\partial U_e}{\partial n} ds + \sum_{s=1}^{m} k'_s \int \frac{\partial U}{\partial n} d\sigma_s,$$

$d\tau'$ étant le volume du domaine (D').

5. Désignons par T_2 la force vive, par ρ la densité du liquide indéfini.

On trouve

$$2 T_2 = \rho \int \sum \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 d\tau',$$

F étant le potentiel des vitesses.

On sait que F est une fonction cyclique dont les constantes cycliques sont égales à

$$k_s \qquad (s = 1, 2, 3, \ldots, m) \qquad (\text{n}^{\text{os}}\ 1 \text{ et } 2).$$

On a donc, en vertu de (5_1),

$$2 T_2 = -\rho \int F \frac{\partial F_e}{\partial n} ds + \sum_{s=1}^{m} k_s \int \frac{\partial F}{\partial n} d\sigma_s,$$

d'où, en remarquant que

$$F = F_1 + F_2,$$

et en tenant compte des propriétés de F_1 et F_2, indiquées plus haut, on tire aisément

$$2T_2 = -\rho\int F_1 \frac{\partial F_{1e}}{\partial n} ds + \rho\sum_{s=1}^{m} k_s \int \frac{\partial F_2}{\partial n} d\sigma_s + \rho\left(\sum_{s=1}^{m} k \int \frac{\partial F_1}{\partial n} d\sigma_s - \int F_2 \frac{\partial F_{1e}}{\partial n} ds\right).$$

Posons dans (5_1)

$$U = F_2, \qquad V = F_1, \qquad k'_s = 0 \qquad (s = 1, 2, \ldots, m).$$

On aura

$$\sum_{s=1}^{m} k_s \int \frac{\partial F_1}{\partial n} d\sigma_s - \int F_2 \frac{\partial F_1}{\partial n} ds = 0$$

et, par suite,

$$2T_2 = -\rho\int F_1 \frac{\partial F_{1e}}{\partial n} ds + \rho\sum_{s=1}^{m} k_s \int \frac{\partial F_2}{\partial n} d\sigma_s.$$

Désignons maintenant par T_{2n} la force vive du liquide remplissant $n^{\text{ième}}$ cavité.

Nous trouverons, comme précédemment, en tenant compte de (5),

$$2T_{2n} = \rho_n \int F_{1n} \frac{\partial F_{1n,i}}{\partial n} ds^{(n)} - \rho_n \sum_{s=1}^{p_n} k_s^{(n)} \int \frac{\partial F_{2n}}{\partial n} d\sigma_s^{(n)},$$

où ρ_n désigne la densité du liquide considéré, $ds_s^{(n)}$ l'élément superficiel de la surface (S_n) (n° 3), $d\sigma_s^{(n)}$ l'élément de la coupure correspondant à la constante $k_s^{(n)}$.

6. Posons, pour abréger l'écriture,

$$\rho\int \sum \frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x} d\tau' = (U, V) = (V, U),$$

$$2T_3 = -\rho\int F_1 \frac{\partial F_{1e}}{\partial n} ds, \qquad 2T_4 = -\rho\sum k_s \int \frac{\partial F_2}{\partial n} d\sigma_s.$$

On peut écrire

$$2T_2 = 2T_3 + 2T_4,$$

ou, en vertu de (1) et (2),

$$\begin{aligned}
2\mathrm{T}_3 = & (\varphi_1, \varphi_1)u^2 + (\varphi_2, \varphi_2)v^2 + (\varphi_3, \varphi_3)w^2 \\
& + 2(\varphi_2, \varphi_3)vw + 2(\varphi_1, \varphi_3)uw + 2(\varphi_1, \varphi_2)uv \\
& + (\psi_1, \psi_1)p^2 + (\psi_2, \psi_2)q^2 + (\psi_3, \psi_3)r^2 \\
& + 2(\psi_2, \psi_3)qr + 2(\psi_1, \psi_3)pr + 2(\psi_1, \psi_2)pq \\
& + 2(\varphi_1, \psi_1)up + 2(\varphi_1, \psi_2)uq + 2(\varphi_1, \psi_3)uv \\
& + 2(\varphi_2, \psi_1)vp + 2(\varphi_2, \psi_2)vq + 2(\varphi_2, \psi_3)vr \\
& + 2(\varphi_3, \psi_1)wp + 2(\varphi_3, \psi_2)wq + 2(\varphi_3, \psi_3)wr,
\end{aligned}$$

$$2\mathrm{T}_4 = \sum_{s=1}^{m} \mathrm{K}_{ss} k_s^2 + 2\sum_{s,p} \mathrm{K}_{sp} k_s k_p,$$

$$\mathrm{K}_{ss} = \rho \int \frac{\partial \mathfrak{S}_s}{\partial n} d\sigma_s, \qquad \mathrm{K}_{sp} = \rho \int \frac{\partial \mathfrak{S}_s}{\partial n} d\sigma_p = \rho \int \frac{\partial \mathfrak{S}_p}{\partial n} d\sigma_s.$$

7. Soit q le nombre de cavités du corps solide.

Désignons par T_{2n} la force vive du liquide remplissant $n^{\text{ième}}$ cavité. On peut écrire

$$2\mathrm{T}_{2n} = 2\mathrm{T}_{3n} + 2\mathrm{T}_{4n}.$$

Nous obtiendrons l'expression de T_{3n} et T_{4n} en remplaçant, dans T_3 et T_4, φ_j par x, y, z, ψ_j par $\psi_j^{(n)}$, K et k par $\mathrm{K}^{(n)}$ et $k^{(n)}$ et en supposant que les indices s et p prennent les valeurs $1, 2, \ldots, p_n$ $(n = 1, 2, \ldots, q)$.

Désignons par $x_c^{(n)}, y_c^{(n)}, z_c^{(n)}$ les coordonnées du centre de gravité, par M_n la masse totale du liquide remplissant $n^{\text{ième}}$ cavité, par $d\tau^{(n)}$ l'élément de volume de cette cavité.

On trouve aisément, en tenant compte de (3),

$$\begin{aligned}
(x, x) &= (y, y) = (z, z) = \mathrm{M}_n, \\
(x, y) &= (x, z) = (y, z) = 0, \\
(x, \psi_1^{(n)}) &= (y, \psi_2^{(n)}) = (z, \psi_3^{(n)}) = 0,
\end{aligned}$$

$$(y, \psi_3^{(n)}) = -(z, \psi_2^{(n)}) = \rho_n \int x \, d\tau^{(n)} = \mathrm{M}_n x_c^{(n)},$$

$$(z, \psi_1^{(n)}) = -(x, \psi_3^{(n)}) = \rho_n \int y \, d\tau^{(n)} = \mathrm{M}_n y_c^{(n)},$$

$$(x, \psi_2^{(n)}) = -(y, \psi_1^{(n)}) = \rho_n \int z \, d\tau^{(n)} = \mathrm{M}_n z_c^{(n)}.$$

On a donc

$$2T_{3n} = M_n(u^2+v^2+w^2) + 2M_n[(vr-wq)x_c^{(n)} + (wp-ur)y_c^{(n)} + (uq-vp)z_c^{(n)}]$$
$$+ p^2(\psi_1^{(n)}, \psi_1^{(n)}) + q^2(\psi_2^{(n)}, \psi_2^{(n)}) + r^2(\psi_3^{(n)}, \psi_3^{(n)})$$
$$+ 2(\psi_1^{(n)}, \psi_2^{(n)})pq + 2(\psi_1^{(n)}, \psi_3^{(n)})pr + 2(\psi_2^{(n)}, \psi_3^{(n)})qr.$$

en résulte que *l'on peut considérer* $T_{3n}(n=1, 2, \ldots, q)$ *comme force vive d'un corps solide dont la masse totale est égale à la masse totale du liquide de* $n^{\text{ième}}$ *cavité, le centre de gravité coïncide avec celui du liquide, les moments d'inertie par rapport aux axes* Ox, Oy, Oz *sont égaux à*

$$(\psi_1^{(n)}, \psi_1^{(n)}), \quad (\psi_2^{(n)}, \psi_2^{(n)}), \quad (\psi_3^{(n)}, \psi_3^{(n)}) \qquad (n=1, 2, \ldots, q)$$

et les produits d'inertie sont égaux à

$$(\psi_1^{(n)}, \psi_2^{(n)}), \quad (\psi_1^{(n)}, \psi_3^{(n)}), \quad (\psi_2^{(n)}, \psi_3^{(n)}) \qquad (n=1, 2, \ldots, q).$$

8. Désignons maintenant par T′ la force vive du corps solide plongé dans le liquide indéfini, par T la force vive du système total (de toutes les masses liquides et du corps solide, pris ensemble).

On trouve

$$2T = 2T' + 2\sum_{n=1}^{q} T_{3n} + 2T_3 + S,$$

où l'on a posé

$$S = 2T_4 + 2\sum_{n=1}^{q} T_{4n},$$

S étant une forme quadratique de

$$k_s \quad (s=1, 2, \ldots, m), \qquad k_s^{(n)} \quad \begin{pmatrix} n=1, 2, \ldots, q \\ s=1, 2, \ldots, p_n \end{pmatrix}$$

à coefficients constants ne dépendant pas de u, v, w, p, q, r.

Désignons par M la masse totale du corps solide et des liquides remplissant les cavités, par x_c, y_c, z_c les coordonnées du centre de gravité de ce système composé que nous désignerons par (C). Soient enfin A′, B′, C′ et D′, E′, F′ les moments et les produits d'inertie du corps solide.

Il est aisé de voir que *l'on peut considérer*

$$T' + \sum_{n=1}^{q} T_{3n}$$

comme force vive d'un corps solide dont la masse est égale à M, *le centre de*

gravité coïncide avec celui du système (C), *les moments d'inertie sont égaux à*

$$A = A' + \sum_{n=1}^{q} (\psi_1^{(n)}, \psi_1^{(n)}), \qquad B = B' + \sum_{n=1}^{q} (\psi_2^{(n)}, \psi_2^{(n)}), \qquad C = C' + \sum_{n=1}^{q} (\psi_3^{(n)}, \psi_3^{(n)})$$

et les produits d'inertie sont égaux à

$$D = D' + \sum_{n=1}^{q} (\psi_2^{(n)}, \psi_3^{(n)}), \qquad E = E' + \sum_{n=1}^{q} (\psi_1^{(n)}, \psi_3^{(n)}), \qquad F = F' + \sum_{n=1}^{q} (\psi_1^{(n)}, \psi_2^{(n)}).$$

Désignons par T la force vive de ce corps solide. On peut écrire

$$2\mathrm{T} = 2T + 2\mathrm{T}_3 + \mathrm{S}.$$

PRESSION DANS LE LIQUIDE INDÉFINI ET DANS LES LIQUIDES REMPLISSANT DES CAVITÉS.

9. Désignons par p la pression en un point quelconque du liquide indéfini, par p_n la pression dans le liquide remplissant $n^{\text{ième}}$ cavité ($n = 1, 2, \ldots, q$).

Envisageons un système d'axes fixes ξ, η, ζ et désignons par

$$\Phi(\xi, \eta, \zeta, t) \quad (^1)$$

le potentiel des vitesses du liquide indéfini.

Nous obtiendrons F en remplaçant dans Φ les variables ξ, η, ζ par leurs expressions en x, y, z.

Désignons les cosinus directeurs des axes mobiles par rapport aux axes fixes par

$$\alpha_i, \quad \beta_i, \quad \gamma_i \qquad (i = 1, 2, 3),$$

par α, β, γ les coordonnées du point O (du pôle).

On a

$$x = (\xi - \alpha)\alpha_1 + (\eta - \beta)\beta_1 + (\zeta - z)\gamma_1, \qquad \ldots$$

et

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial t},$$

où

$$\frac{\partial \xi}{\partial t}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial t}, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial t}$$

---

(1) t désigne le temps.

sont les composantes de la vitesse d'entraînement W du point ξ, η, ζ suivant les axes fixes.

D'autre part

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\xi}=\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\xi}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\xi}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial\xi}=\frac{\partial F}{\partial x}\alpha_1+\frac{\partial F}{\partial y}\alpha_2+\frac{\partial F}{\partial z}\alpha_3,\quad\ldots\qquad\text{pour } \eta \text{ et } \zeta.$$

On a donc

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial t}+\frac{\partial\Phi}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial t}+\frac{\partial\Phi}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial t}=\frac{\partial F}{\partial x}W_x+\frac{\partial F}{\partial y}W_y+\frac{\partial F}{\partial z}W_z,$$

où

$$W_x=u+qz-ry,$$
$$W_y=v+rx-pz,$$
$$W_z=w+py-qx,$$

c'est-à-dire

$$(6)\qquad \frac{\partial\Phi}{\partial t}=\frac{\partial F}{\partial t}-\left[\frac{\partial F}{\partial x}(u+qz-ry)+\frac{\partial F}{\partial y}(v+rx-pz)+\frac{\partial F}{\partial z}(w+py-qz)\right].$$

Supposons que le liquide soit soumis à des forces ayant une fonction des forces que nous désignerons par U.

La formule de Lagrange nous donne

$$\frac{p}{\rho}=U+C-\frac{\partial\Phi}{\partial t}-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\xi}\right)^2+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\eta}\right)^2+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\zeta}\right)^2\right],$$

C étant une fonction ne dépendant que de t, d'où, en tenant compte de (6) et de l'égalité évidente

$$\sum\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\xi}\right)^2=\sum\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2,$$

on tire immédiatement

$$(7)\qquad \frac{p}{\rho}=U+C-\frac{\partial F}{\partial t}-\frac{1}{2}\sum\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2$$
$$+\frac{\partial F}{\partial x}(u+qz-ry)+\frac{\partial F}{\partial y}(v+rx-pz)+\frac{\partial F}{\partial z}(w+py-qx).$$

Nous trouverons de la même manière

$$\frac{p_n}{\rho_n}=U_n+C_n-\frac{\partial F_n}{\partial t}-\frac{1}{2}\sum\left(\frac{\partial F_n}{\partial x}\right)^2$$
$$+\frac{\partial F_n}{\partial x}(u+qz-ry)+\frac{\partial F_n}{\partial y}(v+rx-pz)+\frac{\partial F_n}{\partial z}(w+py-qx),$$

U_n étant la fonction des forces agissant sur les points du liquide de $n^{\text{ième}}$ cavité, C_n étant une fonction ne dépendant que du temps.

10. Désignons maintenant par

$$p_x, \quad p_y, \quad p_z$$

les projections sur les axes Ox, Oy, Oz de la résultante générale des forces des pressions exercées par le liquide indéfini sur la surface (S) du corps, par

$$p_{nx}, \quad p_{ny}, \quad p_{nz} \qquad (n = 1, 2, \ldots, q)$$

les projections correspondantes des forces des pressions exercées sur la paroi de $n^{\text{ième}}$ cavité par les masses fluides remplissant cette cavité.

Désignons ensuite par

$$q_x, \quad q_y, \quad q_z$$

les projections du moment résultant par rapport à O des pressions du liquide indéfini sur (S), par

$$q_{nx}, \quad q_{ny}, \quad q_{nz} \qquad (n = 1, 2, \ldots, q)$$

les projections correspondantes pour le liquide remplissant $n^{\text{ième}}$ cavité.

Formons d'abord les expressions p_x, p_y, p_z.

Désignons par α, β, γ les angles de la normale extérieure n à (S) avec les axes des coordonnées.

On trouve, en tenant compte de (7),

$$\begin{aligned} -p_x = \rho \int (\mathrm{U} + \mathrm{C}) \cos\alpha \, ds - \rho \int \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial t} \cos\alpha \, ds \\ - \frac{\rho}{2} \int \sum \left(\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x}\right)^2 \cos\alpha \, ds + \rho \int \sum \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x} (u + qz - ry) \cos\alpha \, ds, \end{aligned}$$

les intégrales étant étendues sur la surface (S) du corps.

Soit $d\sigma$ l'élément superficiel de la sphère (σ) du rayon R ayant son centre à l'origine des coordonnées.

Désignons, en général, par

$$\lim_{\mathrm{R}=\infty} \int f(x, y, z) \, d\sigma$$

la limite vers laquelle tend l'intégrale

$$\int f(x, y, z) \, d\sigma,$$

lorsque R tend vers l'infini.

Il est aisé de voir que

$$\lim_{R=\infty} \int \sum \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 \cos\alpha \, d\sigma = 0,$$

où α désigne l'angle de la normale intérieure à (σ) avec l'axe des x.

Considérons maintenant l'expression suivante :

$$\lim_{R=\infty} I = \lim_{R=\infty} \int \sum \frac{\partial F}{\partial x}(u + qz - ry) \cos\alpha \, d\sigma.$$

Supposons que R soit suffisamment grand et employons le développement connu

$$F_1 = \text{const.} + \frac{S_1}{R^2} + \frac{S_2}{R^3} + \ldots,$$

$S_1, S_2, \ldots$ étant les fonctions sphériques.

On sait que le produit $R^k S_k$ est un polynome homogène de degré k en x, y, z.

On peut donc écrire

$$(8) \qquad F_1 = \text{const.} + \frac{ax + by + cz}{R^3} + \varepsilon = \text{const.} + \varphi + \varepsilon,$$

a, b, c étant des constantes.

Si R est infiniment grand, φ sera infiniment petit du second ordre, ε sera infiniment petit d'ordre plus élevé.

Il s'ensuit que

$$\lim_{R=\infty} \int \sum \frac{\partial F}{\partial x} u \cos\alpha \, d\sigma = 0,$$

$$\lim_{R=\infty} \int \sum \frac{\partial \varepsilon}{\partial x}(qz - ry) \cos\alpha \, d\sigma = 0.$$

On a donc

$$\begin{aligned} \lim_{R=\infty} I &= \lim_{R=\infty} \int \sum \frac{\partial \varphi}{\partial x}(qz - ry) \cos\alpha \, d\sigma \\ &= \lim_{R=\infty} \int \sum a(qz - ry) \cos\alpha \, d\sigma = \lim_{R=\infty} \left[(rb - qc) \int \frac{x^2}{R^4} d\sigma + \int \frac{p}{R^4} d\sigma\right], \end{aligned}$$

p désignant une fonction linéaire homogène en yz, zx, xy.

Il est aisé de s'assurer que

$$(9) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\int \frac{xy}{R^4} d\sigma = \int \frac{zx}{R^4} d\sigma = \int \frac{yz}{R^4} d\sigma = 0, \\ &\int \frac{x^2}{R^4} d\sigma = \int \frac{y^2}{R^4} d\sigma = \int \frac{z^2}{R^4} d\sigma = \frac{4}{3}\pi, \end{aligned} \right.$$

quel que soit R. Par conséquent,

$$\lim_{R=\infty} I = \tfrac{4}{3}\pi(rb - qc);$$

d'où, en posant

$$B = \tfrac{4}{3}\pi\rho b, \qquad C = \tfrac{4}{3}\pi\rho c,$$

on tire

$$\rho \lim_{R=\infty} I = rB - qC.$$

On peut donc écrire

$$-p_x = \rho\int (U + C)\cos\alpha\, ds - \rho\int \frac{\partial F}{\partial t}\cos\alpha\, dS - \frac{\rho}{2}\int \sum\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 \cos\alpha\, dS$$
$$+ \rho\int \sum \frac{\partial F}{\partial x}(u + qz - ry)\cos\alpha\, dS + qC - rB,$$

en entendant par dS l'élément superficiel de la surface (S) du corps et de la sphère (σ) du rayon R infiniment grand, prises ensemble.

Posons, pour abréger l'écriture,

$$K = -\frac{\rho}{2}\int \sum\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 \cos\alpha\, dS + \rho\int \sum \frac{\partial F}{\partial x}(u + qz - ry)\cos\alpha\, dS,$$

et désignons par $d\tau'$ l'élément de volume de l'espace, limité par la surface (S) et par la sphère (σ).

On trouve, en employant la transformation de Green,

$$K = \rho\int \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}U + \frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}V + \frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial z}W\right)d\tau' + \rho q\int \frac{\partial F}{\partial z}d\tau' - \rho r\int \frac{\partial F}{\partial y}d\tau',$$

où l'on a posé

$$U = \frac{\partial F}{\partial x} - (u + qz - ry), \quad V = \frac{\partial F}{\partial y} - (v + rx - pz), \quad W = \frac{\partial F}{\partial z} + (w + py - qx),$$

U, V, W étant les composantes de la vitesse relative des points du liquide indéfini par rapport au corps solide.

D'autre part,

$$\rho\int \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}U + \frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}V + \frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial z}W\right)d\tau' = -\rho\int \frac{\partial F}{\partial x}(U\cos\alpha + V\cos\beta + W\cos\gamma)\,dS = 0.$$

On a, en effet,

$$\lim_{R=\infty}\int \frac{\partial F}{\partial x}(U\cos\alpha + V\cos\beta + W\cos\gamma)\,d\sigma = 0$$

et

$$\int \frac{\partial F}{\partial x}(U\cos\alpha + V\cos\beta + W\cos\gamma)\,ds = 0,$$

puisque

$$U\cos\alpha + V\cos\beta + W\cos\gamma = 0 \quad \text{sur} \quad (S).$$

On a donc

$$K = \rho q \int \frac{\partial F}{\partial z}\,d\tau' - \rho r \int \frac{\partial F}{\partial z}\,d\tau'.$$

D'autre part, d'après le théorème de Green (*voir* n° 4),

$$(10)\quad \begin{cases} R'_1 = -\rho \int \frac{\partial F}{\partial x}\,d\tau' = \rho \int F\cos\alpha\,dS - \rho \sum_{s=1}^{m} k_s \int \cos\alpha\,d\sigma_s, \\ R'_2 = -\rho \int \frac{\partial F}{\partial y}\,d\tau' = \rho \int F\cos\beta\,dS - \rho \sum_{s=1}^{m} k_s \int \cos\beta\,d\sigma_s, \\ R'_3 = -\rho \int \frac{\partial F}{\partial z}\,d\tau' = \rho \int F\cos\gamma\,dS - \rho \sum_{s=1}^{m} k_s \int \cos\gamma\,d\sigma_s, \end{cases}$$

ou, en tenant compte de (8) et (9),

$$(11)\quad \begin{cases} R'_1 = R_1 + \rho \lim_{R=\infty} \int F\cos\alpha\,d\sigma = R_1 + A & (A = \frac{4}{3}\pi\rho a), \\ R'_2 = R_2 + \rho \lim_{R=\infty} \int F\cos\beta\,d\sigma = R_2 + B & (B = \frac{4}{3}\pi\rho b), \\ R'_3 = R_3 + \rho \lim_{R=\infty} \int F\cos\gamma\,d\sigma = R_3 + C & (C = \frac{4}{3}\pi\rho c), \end{cases}$$

où l'on a posé

$$(12)\quad \begin{cases} R_1 = \rho \int F\cos\alpha\,ds - \rho \sum_{s=1}^{m} k_s \int \cos\alpha\,d\sigma_s, \\ R_2 = \rho \int F\cos\beta\,ds - \rho \sum_{s=1}^{m} k_s \int \cos\beta\,d\sigma_s, \\ R_3 = \rho \int F\cos\gamma\,ds - \rho \sum_{s=1}^{m} k_s \int \cos\gamma\,d\sigma_s. \end{cases}$$

Par conséquent,

$$K = rR_2 - qR_3 + rB - qC.$$

Supposons maintenant que la fonction U soit uniforme et continue dans l'espace tout entier.

On trouve

$$\int (\mathrm{U}+\mathrm{C}) \cos\alpha \, ds = \int \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x} d\tau,$$

$d\tau$ étant l'élément de volume limité par la surface (S).

Il résulte de ce qui précède que

$$(13)\quad \left\{ \begin{array}{l} p_x = -\rho \int \dfrac{\partial \mathrm{U}}{\partial x} d\tau + q\mathrm{R}_3 - r\mathrm{R}_2 + \dfrac{d\mathrm{R}_1}{dt}. \\ \text{Nous trouverons ensuite, de la même manière,} \\ p_y = -\rho \int \dfrac{\partial \mathrm{U}}{\partial y} d\tau + r\mathrm{R}_1 - p\mathrm{R}_3 + \dfrac{d\mathrm{R}_2}{dt}, \\ p_z = -\rho \int \dfrac{\partial \mathrm{U}}{\partial z} d\tau + p\mathrm{R}_2 - q\mathrm{R}_1 + \dfrac{d\mathrm{R}_3}{dt}. \end{array} \right.$$

Quant à p_{nx}, p_{ny}, p_{nz}, ils se représenteront sous la forme suivante

$$(14)\quad \left\{ \begin{array}{l} p_{nx} = \rho_n \int \dfrac{\partial \mathrm{U}_n}{\partial x} d\tau^{(n)} + q\mathrm{R}_3^{(n)} - r\mathrm{R}_2^{(n)} + \dfrac{d\mathrm{R}_1^{(n)}}{dt} \\ p_{ny} = \rho_n \int \dfrac{\partial \mathrm{U}_n}{\partial y} d\tau^{(n)} + r\mathrm{R}_1^{(n)} - p\mathrm{R}_3^{(n)} + \dfrac{d\mathrm{R}_2^{(n)}}{dt} \\ p_{nz} = \rho_n \int \dfrac{\partial \mathrm{U}_n}{\partial z} d\tau^{(n)} + p\mathrm{R}_2^{(n)} - q\mathrm{R}_1^{(n)} + \dfrac{d\mathrm{R}_3^{(n)}}{dt} \end{array} \right\} \quad (n = 1, 2, \ldots, q),$$

où

$$\mathrm{R}_1^{(n)} = \rho_n \int \mathrm{F}_n \cos\alpha \, ds^{(n)} - \rho_n \sum_{s=1}^{p_n} k_s^{(n)} \int \cos\alpha \, d\sigma_s^{(n)},$$

$$\mathrm{R}_2^{(n)} = \rho_n \int \mathrm{F}_n \cos\beta \, ds^{(n)} - \rho_n \sum_{s=1}^{p_n} k_s^{(n)} \int \cos\beta \, d\sigma_s^{(n)},$$

$$\mathrm{R}_3^{(n)} = \rho_n \int \mathrm{F}_n \cos\gamma \, ds^{(n)} - \rho_n \sum_{s=1}^{p_n} k_s^{(n)} \int \cos\gamma \, d\sigma_s^{(n)}.$$

Dans ces formules, nous entendons par α, β, γ les angles de la normale intérieure à (S_n) avec les axes des coordonnées.

11. Formons maintenant les expressions de

$$q_x, \quad q_y, \quad q_z, \qquad q_{nx}, \quad q_{ny}, \quad q_{nz} \qquad (n = 1, 2, \ldots, q).$$

Posons, pour abréger l'écriture,

$$(15)\quad \begin{cases} u_1 = u + qz - ry, \quad v_1 = v + rx - pz, \quad w_1 = w + py - qx, \\ p_1 = -\frac{1}{2}\sum\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \sum \frac{\partial F}{\partial x} u_1. \end{cases}$$

On a

$$-q_x = \int p(y\cos\gamma - z\cos\beta)\,ds,$$

d'où, en raisonnant comme précédemment (n° 10), on tire

$$(16)\quad -q_x = \rho\int (U + C)(y\cos\gamma - z\cos\beta)\,ds - \rho\int \frac{\partial F}{\partial t}(y\cos\gamma - z\cos\beta)\,ds + \rho\int p_1(y\cos\gamma - z\cos\beta)\,dS,$$

car

$$\lim_{R=\infty}\int p_1(y\cos\gamma - z\cos\beta)\,d\sigma = 0.$$

Le théorème de Green donne

$$q_{1x} = \rho\int p_1(y\cos\gamma - z\cos\beta)\,dS = -\rho\int\left(\frac{\partial p_1}{\partial z}y - \frac{\partial p_1}{\partial y}z\right)d\tau',$$

où, en vertu de (15),

$$\frac{\partial p_1}{\partial z}y - \frac{\partial p_1}{\partial y}z = \frac{\partial \psi}{\partial x}U + \frac{\partial \psi}{\partial y}V + \frac{\partial \psi}{\partial z}W + w\frac{\partial F}{\partial y} - v\frac{\partial F}{\partial z} + q\left(\frac{\partial F}{\partial x}y - \frac{\partial F}{\partial y}x\right) - r\left(\frac{\partial F}{\partial z}x - \frac{\partial F}{\partial x}z\right),$$

$$\psi = \frac{\partial F}{\partial y}z - \frac{\partial F}{\partial z}y.$$

Il est aisé de s'assurer (*voir* numéro précédent) que

$$\int\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}U + \frac{\partial \psi}{\partial y}V + \frac{\partial \psi}{\partial z}\partial W\right)d\tau' = -\int \psi(U\cos\alpha + V\cos\beta + W\cos\gamma)\,dS - \lim_{R=\infty}\int\left(\frac{\partial F}{\partial y}z - \frac{\partial F}{\partial z}y\right)(U\cos\alpha + V\cos\beta + W\cos\gamma)\,d\sigma = wB - vC.$$

On a donc

$$q_{1x} = \rho v \int \frac{\partial F}{\partial z} d\tau' - \rho w \int \frac{\partial F}{\partial y} d\tau'$$
$$+ \rho q \int \left(\frac{\partial F}{\partial y} x - \frac{\partial F}{\partial x} y \right) d\tau' - \rho r \int \left(\frac{\partial F}{\partial x} z - \frac{\partial F}{\partial z} x \right) d\tau' + v C - w B.$$

Or, d'après le théorème de Green,

$$(17) \quad \begin{cases} S_2 = -\rho \int \left(\frac{\partial F}{\partial x} z - \frac{\partial F}{\partial z} x \right) d\tau' \\ \quad = \rho \int F(z \cos\alpha - x \cos\gamma)\, ds - \rho \sum_{s=1}^{m} k_s \int (z \cos\alpha - x \cos\gamma)\, d\sigma_s, \\ S_3 = -\rho \int \left(\frac{\partial F}{\partial y} x - \frac{\partial F}{\partial x} y \right) d\tau' \\ \quad = \rho \int F(x \cos\beta - y \cos\alpha)\, ds - \rho \sum_{s=1}^{m} k_s \int (x \cos\beta - y \cos\alpha)\, d\sigma_s, \end{cases}$$

puisque

$$\lim_{R=\infty} \int F(z \cos\alpha - x \cos\gamma)\, d\sigma = 0,$$
$$\lim_{R=\infty} \int F(x \cos\beta - y \cos\alpha)\, d\sigma = 0.$$

On a donc, en vertu de (10), (11), (12) et (17),

$$q_{1x} = w R_2 - v R_3 + r S_2 - q S_3.$$

D'autre part (*voir* numéro précédent),

$$\int (U + C)(y \cos\gamma - z \cos\beta)\, ds = -\int \left(z \frac{\partial U}{\partial y} - y \frac{\partial U}{\partial z} \right) d\tau,$$

et l'équation (16) devient

$$(18) \qquad q_x = v R_3 - w R_2 + q S_3 - r S_2 + \frac{dS_1}{dt} + \rho \int \left(z \frac{\partial U}{\partial y} - y \frac{\partial U}{\partial z} \right) d\tau,$$

où l'on a posé

$$(17_1) \quad S_1 = \rho \int F(y \cos\gamma - z \cos\beta)\, ds - \rho \sum_{s=1}^{m} k_s \int (y \cos\gamma - z \cos\beta)\, d\sigma_s.$$

La même méthode nous donnera ensuite

$$(18)\quad \begin{cases} q_y = w R_1 - u R_3 + r S_1 - p S_3 + \dfrac{dS_2}{dt} + \rho \displaystyle\int \left(x \frac{\partial U}{\partial z} - z \frac{\partial U}{\partial x} \right) d\tau, \\ q_z = u R_2 + v R_1 + p S_2 - q S_1 + \dfrac{dS_3}{dt} + \rho \displaystyle\int \left(y \frac{\partial U}{\partial x} - x \frac{\partial U}{\partial y} \right) d\tau. \end{cases}$$

Quant à q_{nx}, q_{ny}, q_{nz}, il est aisé de s'assurer qu'ils se représentent sous la forme suivante :

$$(19)\quad q_{nx} = v R_3^{(n)} - w R_2^{(n)} + q S_3^{(n)} - r S_2^{(n)} + \frac{dS_1^{(n)}}{dt} - \rho_n \int \left(\frac{\partial U_n}{\partial y} - y \frac{\partial U_n}{\partial z} \right) d\tau^{(n)},$$ et ainsi de suite pour q_{ny}, q_{nz},

où

$$S_1^{(n)} = \rho_n \int F_n (y \cos\gamma - z \cos\beta)\, ds^{(n)} - \rho_n \sum_{s=1}^{p_n} k_s^{(n)} \int (y \cos\gamma - z \cos\beta)\, d\sigma_s^{(n)},$$ et ainsi de suite pour S_2 et S_3.

12. Transformons maintenant les expressions

$$R_j \quad \text{et} \quad S_j \qquad (j = 1, 2, 3).$$

On trouve, en remplaçant F par son expression qui résulte immédiatement de (1) et (2) et en tenant compte des propriétés des fonctions

$$\varphi_j, \quad \psi_j \qquad (j = 1, 2, 3),$$

énoncées plus haut (n° **2**),

$$-R_j = u(\varphi_1, \varphi_j) + v(\varphi_2, \varphi_j) + w(\varphi_3, \varphi_j) + p(\psi_1, \varphi_j) + q(\psi_2, \varphi_j) + r(\psi_3, \varphi_j) + G_j,$$
$$-S_j = u(\varphi_1, \psi_j) + v(\varphi_2, \psi_j) + w(\varphi_3, \psi_j) + p(\psi_1, \psi_j) + q(\psi_2, \psi_j) + r(\psi_3, \psi_j) + H_j,$$

où l'on a posé

$$G_j = \sum_{s=1}^{m} k_s \left(\int \cos\alpha\, d\sigma_s - \int \Im_s \frac{\partial \varphi_j}{\partial n} ds \right) = \sum_{s=1}^{m} k_s \int \left(\cos\alpha - \frac{\partial \varphi_j}{\partial n} \right) d\sigma_s,$$
$$H_j = \sum_{s=1}^{m} k_s \left[\int (y \cos\gamma - z \cos\beta)\, d\sigma_s - \int \Im_s \frac{\partial \psi_j}{\partial n} ds \right] = \sum_{s=1}^{m} k_s \int \left((y \cos\gamma - z \cos\beta) - \frac{\partial \psi_j}{\partial n} \right) d\sigma_s.$$

La simple comparaison des expressions

$$R_j, \quad S_j \qquad (j = 1, 2, 3)$$

avec celle de la force vive T_2 du liquide indéfini nous conduit aux relations suivantes :

$$(20)\quad \left\{\begin{array}{ll} -R_1=\dfrac{\partial T_2}{\partial u}+G_1=\dfrac{\partial T''}{\partial u}, & -S_1=\dfrac{\partial T_2}{\partial p}+H_1=\dfrac{\partial T''}{\partial p},\\ -R_2=\dfrac{\partial T_2}{\partial v}+G_2=\dfrac{\partial T''}{\partial v}, & -S_2=\dfrac{\partial T_2}{\partial q}+H_2=\dfrac{\partial T''}{\partial q},\\ -R_3=\dfrac{\partial T_2}{\partial w}+G_3=\dfrac{\partial T''}{\partial w}, & -S_3=\dfrac{\partial T_2}{\partial r}+H_3=\dfrac{\partial T''}{\partial r},\end{array}\right.$$

où

$$T''=T_2+G_1u+G_2v+G_3w+H_1p+H_2q+H_3r.$$

Quant à $R_j^{(n)}$, $S_j^{(n)}(n=1,2,\ldots,q)$, nous trouverons aisément

$$(21)\quad \left\{\begin{array}{lll} -R_1^{(n)}=\dfrac{\partial T''_n}{\partial u}, & -R_2^{(n)}=\dfrac{\partial T''_n}{\partial v}, & -R_3^{(n)}=\dfrac{\partial T''_n}{\partial w};\\ -S_1^{(n)}=\dfrac{\partial T''_n}{\partial p}, & -S_2^{(n)}=\dfrac{\partial T''_n}{\partial q}, & -S_3^{(n)}=\dfrac{\partial T''_n}{\partial r},\end{array}\right.$$

où

$$T''_n=T_{2n}+H_1^{(n)}p+H_2^{(n)}q+H_3^{(n)}r,$$

$$H_j^{(n)}=\sum_{s=1}^{p_n}k_s^{(n)}\int\left(y\cos\gamma-z\cos\beta-\frac{\partial\psi_j^{(n)}}{\partial n}\right)d\sigma_s^{(n)}.$$

13. Désignons par

$$\mathfrak{P}_x,\quad \mathfrak{P}_y,\quad \mathfrak{P}_z\quad \text{et}\quad \mathfrak{Q}_x,\quad \mathfrak{Q}_y,\quad \mathfrak{Q}_z$$

les projections de la résultante générale et du moment résultant par rapport à O des pressions du liquide indéfini et des masses fluides remplissant des cavités.

On a évidemment

$$\mathfrak{P}_x=p_x+\sum_{n=1}^{q}p_{nx},\qquad \mathfrak{P}_y=p_y+\sum_{n=1}^{q}p_{ny},\qquad \mathfrak{P}_z=p_z+\sum_{n=1}^{q}p_{nz},$$

$$\mathfrak{Q}_x=q_x+\sum_{n=1}^{q}q_{nx},\qquad \mathfrak{Q}_y=q_y+\sum_{n=1}^{q}q_{ny},\qquad \mathfrak{Q}_z=q_z+\sum_{n=1}^{q}q_{nz}.$$

En remplaçant $p_x,\ldots,q_x,\ldots;\ p_{nx},\ldots,q_{nx},\ldots$ par leurs expressions (13),

(14), (18), (19) et en tenant compte de (20) et (21), on trouve finalement

$$(22)\quad \mathfrak{P}_x = -\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial u}\right) + r\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial v} - q\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial w} - \rho\int \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x}\,d\tau + \sum_{n=1}^{q}\rho_n\int \frac{\partial \mathrm{U}_n}{\partial x}\,d\tau^{(n)}, \quad \text{et ainsi de suite,}$$

$$(23)\quad \mathfrak{Q}_x = -\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial p}\right) + w\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial v} - v\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial w} + r\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial q} - q\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial r}$$
$$+\rho\int\left(z\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial y} - y\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial z}\right)d\tau - \sum_{n=1}^{q}\rho_n\int\left(z\frac{\partial \mathrm{U}_n}{\partial y} - y\frac{\partial \mathrm{U}_n}{\partial z}\right)d\tau^{(n)}, \quad \text{et ainsi de suite.}$$

Dans les formules précédentes,

$$\mathfrak{T} = \mathrm{T}'' + \sum_{n=1}^{q}\mathrm{T}''_n.$$

ÉQUATIONS GÉNÉRALES DU MOUVEMENT D'UN CORPS SOLIDE DANS UN LIQUIDE INDÉFINI.

14. On peut considérer un corps solide, plongé dans un liquide indéfini, comme un corps solide libre, soumis à des forces extérieures données et à des forces des pressions exercées par le liquide indéfini et par les masses fluides remplissant des cavités sur les parois du corps.

Désignons par

$$\mathrm{X},\quad \mathrm{Y},\quad \mathrm{Z}$$

les projections de la résultante générale des forces extérieures agissant sur les divers points du corps; par

$$\mathrm{M}_x,\quad \mathrm{M}_y,\quad \mathrm{M}_z$$

les projections de leur moment résultant.

Les équations du mouvement se représenteront sous la forme suivante

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial u}\right) = r\frac{\partial T}{\partial v} - q\frac{\partial T}{\partial w} + \mathrm{X} + \mathfrak{P}_x,$$

et ainsi de suite pour les axes des y et des z,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right) = w\frac{\partial T}{\partial v} - v\frac{\partial T}{\partial w} + r\frac{\partial T}{\partial q} - q\frac{\partial T}{\partial r} + \mathrm{M}_x + \mathfrak{Q}_x,$$

et ainsi de suite pour les axes des y et des z.

En remplaçant $\mathfrak{P}_x$, $\mathfrak{Q}_x$, ... par leurs expressions (22) et (23) et en posant

$$\mathrm{T} = T + \mathfrak{T},$$

on trouve finalement les équations cherchées sous la forme suivante

$$(24)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial u}\right) = r\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial v} - q\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial w} - \rho\int\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x}d\tau + \sum_{n=1}^{q}\rho_n\int\frac{\partial \mathrm{U}_n}{\partial x}d\tau^{(n)} + \mathrm{X},\\
&\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial v}\right) = p\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial w} - r\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial u} - \rho\int\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial y}d\tau + \sum_{n=1}^{q}\rho_n\int\frac{\partial \mathrm{U}_n}{\partial y}d\tau^{(n)} + \mathrm{Y},\\
&\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial w}\right) = q\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial u} - p\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial v} - \rho\int\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial z}d\tau + \sum_{n=1}^{q}\rho_n\int\frac{\partial \mathrm{U}_n}{\partial z}d\tau^{(n)} + \mathrm{Z};\\
&\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial p}\right) = w\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial v} - v\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial w} + r\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q} - q\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial r}\\
&\qquad + \rho\int\left(z\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial y} - y\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial z}\right)d\tau - \sum_{n=1}^{q}\rho_n\int\left(z\frac{\partial \mathrm{U}_n}{\partial y} - y\frac{\partial \mathrm{U}_n}{\partial z}\right)d\tau^{(n)} + \mathrm{M}_x,\\
&\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q}\right) = u\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial w} - w\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial u} + p\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial r} - r\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial p}\\
&\qquad + \rho\int\left(x\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial z} - z\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x}\right)d\tau - \sum_{n=1}^{q}\rho_n\int\left(x\frac{\partial \mathrm{U}_n}{\partial z} - z\frac{\partial \mathrm{U}_n}{\partial x}\right)d\tau^{(n)} + \mathrm{M}_y,\\
&\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial r}\right) = v\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial u} - u\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial v} + q\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial p} - p\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q}\\
&\qquad + \rho\int\left(y\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x} + x\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial y}\right)d\tau - \sum_{n=1}^{q}\rho_n\int\left(y\frac{\partial \mathrm{U}_n}{\partial x} - x\frac{\partial \mathrm{U}_n}{\partial y}\right)d\tau^{(n)} + \mathrm{M}_z.
\end{aligned}\right.$$

En posant

$$u = v = w = p = q = r = 0,$$

nous obtiendrons les conditions générales de l'équilibre d'un corps solide dans un liquide indéfini

$$(25)\quad \left\{\begin{aligned}
&\mathrm{X} - \rho\int\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x}d\tau + \sum_{n=1}^{q}\rho_n\int\frac{\partial \mathrm{U}_n}{\partial x}d\tau^{(n)} = 0, \qquad \ldots,\\
&\mathrm{M}_x + \rho\int\left(z\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial y} - y\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial z}\right)d\tau - \sum_{n=1}^{q}\rho_n\int\left(z\frac{\partial \mathrm{U}_n}{\partial y} - y\frac{\partial \mathrm{U}_n}{\partial z}\right)d\tau^{(n)} = 0, \qquad \ldots
\end{aligned}\right.$$

CHAPITRE II.

INTÉGRATION DES ÉQUATIONS DU MOUVEMENT DANS LE CAS DE L'ABSENCE DE TOUTE FORCE ACCÉLÉRATRICE.

1. Supposons maintenant que les forces extérieures agissant sur les points du corps solide et les forces agissant sur les masses fluides satisfassent aux conditions (25).

Supposons encore, *pour plus de simplicité,* que la surface (S) du corps, ainsi que les surfaces (S_n) qui limitent des cavités, soient simplement connexes.

Ces conditions étant remplies, on tire de (24) les équations connues de M. Kirchhoff

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial u}\right) = r\dfrac{\partial T}{\partial v} - q\dfrac{\partial T}{\partial w}, \\[2mm] \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial v}\right) = p\dfrac{\partial T}{\partial w} - r\dfrac{\partial T}{\partial u}, \\[2mm] \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial w}\right) = q\dfrac{\partial T}{\partial u} - p\dfrac{\partial T}{\partial v}, \end{cases}$$

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial p}\right) = w\dfrac{\partial T}{\partial v} - v\dfrac{\partial T}{\partial w} + r\dfrac{\partial T}{\partial q} - q\dfrac{\partial T}{\partial r}, \\[2mm] \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial q}\right) = u\dfrac{\partial T}{\partial w} - w\dfrac{\partial T}{\partial u} + p\dfrac{\partial T}{\partial r} - r\dfrac{\partial T}{\partial p}, \\[2mm] \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial r}\right) = v\dfrac{\partial T}{\partial u} - u\dfrac{\partial T}{\partial v} + q\dfrac{\partial T}{\partial p} - p\dfrac{\partial T}{\partial q}, \end{cases}$$

où (n°s 5, 6, 7 et 13)

$$(3)\qquad T = \mathcal{T} + T_2 + \sum_{n=1}^{q} T_{2n}.$$

Ces équations admettent trois intégrales connues

$$(4)\quad \begin{cases} 2T = L, \\[2mm] \left(\dfrac{\partial T}{\partial u}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial T}{\partial v}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial T}{\partial w}\right)^2 = M, \\[2mm] \dfrac{\partial T}{\partial u}\dfrac{\partial T}{\partial p} + \dfrac{\partial T}{\partial v}\dfrac{\partial T}{\partial q} + \dfrac{\partial T}{\partial w}\dfrac{\partial T}{\partial r} = N, \end{cases}$$

L, M, N étant des constantes arbitraires.

2. Le théorème du n° 8 montre que le problème du mouvement d'un corps solide donné ayant des cavités remplies par les masses fluides se ramène, dans le cas considéré, au problème du mouvement d'un autre corps solide dont la force vive est égale à

$$\mathfrak{T} = T + \sum_{n=1}^{q} T_{2n}.$$

Prenons le centre de gravité de ce dernier corps pour l'origine des coordonnées, et dirigeons les axes des coordonnées suivant les axes de l'ellipsoïde central d'inertie.

Désignons ensuite par a_1, b_1, c_1 les moments d'inertie par rapport aux axes de coordonnées, et posons

$$a = \frac{a_1}{M}, \qquad b = \frac{b_1}{M}, \qquad c = \frac{c_1}{M},$$

$$\varepsilon = \frac{\rho}{M},$$

M étant la masse totale du corps dont il s'agit.

Posons encore

$$A = \frac{b-c}{a}, \qquad B = \frac{c-a}{b}, \qquad C = \frac{a-b}{c}.$$

Les équations (1) et (2) deviennent alors

$$(5) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{du}{dt} &= rv - qw + \varepsilon p'_x, \\ \frac{dv}{dt} &= pw - ru + \varepsilon p'_y, \\ \frac{dw}{dt} &= qu - pv + \varepsilon p'_z, \end{aligned} \right.$$

$$(6) \qquad \frac{dp}{dt} = A\,rq + \varepsilon q'_x, \qquad \frac{dq}{dt} = B\,pr + \varepsilon q'_y, \qquad \frac{dr}{dt} = C\,pq + \varepsilon q'_z,$$

où l'on a posé, en remplaçant, pour simplifier l'écriture, T_2 par T,

$$(7) \qquad \left\{ \begin{aligned} Mp'_x &= r\frac{\partial T}{\partial v} - q\frac{\partial T}{\partial w} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial u}\right), \\ Mp'_y &= p\frac{\partial T}{\partial w} - r\frac{\partial T}{\partial u} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial v}\right), \\ Mp'_z &= q\frac{\partial T}{\partial u} - p\frac{\partial T}{\partial v} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial w}\right), \end{aligned} \right.$$

et

$$
(8)\qquad \begin{cases}
aq'_x = w\dfrac{\partial T}{\partial v} - v\dfrac{\partial T}{\partial w} + r\dfrac{\partial T}{\partial q} - q\dfrac{\partial T}{\partial r} - \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial p}\right), \\
bq'_y = u\dfrac{\partial T}{\partial w} - w\dfrac{\partial T}{\partial u} + p\dfrac{\partial T}{\partial r} - r\dfrac{\partial T}{\partial p} - \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial q}\right), \\
cq'_z = v\dfrac{\partial T}{\partial u} - u\dfrac{\partial T}{\partial v} + q\dfrac{\partial T}{\partial p} - p\dfrac{\partial T}{\partial q} - \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial r}\right).
\end{cases}
$$

3. Résolvons les équations (5) et (6) par rapport aux dérivées

$$\frac{du}{dt},\quad \frac{dv}{dt},\quad \frac{dw}{dt},\quad \frac{dp}{dt},\quad \frac{dq}{dt},\quad \frac{dr}{dt}.$$

Nous obtiendrons

$$
(9)\qquad \begin{cases}
\dfrac{du}{dt} = f_1(u, v, w, p, q, r, \varepsilon), \\
\dfrac{dv}{dt} = f_2(u, v, w, p, q, r, \varepsilon), \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\
\dfrac{dr}{dt} = f_6(u, v, w, p, q, r, \varepsilon),
\end{cases}
$$

où $f_s(s = 1, 2, \dots, 6)$ sont des polynomes du second degré en u, v, w, p, q, r à coefficients constants et les fonctions du paramètre ε holomorphes en ε, pourvu que $|\varepsilon|$ ne surpasse pas un certain nombre μ assez petit.

On peut donc, pour intégrer ces équations, appliquer la méthode des approximations successives en représentant u, v, w, p, q, r sous la forme des séries, ordonnées suivant les puissances de ε et se réduisant à α, β, γ; α', β', γ' pour $t = t_0$, $\alpha, \beta, \dots$ étant les constantes données.

On trouve, pour $\varepsilon = 0$,

$$
(10)\qquad \begin{cases}
\dfrac{du_0}{dt} = r_0 v_0 - q_0 w_0, \\
\dfrac{dv_0}{dt} = p_0 w_0 - r_0 u_0, \\
\dfrac{dw_0}{dt} = q_0 u_0 - p_0 v_0,
\end{cases}
$$

$$
(11)\qquad \frac{dp_0}{dt} = A r_0 q_0, \qquad \frac{dq_0}{dt} = B p_0 r_0, \qquad \frac{dr_0}{dt} = C q_0 p_0,
$$

c'est-à-dire les équations du mouvement d'un corps solide libre dans le vide.

On sait que les fonctions $u_0, v_0, \ldots, r_0$ sont continues pour

$$t_0 \leqq t \leqq t_0 + l = \mathrm{T},$$

l étant un nombre quelconque positif.

Les solutions des équations (9) correspondant aux valeurs initiales

$$u = \alpha, \quad v = \beta, \quad w = \gamma; \quad p = \alpha', \quad q = \beta', \quad r = \gamma' \quad \text{pour} \quad t = t_0$$

sont des fonctions holomorphes en ε, pourvu que $|\varepsilon|$ soit la plus petite des quantités

$$\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{M}(e^{\alpha l} - 1)} \quad \text{et} \quad \mu,$$

K, M, α étant des nombres finis positifs, choisis convenablement [1].

Pour obtenir ces solutions des équations (9), ou, ce qui revient au même, des équations (5) et (6), il suffit de déterminer les fonctions $u_k, v_k, w_k, p_k, q_k, r_k$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ dans les séries

$$(12) \qquad \left\{ \begin{aligned} u &= \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k u_k, & v &= \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k v_k, & w &= \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k w_k, \\ p &= \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k p_k, & q &= \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k q_k, & r &= \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k r_k, \end{aligned} \right.$$

sous les conditions

$$\left. \begin{array}{l} u_0 = \alpha, \quad v_0 = \beta, \quad w_0 = \gamma; \quad p_0 = \alpha', \quad q_0 = \beta', \quad r_0 = \gamma' \\ u_k = v_k = w_k = p_k = q_k = r_k = 0 \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots) \end{array} \right\} \quad \text{pour} \quad t = t_0.$$

4. Nous nous plaçons cependant sur un autre point de vue un peu plus général.

Désignons d'abord par T_k ce que revient T, quand on y remplace u, v, w, p, q, r respectivement par $u_k, v_k, w_k, p_k, q_k, r_k$.

On trouve

$$\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial u} = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \frac{\partial \mathrm{T}_k}{\partial u_k}, \qquad \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial v} = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \frac{\partial \mathrm{T}_k}{\partial v_k}, \qquad \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial w} = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \frac{\partial \mathrm{T}_k}{\partial w_k},$$

$$\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial p} = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \frac{\partial \mathrm{T}_k}{\partial p_k}, \qquad \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q} = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \frac{\partial \mathrm{T}_k}{\partial q_k}, \qquad \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial r} = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \frac{\partial \mathrm{T}_k}{\partial r_k},$$

---

[1] *Voir*, par exemple, E. LINDELÖF, *Démonstration de quelques théorèmes sur les équations différentielles* (*Journal de Mathématiques*, 1901).

Substituons maintenant les valeurs (12) de u, v, w, p, q, r dans (5) et (6).

Nous obtiendrons les équations (10) et (11) pour $u_0, v_0, w_0, p_0, q_0, r_0$ et les équations suivantes pour déterminer de proche en proche tous les $u_k, v_k, w_k, p_k, q_k, r_k$ à partir de $k = 1$,

$$(13)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{du_k}{dt} &= r_0 v_k - q_0 w_k + X_1^{(k)}, \\ \frac{dv_k}{dt} &= p_0 w_k - r_0 u_k + X_2^{(k)}, \\ \frac{dw_k}{dt} &= q_0 u_k - p_0 v_k + X_3^{(k)}, \end{aligned}\right.$$

$$(14)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{dp_k}{dt} &= A(q_0 r_k + r_0 q_k) + Y_1^{(k)}, \\ \frac{dq_k}{dt} &= B(r_0 p_k + p_0 r_k) + Y_2^{(k)}, \\ \frac{dr_k}{dt} &= C(p_0 q_k + q_0 p_k) + Y_3^{(k)}, \end{aligned}\right.$$

où l'on a posé, pour abréger l'écriture,

$$X_1^{(k)} = \sum_{s=1}^{k} (r_s v_{k-s} - q_s w_{k-s}) + \frac{1}{M}\left\{\sum_{s=0}^{k-1}\left(r_s \frac{\partial T_{k-1-s}}{\partial v_{k-1-s}} - q_s \frac{\partial T_{k-1-s}}{\partial w_{k-1-s}}\right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_{k-1}}{\partial u_{k-1}}\right)\right\}$$

et ainsi de suite pour $X_2^{(k)}, X_3^{(k)}$,

$$Y_1^{(k)} = A\sum_{s=1}^{k-1} q_s r_{k-s} + \frac{1}{a}\left\{\sum_{s=0}^{k-1}\left[w_s \frac{\partial T_{k-1-s}}{\partial v_{k-1-s}} - v_s \frac{\partial T_{k-1-s}}{\partial w_{k-1-s}} + r_s \frac{\partial T_{k-1-s}}{\partial q_{k-1-s}} - q_s \frac{\partial T_{k-1-s}}{\partial r_{k-1-s}} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_{k-1}}{\partial p_{k-1}}\right)\right]\right\}$$

et ainsi de suite pour $Y_2^{(k)}, Y_3^{(k)}$.

Il est aisé de voir que $X_j^{(k)}$ $(j = 1, 2, 3)$ ne dépendent que de

$$u_s,\quad v_s,\quad w_s \qquad (s = 0, 1, 2, \ldots, k-1),$$
$$p_s,\quad q_s,\quad r_s \qquad (s = 0, 1, 2, \ldots, k),$$

$Y_j^{(k)}$ $(j = 1, 2, 3)$ ne dépendent que de

$$\left.\begin{matrix} u_s, & v_s, & w_s \\ p_s, & q_s, & r_s \end{matrix}\right\} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, k-1).$$

Après avoir trouvé les fonctions u_0, v_0, w_0, p_0, q_0, r_0, nous déterminerons p_1, q_1, r_1 par l'intégration des équations linéaires (14) (en y posant $k=1$), puis nous trouverons u_1, v_1, w_1 en intégrant les équations (13), si l'on y fait $k=1$.

En général, après avoir trouvé

$$u_s, \quad v_s, \quad w_s \qquad (s=0,1,2,\ldots,k-1),$$
$$p_s, \quad q_s, \quad r_s \qquad (s=0,1,2,\ldots,k),$$

nous obtiendrons u_k, v_k, w_k à l'aide des équations (13) et, après cela, p_{k+1}, q_{k+1}, r_{k+1} par l'intégration des équations (14) (en y remplaçant k par $k+1$), et ainsi de suite.

Chaque intégration introduira trois constantes arbitraires qui doivent être choisies sous la seule condition que les séries (12) soient convergentes.

Le choix de ces constantes comporte encore un large degré d'arbitraire, de sorte que nous pouvons construire une infinité de séries (12), absolument convergentes, représentant les solutions des équations (5) et (6) [ou (1) et (2)] (¹).

5. Cette méthode, dont nous venons d'exposer les principes, a été indiquée, il y a 8 ans (en 1893), dans ma Thèse *Sur le mouvement d'un corps solide dans un liquide indéfini*, où j'ai appelé pour la première fois l'attention sur les équations (13) et (14) (²).

6 ans après, M. G. Kobb a appliqué la même méthode pour établir l'existence des solutions périodiques du problème de la rotation d'un corps autour d'un point fixe dans son Mémoire, paru en 1899 dans les *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse* (³).

Les équations (12) et (13) du Mémoire de M. G. Kobb (p. 10) sont identiques avec celles (14) et (15) (p. 55) de ma Thèse, citée plus haut [ou avec celles (13) et (14) de ce Mémoire]; seulement, dans le cas de M. G. Kobb, $\gamma_\lambda, \gamma'_\lambda, \gamma''_\lambda$ dépendent de cosinus directeurs des axes mobiles avec la verticale, tandis que, dans nos équations, u_k, v_k, w_k sont liés avec les composantes de la vitesse du centre de gravité du corps plongé dans le liquide.

Pour intégrer les équations (13) et (14), je pourrais employer la méthode de

(¹) *Voir* M. A. LIAPOUNOFF, *Problème général de stabilité du mouvement*. Édition de la Société mathématique de Kharkow, 1892, p. 8.

(²) W. STEKLOFF, *Sur le mouvement d'un corps solide dans un liquide indéfini* (*Annales de l'Université de Kharkow*, 1893, p. 51 et suiv.).

(³) G. KOBB, *Sur les solutions périodiques du problème de la rotation d'un corps autour d'un point fixe* (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 2ᵉ série, t. I, nº 1, 1899, p. 5 et suiv.).

[illegible]

[illegible]

$$[illegible]$$

[illegible]

$$[illegible]$$

[illegible]

$$[illegible]$$

[illegible] est un argument qu'on peut déterminer par les conditions

$$[illegible] \qquad \text{dn}\, u_0 = \sqrt{\frac{\gamma-\alpha}{\gamma-\beta}}.$$

p_0, q_0, r_0 sont les fonctions périodiques de t avec la période réelle

$$\omega = \frac{4}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \frac{4K}{n},$$

où

$$k^2 = \frac{(\beta-\alpha)(\gamma-\delta)}{(\delta-\alpha)(\gamma-\beta)}.$$

Quant aux équations (10), elles admettent un système des solutions indépen-

dantes

$$
(16) \quad \left\{
\begin{aligned}
& u' = -\frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{cn}\omega}, \qquad v' = \frac{\operatorname{dn}\omega \operatorname{sn} u}{\operatorname{cn}\omega}, \qquad w' = \frac{\operatorname{sn}\omega \operatorname{dn} u}{i\operatorname{cn}\omega}, \\
& u'' = \frac{\Theta_1(0)\,\mathrm{H}(u-\omega)}{\mathrm{H}_1(\omega)\,\Theta(u)}\,e^{i\lambda u}, \qquad u''' = \frac{\Theta_1(0)\,\mathrm{H}(u+\omega)}{\mathrm{H}_1(\omega)\,\Theta(u)}\,e^{-i\lambda u}, \\
& v'' = \frac{\Theta(0)\,\mathrm{H}_1(u-\omega)}{\mathrm{H}_1(\omega)\,\Theta(u)}\,e^{i\lambda u}, \qquad v''' = \frac{\Theta(0)\,\mathrm{H}_1(u+\omega)}{\mathrm{H}_1(\omega)\,\Theta(u)}\,e^{-i\lambda u}, \\
& w'' = \frac{\mathrm{H}_1(0)\,\Theta(u-\omega)}{i\mathrm{H}_1(\omega)\,\Theta(u)}\,e^{i\lambda u}, \qquad w''' = \frac{\mathrm{H}_1(0)\,\Theta(u+\omega)}{i\mathrm{H}_1(\omega)\,\Theta(u)}\,e^{-i\lambda u}, \\
& \qquad\qquad i\lambda = \frac{i\alpha}{n} + \frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)},
\end{aligned}
\right.
$$

λ étant une constante réelle, H, H_1, Θ, Θ_1 étant les fonctions de Jacobi (¹).

Les intégrales générales des équations (10) se représenteront sous la forme suivante

$$
(17) \quad \left\{
\begin{aligned}
u_0 &= \mathrm{B}_1 u' + \mathrm{B}_2 u'' + \mathrm{B}_3 u''', \\
v_0 &= \mathrm{B}_1 v' + \mathrm{B}_2 v'' + \mathrm{B}_3 v''', \\
w_0 &= \mathrm{B}_1 w' + \mathrm{B}_2 w'' + \mathrm{B}_3 w''' \quad (^2),
\end{aligned}
\right.
$$

u', v', ..., w''' étant les fonctions définies par les formules (16).

7. Le problème se ramène à l'intégration des équations (13) et (14).

Les équations (13) dépourvues de seconds membres coïncident avec (10); il ne reste qu'à étudier les équations linéaires

$$
(18) \quad \left\{
\begin{aligned}
\frac{d\mathrm{P}}{dt} &= \mathrm{A}(q_0\mathrm{R} + r_0\mathrm{Q}), \\
\frac{d\mathrm{Q}}{dt} &= \mathrm{B}(r_0\mathrm{P} + p_0\mathrm{R}), \\
\frac{d\mathrm{R}}{dt} &= \mathrm{C}(p_0\mathrm{Q} + q_0\mathrm{P}) \quad (^3),
\end{aligned}
\right.
$$

c'est-à-dire les équations (14) sans seconds membres.

Il est aisé de s'assurer que ces équations admettent les solutions particulières

(¹) *Voir* H. HERMITE, *Sur quelques applications des fonctions elliptiques*, p. 24 et suiv. Paris; 1885.

(²) *Voir* les équations (18) de mon Ouvrage : *Sur le mouvement, etc.*, p. 57. Kharkow; 1893.

(³) *Voir* les équations (16) du même Ouvrage, p. 56.

[illegible]

D'où l'on tire immédiatement

$$\frac{dC_1}{dt} = (P_1Q_2 - Q_1P_2) = Aq_1Q_2 - Bp_1P_2,$$

$$\frac{dC_2}{dt} = (P_1Q_3 - Q_1P_3) = (Bp_1P_3 - Aq_1Q_3).$$

Or, en vertu de (19),

$$P_1Q_2 - Q_1P_2 = r_0(Aq_0^2 - Bp_0^2), \qquad Aq_0^2 - Bp_0^2 \gtrless 0,$$

$$Aq_0Q_2 - Bp_0P_2 = Aq_0^2 - Bp_0^2, \qquad Bp_0P_1 - Aq_0Q_1 = 0.$$

On a donc

$$\frac{dC_1}{dt} = r_0 \ldots, \qquad \frac{dC_2}{dt} = 0, \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad C_2 = \text{const.}$$

La dernière des équations (11) devient

$$\frac{d\varepsilon}{\varepsilon} + \frac{dr_0}{r_0} = 0;$$

d'où

$$\varepsilon = \frac{C_3}{r_0},$$

C_3 étant une constante arbitraire, et

$$C_1 = C_3 \int \frac{dt}{r_0^2} + \text{const.}$$

Les intégrales générales des équations (18) se représenteront sous la forme suivante

$$(22)\quad \begin{cases} P = C_1 P_1 + C_2 P_2 + C_3 P_1 \int \frac{dt}{r_0^2}, \\ Q = C_1 Q_1 + C_2 Q_2 + C_3 Q_1 \int \frac{dt}{r_0^2}, \\ R = C_1 R_1 + C_2 R_2 + C_3 \left(R_1 \int \frac{dt}{r_0^2} + \frac{1}{r_0} \right), \end{cases}$$

$C_j (j = 1, 2, 3)$ étant des constantes arbitraires, ou

$$(22_1)\quad \begin{cases} P = C_1 P_1 + C_2 P_2 + C_3 P_3, \\ Q = C_1 Q_1 + C_2 Q_2 + C_3 Q_3, \\ R = C_1 R_1 + C_2 R_2 + C_3 R_3, \end{cases}$$

en posant, pour abréger,

$$(23)\quad \begin{cases} P_3 = P_1 K, \qquad Q_3 = Q_1 K, \qquad R_3 = R_1 K + \frac{1}{r_0}, \\ K = \int \frac{dt}{r_0^2}. \end{cases}$$

8. Posons maintenant dans (14) $k = 1$.

Nous aurons

$$(24)\quad \begin{cases} a \frac{dp_1}{dt} = (b - c)(q_0 r_1 + r_0 q_1) + a Y_1^{(1)}, \\ b \frac{dq_1}{dt} = (c - a)(r_0 p_1 + p_0 r_1) + b Y_2^{(1)}, \\ c \frac{dr_1}{dt} = (a - b)(p_0 q_1 + q_0 p_1) + c Y_3^{(1)}, \end{cases}$$

$Y_j^{(1)} (j = 1, 2, 3)$ étant les fonctions connues de t.

La méthode de variation des constantes arbitraires nous permet de représenter les intégrales générales de ces équations sous la forme suivante

$$(25)\quad \begin{cases} p_1 = C_1^{(1)} P_1 + C_2^{(1)} P_2 + C_3^{(1)} P_3, \\ q_1 = C_1^{(1)} Q_1 + C_2^{(1)} Q_2 + C_3^{(1)} Q_3, \\ r_1 = C_1^{(1)} R_1 + C_2^{(1)} R_2 + C_3^{(1)} R_3, \end{cases}$$

où $C_j^{(1)}(j=1,2,3)$ sont les fonctions de t dont les dérivées satisfont aux équations

$$(26)\qquad \begin{cases} \dfrac{dC_1^{(1)}}{dt}P_1+\dfrac{dC_2^{(1)}}{dt}P_2+\dfrac{dC_3^{(1)}}{dt}P_3=Y_1^{(1)},\\ \dfrac{dC_1^{(1)}}{dt}Q_1+\dfrac{dC_2^{(1)}}{dt}Q_2+\dfrac{dC_3^{(1)}}{dt}Q_3=Y_2^{(1)},\\ \dfrac{dC_1^{(1)}}{dt}R_1+\dfrac{dC_2^{(1)}}{dt}R_2+\dfrac{dC_3^{(1)}}{dt}R_3=Y_3^{(1)}. \end{cases}$$

Il est aisé de voir que le déterminant

$$(27)\qquad \Delta=\begin{vmatrix} P_1 & P_2 & P_3\\ Q_1 & Q_2 & Q_3\\ R_1 & R_2 & R_3 \end{vmatrix}=Aq_0^2-Bp_0^2=\frac{l^2-hc}{ab}=C,$$

C étant une constante différente de zéro.

Les équations (26) donnent

$$(28)\qquad C_1'=KS_1+\frac{q_0Y_1^{(1)}-p_0Y_2^{(1)}}{r_0\Delta}+tR_1,\qquad C_2'=-R_1,\qquad C_3'=-S_1,$$

où l'on a posé

$$R_1=\frac{Q_1Y_1^{(1)}-P_1Y_2^{(1)}}{r_0\Delta},$$

$$S_1=\frac{1}{\Delta}[Y_1^{(1)}(q_0R_1-r_0Q_1)+Y_2^{(1)}(r_0P_1-p_0R_1)+Y_3^{(1)}(p_0Q_1-q_0P_1)].$$

Posons encore

$$(29)\qquad \begin{cases} H_1^{(1)}=(c-a)r_0cY_3^{(1)}-(a-b)q_0bY_2^{(1)},\\ H_2^{(1)}=(a-b)p_0aY_1^{(1)}-(b-c)r_0cY_3^{(1)},\\ H_3^{(1)}=(b-c)q_0bY_2^{(1)}-(c-a)p_0aY_1^{(1)}. \end{cases}$$

On trouve, en tenant compte de (27) et de (19),

$$(30)\qquad -R_1=\frac{H_3^{(1)}}{l^2-hc},\qquad S_1=\frac{1}{c(l^2-hc)}(ap_0^2H_1^{(1)}+bq_0^2H_2^{(1)}+cr_0^2H_3^{(1)}).$$

Les équations (28) donnent

$$C_1^{(1)}=c_1^{(1)}+\int KS_1\,dt+\int tR_1\,dt+\int\frac{q_0Y_1^{(1)}-p_0Y_2^{(1)}}{r_0\Delta}dt,$$

$$C_2^{(1)}=c_2^{(1)}-\int R_1\,dt,$$

$$C_3^{(1)}=c_3^{(1)}-\int S_1\,dt,$$

$C_j^{(1)}(j=1,2,3)$ étant des nouvelles constantes arbitraires.

On trouve donc, en vertu de (25),

$$(31)\qquad \begin{cases} p_1 = c_1^{(1)} P_1 + M_1 p_0 + N_1 P_1, \\ q_1 = c_1^{(1)} Q_1 + M_1 q_0 + N_1 Q_1, \\ r_1 = c_1^{(1)} R_1 + M_1 r_0 + N_1 R_1 + \dfrac{c_3^{(1)}}{r_0} - \dfrac{1}{r_0}\displaystyle\int S_1\,dt, \end{cases}$$

où l'on a posé, pour abréger,

$$M_1 = c_2^{(1)} - \int R_1\,dt,$$

$$N_1 = \int t R_1\,dt - t\int R_1\,dt + tc_2^{(1)} + c_3^{(1)} K$$
$$- K\int S_1\,dt + \int K S_1\,dt + \int \frac{q_0 Y_1^{(1)} - p_0 Y_2^{(1)}}{r_0 \Delta}\,dt.$$

Posons ensuite

$$R_1' = \int R_1\,dt, \qquad S_1' = \int S_1\,dt.$$

Il viendra

$$(32)\qquad \begin{cases} M_1 = c_2^{(1)} - R_1', \\ N_1 = tc_2^{(1)} + K c_3^{(1)} - \displaystyle\int R_1'\,dt - \int \frac{S_1'}{r_0^2}\,dt + \int \frac{q_0 Y_1^{(1)} - p_0 Y_2^{(1)}}{r_0 \Delta}\,dt. \end{cases}$$

9. Les expressions de p_1, q_1, r_1 étant trouvées, passons aux équations (13) en y faisant $k = 1$.

On trouve

$$(33)\qquad \begin{cases} \dfrac{du_1}{dt} = r_0 v_1 - q_0 w_1 + X_1^{(1)}, \\ \dfrac{dv_1}{dt} = p_0 w_1 - r_0 u_1 + X_2^{(1)}, \\ \dfrac{dw_1}{dt} = q_0 u_1 - p_0 v_1 + X_3^{(1)}, \end{cases}$$

$X_j^{(1)}$ $(j = 1, 2, 3)$ étant les fonctions connues de t.

On peut écrire

$$(34)\qquad \begin{cases} u_1 = B_1^{(1)} u' + B_2^{(1)} u'' + B_3^{(1)} u''', \\ v_1 = B_1^{(1)} v' + B_2^{(1)} v'' + B_3^{(1)} v''', \\ w_1 = B_1^{(1)} w' + B_2^{(1)} w'' + B_3^{(1)} w''', \end{cases}$$

$B_j^{(1)}$ $(j = 1, 2, 3)$ étant les fonctions de t dont les dérivées satisfont aux équations

linéaires

$$\frac{dB_1^{(1)}}{dt} u' + \frac{dB_2^{(1)}}{dt} u'' + \frac{dB_3^{(1)}}{dt} u''' = X_1^{(1)},$$

$$\frac{dB_1^{(1)}}{dt} v' + \frac{dB_2^{(1)}}{dt} v'' + \frac{dB_3^{(1)}}{dt} v''' = X_2^{(1)},$$

$$\frac{dB_1^{(1)}}{dt} w' + \frac{dB_2^{(1)}}{dt} w'' + \frac{dB_3^{(1)}}{dt} w''' = X_3^{(1)},$$

d'où l'on tire aisément

$$(35)\quad \begin{cases} \dfrac{dB_1^{(1)}}{dt} = \phantom{\frac{1}{2}} u' X_1^{(1)} + v' X_2^{(1)} + w' X_3^{(1)}, \\ \dfrac{dB_2^{(1)}}{dt} = \dfrac{1}{2}(u'' X_1^{(1)} + v'' X_2^{(1)} + w'' X_3^{(1)}), \\ \dfrac{dB_3^{(1)}}{dt} = \dfrac{1}{2}(u''' X_1^{(1)} + v''' X_2^{(1)} + w''' X_3^{(1)}). \end{cases}$$

On trouve donc

$$(36)\quad \begin{cases} B_1^{(1)} = b_1^{(1)} + \phantom{\frac{1}{2}}\displaystyle\int (u' X_1^{(1)} + v' X_2^{(1)} + w' X_3^{(1)})\, dt = b_1^{(1)} + \psi_1^{(1)}(t), \\ B_2^{(1)} = b_2^{(1)} + \dfrac{1}{2}\displaystyle\int (u'' X_1^{(1)} + v'' X_2^{(1)} + w'' X_3^{(1)})\, dt = b_2^{(1)} + \psi_2^{(1)}(t), \\ B_3^{(1)} = b_3^{(1)} + \dfrac{1}{2}\displaystyle\int (u''' X_1^{(1)} + v''' X_2^{(1)} + w''' X_3^{(1)})\, dt = b_3^{(1)} + \psi_3^{(1)}(t), \end{cases}$$

$b_j^{(1)} (j = 1, 2, 3)$ étant des nouvelles constantes arbitraires, $\psi_j^{(1)}(t) (j = 1, 2, 3)$ étant les fonctions connues de t.

Substituant ces expressions de $B_j^{(1)}$ dans (34), nous trouverons u_1, v_1, w_1 en fonctions connues de t.

10. Après avoir trouvé

$$u_j,\quad v_j,\quad w_j,\qquad p_j,\quad q_j,\quad r_j \qquad (j = 0, 1),$$

nous obtiendrons p_2, q_2, r_2 à l'aide des équations (14) en y faisant $k = 2$, puis u_2, v_2, w_2 à l'aide des équations (13) en y posant $k = 2$, et ainsi de suite.

Supposons, en général, qu'on ait déjà trouvé

$$u_j,\quad v_j,\quad w_j,\qquad p_j,\quad q_j,\quad r_j \qquad (j = 0, 1, 2, \ldots, k-1).$$

Les équations (14) nous donneront ensuite

$$(37)\qquad \begin{cases} p_k = c_1^{(k)} P_1 + p_0 M_k + P_1 N_k \\ q_k = c_1^{(k)} Q_1 + q_0 M_k + Q_1 N_k, \\ r_k = c_1^{(k)} R_1 + r_0 M_k + R_1 N_k + \dfrac{c_3^{(k)}}{r_0} - \dfrac{1}{r_0}\displaystyle\int S_k\, dt, \end{cases}$$

où l'on a posé

$$(38)\qquad \begin{cases} M_k = c_2^{(k)} - R'_k, \\ N_k = t c_2^{(k)} + K c_3^{(k)} - \displaystyle\int R'_k\, dt - \int \frac{S'_k}{r_0^2}\, dt + \int \frac{q_0 Y_1^{(k)} - p_0 Y_2^{(k)}}{r_0 \Delta}\, dt, \\ R_k = \dfrac{(c-a) p_0 a Y_1^{(k)} - (b-c) q_0 b Y_2^{(k)}}{l^2 - hc}, \end{cases}$$

$$(39)\qquad S_k = \frac{1}{c(l^2 - hc)} (a p_0^2 H_1^{(k)} + b q_0^2 H_2^{(k)} + c r_0^2 H_3^{(k)}),$$

$$(40)\qquad R'_k = \int R_k\, dt, \qquad S'_k = \int S_k\, dt,$$

$$(41)\qquad \begin{cases} H_1^{(k)} = (c-a) r_0 c Y_3^{(k)} - (a-b) q_0 b Y_2^{(k)}, \\ H_2^{(k)} = (a-b) p_0 a Y_1^{(k)} - (b-c) r_0 c Y_3^{(k)}, \\ H_3^{(k)} = (b-c) q_0 b Y_2^{(k)} - (c-a) p_0 a Y_1^{(k)}. \end{cases}$$

Moyennant ensuite les équations (13), nous obtiendrons

$$(42)\qquad \begin{cases} u_k = b_1^{(k)} u' + b_2^{(k)} u'' + b_3^{(k)} u''' + [u' \psi_1^{(k)}(t) + u'' \psi_2^{(k)}(t) + u''' \psi_3^{(k)}(t)], \\ v_k = b_1^{(k)} v' + b_2^{(k)} v'' + b_3^{(k)} v''' + [v' \psi_1^{(k)}(t) + v'' \psi_2^{(k)}(t) + v''' \psi_3^{(k)}(t)], \\ w_k = b_1^{(k)} w' + b_2^{(k)} w'' + b_3^{(k)} w''' + [w' \psi_1^{(k)}(t) + w'' \psi_2^{(k)}(t) + w''' \psi_3^{(k)}(t)], \end{cases}$$

où $\psi_j^{(k)}(t)$ sont les fonctions de t, définies par des quadratures

$$(43)\qquad \begin{cases} \psi_1^{(k)}(t) = \displaystyle\int (u' X_1^{(k)} + v' X_2^{(k)} + w' X_3^{(k)})\, dt, \\ \psi_2^{(k)}(t) = \dfrac{1}{2} \displaystyle\int (u''' X_1^{(k)} + v''' X_2^{(k)} + w''' X_3^{(k)})\, dt, \\ \psi_3^{(k)}(t) = \dfrac{1}{2} \displaystyle\int (u'' X_1^{(k)} + v'' X_2^{(k)} + w'' X_3^{(k)})\, dt. \end{cases}$$

11. Il ne reste qu'à substituer les valeurs trouvées de

$$u_j, \quad v_j, \quad w_j, \qquad p_j, \quad q_j, \quad r_j \qquad (j = 0, 1, 2, \ldots)$$

dans les séries (12) pour obtenir les solutions générales des équations du mouve-

ment (1) et (2) sous la forme des séries ordonnées suivant les puissances du paramètre ε.

Ces séries seront convergentes pour

$$t \leqq \mathrm{T},$$

T étant une quantité positive, si nous choisissons convenablement les constantes

$$b_j^{(k)}, \quad c_j^{(k)} \quad \begin{pmatrix} j = 1, 2, 3 \\ k = 1, 2, 3, 4, \ldots \end{pmatrix},$$

qu'on doit assujettir, en général, à la condition que leurs modules ne surpassent pas certains nombres fixes suffisamment petits.

Si nous posons, en particulier,

$$\left.\begin{array}{lll} u_0 = \alpha, & v_0 = \beta, & w_0 = \gamma \\ p_0 = \alpha', & q_0 = \beta', & r_0 = \gamma' \\ u_k = 0, & v_k = 0, & w_k = 0 \\ p_k = 0, & q_k = 0, & r_k = 0 \end{array}\right\} \quad \text{pour} \quad t = 0,$$

$\alpha, \beta, \gamma; \alpha', \beta', \gamma'$ étant les constantes données, nous trouverons les solutions des équations du mouvement prenant les mêmes valeurs initiales que u_0, v_0, w_0; p_0, q_0, r_0.

On peut employer les séries obtenues pour calculer approximativement les valeurs de variables

$$u, \quad v, \quad w, \qquad p, \quad q, \quad r$$

pour toutes les valeurs de t à partir de $t = t_0$ jusqu'à $t = \mathrm{T}$.

Prenant ensuite pour les valeurs initiales de

$$(44) \qquad u, \quad v, \quad w, \qquad p, \quad q, \quad r$$

leurs valeurs pour $t = \mathrm{T}$, nous pouvons construire les nouvelles séries de la forme (12), qui nous donneront les valeurs des variables (44) pour toutes les valeurs de t à partir de $t = \mathrm{T}$ jusqu'à $t = \mathrm{T}_1 > \mathrm{T}$, et ainsi de suite.

A chaque solution

$$u_0, \quad v_0, \quad w_0, \qquad p_0, \quad q_0, \quad r_0$$

des équations (10) et (11), se réduisant à $\alpha, \beta, \gamma; \alpha', \beta', \gamma'$ pour $t = t_0$, correspond une solution déterminée des équations (1) et (2) prenant les mêmes valeurs initiales que $u_0, v_0, w_0; p_0, q_0, r_0$.

Nous pouvons aussi obtenir une infinité d'autres solutions dont les valeurs initiales (pour $t = t_0$) diffèrent assez peu de $\alpha, \beta, \gamma; \alpha', \beta', \gamma'$, en choisissant les

constantes arbitraires dans les expressions de

$$u_k,\quad v_k,\quad w_k,\qquad p_k,\quad q_k,\quad r_k\qquad (k=1,2,3,\ldots)$$

d'une autre manière quelconque, sous la seule condition que les séries (12) soient convergentes.

Ces séries convergent, en général, pourvu que

$$t_0 \leqq t \leqq \mathrm{T}$$

et $|\varepsilon|$ soit assez petit.

Le nombre T sera d'autant plus grand que $|\varepsilon|$ sera plus petit, et inversement.

Le cas le plus intéressant est celui où les séries dont il s'agit convergent pour toutes les valeurs de t.

Cette circonstance peut avoir lieu, $|\varepsilon|$ étant assez petit, quand toutes les fonctions

$$u_k,\quad v_k,\quad w_k,\qquad p_k,\quad q_k,\quad r_k\qquad (k=0,1,2,\ldots)$$

deviennent périodiques en t.

Nous obtiendrons alors les solutions périodiques des équations du mouvement d'un corps solide dans un liquide indéfini.

La démonstration de l'existence de ces solutions périodiques fera l'objet du Chapitre suivant.

CHAPITRE III.

EXISTENCE DES SOLUTIONS PÉRIODIQUES DES ÉQUATIONS DU MOUVEMENT D'UN CORPS SOLIDE DANS UN LIQUIDE INDÉFINI.

1. Il est aisé de voir que les équations (1) et (2) du Chapitre précédent admettent, pour $\varepsilon = 0$, la solution périodique de la forme (*voir* n° 4 du Chapitre II)

$$p_0,\quad q_0,\quad r_0,\qquad u_0 = \mathrm{A}u',\qquad v_0 = \mathrm{A}v',\qquad w_0 = \mathrm{A}w',$$

A étant une constante arbitraire.

Supposons maintenant que nous ayons trouvé les fonctions

$$u_j,\quad v_j,\quad w_j,\qquad p_j,\quad q_j,\quad r_j$$

à partir de $j=1$ jusqu'à $j=k-1$ sous la forme des fonctions périodiques du temps, avec la période réelle ω.

Dans ce cas, $Y_j^{(k)} (j = 1, 2, 3)$ seront périodiques en t avec la même période ω.

Démontrons qu'on peut toujours choisir les constantes $c_j^{(k)} (j = 1, 2, 3)$ de telle manière que p_k, q_k, r_k seront aussi périodiques en t avec la période ω.

Multiplions les équations (4) successivement par p_0, q_0, r_0; nous avons, en ajoutant,

$$(1) \qquad ap_0 Y_1^{(k)} + bq_0 Y_2^{(k)} + cr_0 Y_3^{(k)} = \frac{d}{dt}(ap_0 p_k + bq_0 q_k + cr_0 r_k).$$

Multiplions les mêmes équations par u', v', w'; on trouve, en ajoutant,

$$(2) \qquad \begin{aligned} au' Y_1^{(k)} + bv' Y_2^{(k)} + cw' Y_3^{(k)} &= \frac{d}{dt}(au' p_k + bv' q_k + cw' r_k) \\ &= \frac{1}{A}\frac{d}{dt}(au_0 p_k + bv_0 q_k + cr_0 r_k), \end{aligned}$$

puisque

$$(3) \qquad ap_0 = lu' = \frac{l}{A} u_0, \qquad bq_0 = lv' = \frac{l}{A} v_0, \qquad cr_0 = lw' = \frac{l}{A} w_0.$$

Considérons maintenant les intégrales (4) qu'on peut représenter sous la forme suivante :

$$u^2 + v^2 + w^2 + ap^2 + bq^2 + cr^2 + \varepsilon T = k,$$

$$\left(u + \varepsilon \frac{\partial T}{\partial u}\right)^2 + \left(v + \varepsilon \frac{\partial T}{\partial v}\right)^2 + \left(w + \varepsilon \frac{\partial T}{\partial w}\right)^2 = L,$$

$$\left(u + \varepsilon \frac{\partial T}{\partial u}\right)\left(ap + \varepsilon \frac{\partial T}{\partial p}\right) + \left(v + \varepsilon \frac{\partial T}{\partial v}\right)\left(bq + \varepsilon \frac{\partial T}{\partial q}\right) + \left(w + \varepsilon \frac{\partial T}{\partial w}\right)\left(cr + \varepsilon \frac{\partial T}{\partial r}\right) = M.$$

Substituons dans ces équations les séries (12) et comparons les coefficients de $k^{\text{ième}}$ puissance de ε de deux membres.

On trouve aisément

$$(4) \qquad u_0 u_k + v_0 v_k + w_0 w_k + ap_0 p_k + bq_0 q_k + cr_0 r_k = U'_k,$$

U'_k étant une fonction ne dépendant que de

$$u_j, \quad v_j, \quad w_j, \qquad p_j, \quad q_j, \quad r_j \qquad (j = 0, 1, 2, \ldots, k-1),$$

c'est-à-dire une fonction connue, périodique en t.

On a de même

$$(5) \qquad u_0 u_k + v_0 v_k + w_0 w_k = V'_k,$$

$$(6) \qquad au_0 p_k + bv_0 q_k + cw_0 r_k + ap_0 u_k + bq_0 v_k + cr_0 w_k = W'_k,$$

V'_k, W'_k étant les fonctions connues, périodiques en t.

Des équations (4) et (5) on tire immédiatement

$$ap_0 p_k + bq_0 q_k + cr_0 r_k = U_k = U'_k - V'_k,$$

où U_k est évidemment une fonction périodique de t.

L'équation (1) devient donc

$$(7)\qquad ap_0 Y_1^{(k)} + bq_0 Y_2^{(k)} + cr_0 Y_3^{(k)} = \frac{dU_k}{dt}.$$

D'autre part, les équations (5) et (6) donnent, en vertu de (3),

$$au_0 p_k + bv_0 q_k + cw_0 r_k + \frac{l}{A} V'_k = W'_k,$$

ou

$$au_0 p_k + bv_0 q_k + cw_0 r_k = W'_k - \frac{l}{A} V'_k = \frac{A}{l} V_k,$$

V_k étant une fonction périodique du temps.

On a donc

$$au' Y_1^{(k)} + bv' Y_2^{(k)} + cw' Y_3^{(k)} = \frac{1}{l} \frac{dV_k}{dt},$$

d'où, en vertu de (3),

$$(8)\qquad a^2 p_0 Y_1^{(k)} + b^2 q_0 Y_2^{(k)} + c^2 r_0 Y_3^{(k)} = \frac{dV_k}{dt}.$$

Les équations (7) et (8) nous conduisent à l'équation suivante :

$$c(c-a) r_0 Y_3^{(k)} - b(a-b) q_0 Y_2^{(k)} = H_1^{(k)} = \frac{d}{dt}(V_k - aU_k),$$

et de même

$$H_2^{(k)} = \frac{d}{dt}(V_k - bU_k),$$

$$H_3^{(k)} = \frac{d}{dt}(V_k - cU_k).$$

On trouve donc (*voir* n° 10 du Chapitre précédent)

$$R'_k = \int R_k\, dt = \frac{1}{hc - l^2} \int H_3^{(k)} dt = \frac{V_k - cU_k}{hc - l^2},$$

ce qui montre que R'_k est une fonction périodique de t.

2. Considérons maintenant l'expression de S_k [l'égalité (39) du Chapitre précédent].

4. Passons maintenant aux équations (43) du Chapitre précédent.

Il est évident que les fonctions $X_j^{(k)}(j=1,2,3)$ sont périodiques en t.

Multiplions les équations (13) successivement par u_0, v_0, w_0; nous avons, en ajoutant et en tenant compte de (5),

$$X_1^{(k)}u_0+X_2^{(k)}v_0+X_3^{(k)}w_0=\frac{d}{dt}(u_0u_k+v_0v_k+w_0w_k)=\frac{dV'_k}{dt}.$$

On a donc, en tenant compte de (43) (Chapitre précédent),

$$A\psi_1^{(k)}(t)=V'_k,$$

ce qui montre que $\psi_1^{(k)}(t)$ est une fonction périodique.

Formons maintenant l'expression de $\psi_2^{(k)}(t)$.

Il est aisé de voir que

$$\psi_2^{(k)}(t)=\int e^{-i\lambda u}\varphi^{(k)}(t)\,dt,$$

où $\varphi^{(k)}(t)$ est une fonction périodique du temps.

Il est évident qu'on peut trouver une fonction périodique $V''_k(t)$ de façon que l'on ait

$$\psi_2^{(k)}(t)=e^{-i\lambda u}V''_k(t).$$

Nous trouverons de la même manière que

$$\psi_3^{(k)}(t)=e^{i\lambda u}V'''_k(t)\quad(^1),$$

$V'''_k(t)$ étant une nouvelle fonction périodique en t.

Nous aurons donc, en tenant compte des équations (16) du Chapitre précédent,

$$\begin{aligned}&u'\psi_1^{(k)}(t)+u''\psi_2^{(k)}(t)+u'''\psi_3^{(k)}(t)\\&\quad=-A\frac{\operatorname{cn}u}{\operatorname{cn}\omega}V'_k+V''_k(t)\frac{\Theta_1(0)H(u-\omega)}{H_1(\omega)\Theta(u)}+V'''_k(t)\frac{\Theta(0)H(u+\omega)}{H_1(\omega)\Theta(u)}=G_1^{(k)}(t),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&v'\psi_1^{(k)}(t)+v''\psi_2^{(k)}(t)+v'''\psi_3^{(k)}(t)\\&\quad=\quad A\frac{\operatorname{dn}\omega\operatorname{sn}u}{\operatorname{cn}\omega}V'_k+V''_k(t)\frac{\Theta(0)H_1(u-\omega)}{H_1(\omega)\Theta(u)}+V'''_k(t)\frac{\Theta(0)H_1(u+\omega)}{H_1(\omega)\Theta(u)}=G_2^{(k)}(t),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&w'\psi_1^{(k)}(t)+w''\psi_2^{(k)}(t)+w'''\psi_3^{(k)}(t)\\&\quad=\quad A\frac{\operatorname{sn}\omega\operatorname{dn}u}{i\operatorname{cn}\omega}V'_k+V''_k(t)\frac{H_1(0)\Theta(u-\omega)}{H_1(\omega)\Theta(u)}+V'''_k(t)\frac{H_1(0)\Theta(u+\omega)}{iH_1(\omega)\Theta(u)}=G_3^{(k)}(t),\end{aligned}$$

$G_j^{(k)}(j=1,2,3)$ étant des fonctions périodiques du temps.

---

(1) *Comparez* G. Kobb, *Sur les solutions périodiques, etc.* (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 1899).

On trouve, en tenant compte de (11) du Chapitre précédent,

$$c(l^2-hc)S_k = ap_0^2 H_1^{(k)} + bq_0^2 H_2^{(k)} + cr_0^2 H_3^{(k)} = \quad ap_0 Y_1^{(k)}[b(a-b)q_0^2 + c(a-c)r_0^2]$$
$$+ bq_0 Y_2^{(k)}[c(b-c)r_0^2 + a(b-a)p_0^2]$$
$$+ cr_0 Y_3^{(k)}[a(c-a)p_0^2 + b(c-b)q_0^2],$$

d'où, en remarquant que

$$ap_0^2 + bq_0^2 + cr_0^2 = h,$$
$$a^2p_0^2 + b^2q_0^2 + c^2r_0^2 = l^2,$$

on tire aisément, en vertu de (7) et (8),

$$S_k = \frac{1}{c(l^2-hc)}[(ha-l^2)ap_0 Y_1^{(k)} + (hb-l^2)bq_0 Y_2^{(k)} + (hc-l^2)cr_0 Y_3^{(k)}]$$
$$= \frac{d}{dt}(\alpha V_k + \beta U_k),$$

où l'on a posé

$$\alpha = \frac{h}{c(l^2-hc)}, \qquad \beta = \frac{l^2}{c(hc-l^2)}.$$

On a donc

$$S'_k = \int S_k\,dt = \alpha V_k + \beta U_k,$$

d'où il résulte que S'_k est une fonction périodique de t.

3. Reprenons maintenant les équations (37) du Chapitre précédent.

Il est évident, en vertu de (38), que M_k est une fonction périodique de t.

Quant à N_k, on peut le représenter sous la forme suivante, en supposant, pour plus de simplicité, $t_0 = 0$:

$$N_k = t\left[c_2^{(k)} + c_3^{(k)}\int_0^\omega \frac{dt}{r_0^2} - \int_0^\omega R'_k\,dt - \int_0^\omega \frac{S'_k}{r_0^2}dt + \int_0^\omega \frac{q_0 Y_1^{(k)} - p_0 Y_2^{(k)}}{r_0\Delta}dt\right] + N'_k,$$

où N'_k est une fonction périodique de t.

N_k sera aussi périodique, si nous choisissons $c_2^{(k)}$ et $c_3^{(k)}$ de façon que l'on ait

$$(9)\qquad c_2^{(k)} + c_3^{(k)}\int_0^\omega \frac{dt}{r_0^2} = D_k = \int_0^\omega R'_k\,dt + \int_0^\omega \frac{S'_k}{r_0^2}dt - \int_0^\omega \frac{q_0 Y_1^{(k)} - p_0 Y_2^{(k)}}{r_0\Delta}dt,$$

D_k étant une constante bien déterminée.

Les constantes $c_2^{(k)}$, $c_3^{(k)}$ étant choisies de la manière indiquée, p_k, q_k, r_k seront les fonctions périodiques du temps.

4. Passons maintenant aux équations (43) du Chapitre précédent.

Il est évident que les fonctions $X_j^{(k)}$ $(j = 1, 2, 3)$ sont périodiques en t.

Multiplions les équations (13) successivement par u_0, v_0, w_0; nous avons, en ajoutant et en tenant compte de (5),

$$X_1^{(k)} u_0 + X_2^{(k)} v_0 + X_3^{(k)} w_0 = \frac{d}{dt}(u_0 u_k + v_0 v_k + w_0 w_k) = \frac{dV'_k}{dt}.$$

On a donc, en tenant compte de (43) (Chapitre précédent),

$$A\psi_1^{(k)}(t) = V'_k,$$

ce qui montre que $\psi_1^{(k)}(t)$ est une fonction périodique.

Formons maintenant l'expression de $\psi_2^{(k)}(t)$.

Il est aisé de voir que

$$\psi_2^{(k)}(t) = \int e^{-i\lambda u} \varphi^{(k)}(t)\, dt,$$

où $\varphi^{(k)}(t)$ est une fonction périodique du temps.

Il est évident qu'on peut trouver une fonction périodique $V''_k(t)$ de façon que l'on ait

$$\psi_2^{(k)}(t) = e^{-i\lambda u} V''_k(t).$$

Nous trouverons de la même manière que

$$\psi_3^{(k)}(t) = e^{i\lambda u} V'''_k(t) \quad (^1),$$

$V'''_k(t)$ étant une nouvelle fonction périodique en t.

Nous aurons donc, en tenant compte des équations (16) du Chapitre précédent,

$$\begin{aligned} &u'\psi_1^{(k)}(t) + u''\psi_2^{(k)}(t) + u'''\psi_3^{(k)}(t) \\ &\quad = -A\frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{cn}\omega} V'_k + V''_k(t)\frac{\Theta_1(0)H(u-\omega)}{H_1(\omega)\Theta(u)} + V'''_k(t)\frac{\Theta(0)H(u+\omega)}{H_1(\omega)\Theta(u)} = G_1^{(k)}(t), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &v'\psi_1^{(k)}(t) + v''\psi_2^{(k)}(t) + v'''\psi_3^{(k)}(t) \\ &\quad = A\frac{\operatorname{dn}\omega \operatorname{sn} u}{\operatorname{cn}\omega} V'_k + V''_k(t)\frac{\Theta(0)H_1(u-\omega)}{H_1(\omega)\Theta(u)} + V'''_k(t)\frac{\Theta(0)H_1(u+\omega)}{H_1(\omega)\Theta(u)} = G_2^{(k)}(t), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &w'\psi_1^{(k)}(t) + w''\psi_2^{(k)}(t) + w'''\psi_3^{(k)}(t) \\ &\quad = A\frac{\operatorname{sn}\omega \operatorname{dn} u}{i \operatorname{cn}\omega} V'_k + V''_k(t)\frac{H_1(0)\Theta(u-\omega)}{H_1(\omega)\Theta(u)} + V'''_k(t)\frac{H_1(0)\Theta(u+\omega)}{iH_1(\omega)\Theta(u)} = G_3^{(k)}(t), \end{aligned}$$

$G_j^{(k)}$ $(j = 1, 2, 3)$ étant des fonctions périodiques du temps.

---

(1) *Comparez* G. KOBB, *Sur les solutions périodiques, etc.* (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 1899).

Il suffit de poser

$$b_2^{(k)} = 0, \qquad b_3^{(k)} = 0$$

pour obtenir u_k, v_k, w_k en fonctions périodiques de t :

$$(10) \qquad \begin{cases} u_k = -\, b_1^{(k)} \dfrac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{cn} \omega} + G_1^{(k)}(t), \\ v_k = \quad b_1^{(k)} \dfrac{\operatorname{dn} \omega \operatorname{sn} u}{\operatorname{cn} \omega} + G_2^{(k)}(t), \\ w_k = \quad b_1^{(k)} \dfrac{\operatorname{sn} \omega \operatorname{dn} u}{i \operatorname{cn} \omega} + G_3^{(k)}(t). \end{cases}$$

5. On peut exprimer le résultat obtenu comme il suit :

Si, pour une valeur quelconque de k, les fonctions

$$Y_1^{(k)}, \quad Y_2^{(k)}, \quad Y_3^{(k)}$$

sont périodiques en t avec une période réelle ω, on peut toujours disposer les constantes arbitraires dans les expressions de

$$p_k, \quad q_k, \quad r_k, \qquad u_k, \quad v_k, \quad w_k$$

de façon qu'ils deviennent aussi périodiques en t avec la même période ω.

Or, en prenant [les équations (15) du Chapitre précédent]

$$(11) \qquad \begin{cases} p_0 = -\alpha \dfrac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{cn} \omega}, & q_0 = \beta \dfrac{\operatorname{dn} \omega \operatorname{sn} u}{\operatorname{cn} \omega}, & r_0 = \gamma \dfrac{\operatorname{sn} \omega \operatorname{dn} u}{i \operatorname{cn} \omega}, \\ x_0 = -A \dfrac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{cn} \omega}, & v_0 = A \dfrac{\operatorname{dn} \omega \operatorname{sn} u}{\operatorname{cn} \omega}, & w_0 = A \dfrac{\operatorname{sn} \omega \operatorname{dn} u}{i \operatorname{cn} \omega}, \end{cases}$$

nous obtiendrons $Y_1^{(1)}$, $Y_2^{(1)}$, $Y_3^{(1)}$ en fonctions périodiques de t.

On peut donc déterminer

$$(12) \qquad p_1, \quad q_1, \quad r_1, \qquad u_1, \quad v_1, \quad w_1$$

comme des fonctions périodiques de t.

Les fonctions

$$Y_1^{(2)}, \quad Y_2^{(2)}, \quad Y_3^{(2)}$$

deviendront alors périodiques.

Nous obtiendrons donc

$$(13) \qquad p_2, \quad q_2, \quad r_2, \qquad u_2, \quad v_2, \quad w_2$$

en fonctions périodiques de t.

Les fonctions (11), (12) et (13) étant périodiques, il en sera de même des fonctions

$$Y_1^{(3)}, \quad Y_2^{(3)}, \quad Y_3^{(3)}.$$

Nous pouvons, par conséquent, déterminer

$$p_3, \quad q_3, \quad r_3, \qquad u_3, \quad v_3, \quad w_3$$

en fonctions périodiques de t, et ainsi de suite.

Nous trouverons ainsi les séries périodiques de la forme (12) (Chapitre précédent) qui satisfont formellement aux équations du mouvement.

6. Il ne reste qu'à prouver que ces séries peuvent donner effectivement une solution périodique des équations dont il s'agit, c'est-à-dire que ces séries convergent au moins pour certaines valeurs des constantes arbitraires

$$b_1^{(k)}, \quad c_j^{(k)} \qquad (j = 1, 2, 3),$$

choisies convenablement.

En suivant une voie, indiquée par M. G. Kobb dans son Mémoire déjà cité, cherchons d'abord la condition nécessaire et suffisante pour pouvoir déterminer ces constantes de façon que l'on ait

$$u_k = 0, \qquad v_k = 0, \qquad w_k = 0 \qquad \text{pour} \qquad t = 0$$
$$(k = 1, 2, 3, \ldots).$$

Posons, k étant un indice quelconque,

$$(14) \qquad \left\{ \begin{aligned} u_k &= B_1^{(k)} u' + B_2^{(k)} u'' + B_3^{(k)} u''' = 0 \\ v_k &= B_1^{(k)} v' + B_2^{(k)} v'' + B_3^{(k)} v''' = 0 \\ w_k &= B_1^{(k)} w' + B_2^{(k)} w'' + B_3^{(k)} w''' = 0 \end{aligned} \right\} \qquad \text{pour} \quad t = 0,$$

où

$$(15) \qquad \left\{ \begin{aligned} B_1^{(k)} &= b_1^{(k)} + \int (X_1^{(k)} u' + X_2^{(k)} v' + X_3^{(k)} w')\, dt, \\ B_2^{(k)} &= \frac{1}{2} \int (X_1^{(k)} u''' + X_2^{(k)} v''' + X_3^{(k)} w''')\, dt, \\ B_3^{(k)} &= \frac{1}{2} \int (X_1^{(k)} u'' + X_2^{(k)} v'' + X_3^{(k)} w'')\, dt. \end{aligned} \right.$$

Pour que les équations (14) aient lieu, il faut et il suffit que l'on ait

$$(16) \qquad B_1^{(k)} = 0, \qquad B_2^{(k)} = 0, \qquad B_3^{(k)} = 0 \qquad \text{pour} \quad t = 0,$$

puisque, comme on sait, le déterminant

$$\begin{vmatrix} u' & u'' & u''' \\ v' & v'' & v''' \\ w' & w'' & w''' \end{vmatrix}$$

ne s'annule pas pour $t = 0$.

7. Considérons maintenant les expressions de $X_1^{(k)}$, $X_2^{(k)}$, $X_3^{(k)}$ du n° 4 du Chapitre précédent.

On peut les écrire sous la forme suivante

$$\begin{aligned} X_1^{(k)} &= r_k v_0 - q_k w_0 + \Gamma_1^{(k)}, \\ X_2^{(k)} &= p_k w_0 - r_k u_0 + \Gamma_2^{(k)}, \\ X_3^{(k)} &= q_k u_0 - p_k v_0 + \Gamma_3^{(k)}, \end{aligned}$$

$\Gamma_j^{(k)}$ $(j = 1, 2, 3)$ étant des fonctions ne dépendant pas de p_k, q_k, r_k.

On a donc, en tenant compte de (15) et des relations connues entre les fonctions u', v', ..., w''',

$$\begin{aligned} B_2^{(k)} &= \frac{A}{2i}\int (p_k u'' + q_k v'' + r_k w'')\, dt + \frac{A}{2i} P_2^{(k)}, \\ B_3^{(k)} &= \frac{A}{2i}\int (p_k u''' + q_k v''' + r_k w''')\, dt + \frac{A}{2i} P_3^{(k)}, \end{aligned}$$

où l'on a posé

$$\begin{aligned} \frac{A}{2i} P_2^{(k)} &= \frac{1}{2}\int (\Gamma_1^{(k)} u''' + \Gamma_2^{(k)} v''' + \Gamma_3^{(k)} w''')\, dt, \\ \frac{A}{2i} P_3^{(k)} &= \frac{1}{2}\int (\Gamma_1^{(k)} u'' + \Gamma_2^{(k)} v'' + \Gamma_3^{(k)} w'')\, dt. \end{aligned}$$

$P_2^{(k)}$, $P_3^{(k)}$ sont les fonctions connues de t (¹).

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} p_k &= c_1^{(k)} P_1 + c_2^{(k)} p_0 + c_3^{(k)} P_1 K_1 - p_0 R'_k + P_1 L_k, \\ q_k &= c_1^{(k)} Q_1 + c_2^{(k)} q_0 + c_3^{(k)} Q_1 K_1 - q_0 R'_k + Q_1 L_k, \\ r_k &= c_1^{(k)} R_1 + c_2^{(k)} r_0 + c_3^{(k)} \left(Q_1 K_1 + \frac{1}{r_0}\right) - r_0 R'_k + R_1 L_k - \frac{1}{r_0} S'_k, \end{aligned}$$

(¹) Nous supposons qu'on ait déjà trouvé les fonctions

$$u_j, \quad v_j, \quad w_j, \quad p_j, \quad q_j, \quad r_j \quad (j = 0, 1, 2, \ldots, k-1).$$

où l'on a posé

$$K_1 = \int \frac{dt}{r_0^2} - \int_0^\omega \frac{dt}{r_0^2},$$

$$L_k = \int_0^\omega R'_k\, dt - \int R'_k\, dt + \int_0^\omega \frac{S'_k}{r_0^2} dt - \int \frac{S'_k}{r_0^2} dt - \int_0^\omega \frac{q_0 Y_1^{(k)} - p_0 Y_2^{(k)}}{r_0 \Delta} dt + \int \frac{q_0 Y_1^{(k)} - p_0 Y_2^{(k)}}{r_0 \Delta} dt.$$

Posons encore

$$P_1 L_k - p_0 R'_k = T_1^{(k)},$$
$$Q_1 L_k - q_0 R'_k = T_2^{(k)},$$
$$R_1 L_k - r_0 R'_k - \frac{1}{r_0} S'_k = T_3^{(k)},$$

$$\int (P_1 u'' + Q_1 v'' + R_1 w'')\, dt = A_1(t), \qquad \int (P_1 u''' + Q_1 v''' + R_1 w''')\, dt = B_1(t),$$

$$\int (p_0 u'' + q_0 v'' + r_0 w'')\, dt = A_2(t), \qquad \int (p_0 u''' + q_0 v''' + r_0 w''')\, dt = B_2(t),$$

$$\int \left[P_1 K_1 u'' + Q_1 K_1 v'' + \left(Q_1 K_1 + \frac{1}{r_0}\right) w''\right] dt = A_3(t), \qquad \int \left[P_1 K_1 u''' + Q_1 K_1 v''' + \left(Q_1 K_1 + \frac{1}{r_0}\right) w'''\right] dt = B_3(t),$$

$$\int (T_1^{(k)} u'' + T_2^{(k)} v'' + T_3^{(k)} w'')\, dt + P_2^{(k)} = -M_2^{(k)}(t),$$

$$\int (T_1^{(k)} u''' + T_2^{(k)} v''' + T_3^{(k)} w''')\, dt + P_3^{(k)} = -M_3^{(k)}(t).$$

On peut écrire

$$\frac{2i}{A} B_2^{(k)} = c_1^{(k)} A_1(t) + c_2^{(k)} A_2(t) + c_3^{(k)} A_3(t) - M_2^{(k)}(t),$$

$$\frac{2i}{A} B_3^{(k)} = c_1^{(k)} B_1(t) + c_2^{(k)} B_2(t) + c_3^{(k)} B_3(t) - M_3^{(k)}(t).$$

Cela posé, on trouve, en vertu des deux dernières des équations (16),

$$(17) \qquad \begin{cases} c_1^{(k)} A_1(0) + c_2^{(k)} A_2(0) + c_3^{(k)} A_3(0) = M_2^{(k)}(0), \\ c_1^{(k)} B_1(0) + c_2^{(k)} B_2(0) + c_3^{(k)} B_3(0) = M_3^{(k)}(0). \end{cases}$$

Ces équations, jointes à l'équation (*voir* n° 3)

$$(18) \qquad c_2^{(k)} + c_3^{(k)} \int_0^\omega \frac{dt}{r_0^2} = D_k,$$

montrent que la condition nécessaire et suffisante pour que l'on puisse déter-

ACTION
D'UN OXYDE OU D'UN HYDRATE MÉTALLIQUE
SUR LES SOLUTIONS DES SELS DES AUTRES MÉTAUX.

SELS BASIQUES MIXTES;

PAR M. ALPHONSE MAILHE,
Licencié ès Sciences, Pharmacien de première Classe,
Préparateur à la Faculté des Sciences de Toulouse,
Chef des Travaux à la Faculté de Médecine et de Pharmacie de Toulouse.

INTRODUCTION.

Le déplacement réciproque des oxydes insolubles dans les dissolutions salines a préoccupé depuis longtemps les chimistes.

Gay-Lussac [1] a montré que les oxydes se déplacent mutuellement et que l'affinité des métaux pour l'oxygène n'entre pour rien dans le pouvoir précipitant d'un oxyde. L'affinité particulière d'un oxyde pour un acide aurait une influence limitée.

Persoz indique, en 1835, que le déplacement d'un oxyde par un oxyde est total, et qu'il y a rarement partage. Quelques années plus tard, H. Rose ayant repris la question a montré que, dans bien des cas, le phénomène pouvait ne pas se réduire à un simple déplacement. C'est ainsi qu'en opposant l'oxyde d'argent à diverses solutions métalliques il a obtenu fréquemment des oxydes mixtes.

En 1870, Landrin montre que, dans les déplacements d'oxyde à oxyde, il y a partage à équivalents exacts. Pétrieff, en 1883 [2], nie ces résultats et indique que les rapports entre les bases dissoutes ne peuvent pas être exprimés par des nombres simples.

Dans un travail dont les premiers résultats ont été communiqués au Congrès

[1] *Annales de Chimie*, 30 nivôse an XII, t. XLIX, p. 21.

[2] *Société chimique russe*, 26 août 1883.

de l'Association française pour l'avancement des Sciences (1), M. P. Sabatier reprit ce sujet et montra que tantôt on a un partage, tantôt un déplacement total très net.

Depuis quelques années, les idées des chimistes avaient été profondément modifiées par la connaissance plus complète des sels basiques. On savait en effet, et l'on admet encore de nos jours que, si l'on fait agir un hydrate ou un oxyde métallique sur un sel du même métal, on obtient fréquemment un sel basique; bien plus, on peut, suivant la quantité d'hydrate qui réagit, obtenir un sel plus ou moins basique. Pour de tels composés, la cristallisation permettra de définir très nettement les divers corps.

Lorsqu'on examine la liste des sels basiques déjà connus, on remarque que la plupart d'entre eux appartiennent au même type. Ainsi les sels de cuivre sont tous du type tétracuivrique (sulfate, nitrate, chlorure, etc.) ou du type tricuivrique (acétate); les sels de zinc ont dans leur molécule le groupement tétrazincique, ceux de mercure le groupement di- ou trimercurique.

En partant de ce fait, ne serait-il pas rationnel de les considérer comme des sels normaux d'un hydrate condensé, au lieu de les regarder comme résultant de la fixation d'une ou plusieurs molécules d'oxyde sur un sel neutre? M. P. Sabatier a montré en particulier que les sels basiques de cuivre doivent être considérés comme les sels normaux de l'hydrate tétracuivrique $Cu^4O^3(OH)^2$ qu'il a le premier défini, et il pense que des groupements identiques doivent exister pour les autres métaux. En opposant cet hydrate aux dissolutions des sels neutres de cuivre, il a pu obtenir à l'état cristallisé les sels basiques du type tétracuivrique (sulfate, nitrate, bromure, hyposulfate, etc.).

En partant de ces idées, M. P. Sabatier a repris l'étude du déplacement de l'hydrate de cuivre par l'oxyde d'argent (2), et il a montré qu'il n'y avait pas simple déplacement d'hydrate, ainsi que Rose l'avait indiqué, mais bien formation d'un sel basique tétracuivrique $(NO^3)^2Cu.3CuO.3H^2O$, ou d'un sel basique mixte argento-cuivrique $(NO^3)^2Ag^2.3CuO.3H^2O$ selon les conditions de la réaction.

Généralisant le phénomène, M. Sabatier a obtenu toute la série des sels basiques mixtes argento-cuivriques à l'état cristallisé (3), en opposant l'hydrate cuivrique bleu aux solutions des sels d'argent (sulfate, chlorate, hyposulfate) ou, moins aisément, par l'action inverse de l'oxyde d'argent sur les solutions des sels de cuivre. Il a pensé que la formation de sels basiques mixtes ne serait pas bornée au cuivre et à l'argent. D'ailleurs M. André, en 1887 (4), avait préparé des sels analogues en

(1) Pau, 19 septembre 1892, t. I, p. 185.
(2) *Comptes rendus*, t. CXXV, p. 175.
(3) *Comptes rendus*, t. CXXIX, p. 211.
(4) *Comptes rendus*, t. CVI, p. 431 et 854.

fixant directement une ou plusieurs molécules d'un oxyde sur un sel neutre. Il avait ainsi obtenu les chlorures basiques mixtes de mercure et d'un métal alcalino-terreux $CaCl^2.2HgO.4H^2O$ isolé déjà par Klinger, $BaCl^2.HgO6H^2O$, $SrCl^2.HgO.6H^2O$, un chlorure basique mixte de manganèse et de cuivre.

Sur les conseils de M. P. Sabatier, j'ai entrepris l'étude de corps semblables pour l'oxyde mercurique, pour les hydrates de cuivre et de nickel. Dans de telles recherches, le microscope est un précieux auxiliaire; il permet de s'assurer si l'on a affaire à un composé unique ou à un corps mélangé de l'oxyde amorphe primitif.

L'exposé de mes expériences comprendra trois parties :

1° Action de l'oxyde mercurique sur les solutions aqueuses des sels métalliques. Sels basiques mixtes du mercure et des autres métaux;

2° Action des hydrates de cuivre sur les solutions aqueuses des sels métalliques. Sels basiques mixtes du cuivre et des autres métaux;

3° Action de l'hydrate de nickel sur les solutions aqueuses de quelques sels métalliques.

J'ai exécuté ce travail dans le laboratoire de M. P. Sabatier à la Faculté des Sciences de l'Université de Toulouse. Que ce maître éminent daigne recevoir l'expression de ma vive reconnaissance pour les savants conseils et les encouragements qu'il n'a jamais cessé de me prodiguer.

CHAPITRE I.

ACTION DE L'OXYDE MERCURIQUE SUR LES DISSOLUTIONS AQUEUSES DES SELS MÉTALLIQUES. — SELS BASIQUES MIXTES DU MERCURE ET D'AUTRES MÉTAUX.

L'action de l'oxyde mercurique sur les solutions aqueuses des sels métalliques a été étudiée par Rose en 1859 (1) et par M. André en 1887 (2).

Rose a annoncé que cet oxyde déplace simplement les oxydes dissous à l'état de chlorures et est sans action sur les sels oxygénés des mêmes métaux; seuls, les chlorures alcalins et alcalino-terreux ne sont pas modifiés par l'oxyde de mercure. M. André a obtenu, au contraire, des sels basiques mixtes résultant de la fixation d'une ou plusieurs molécules d'oxyde mercurique sur les chlorures alcalino-terreux.

(1) *Poggendorf Annalen*, t. CVII, p. 278, et *Répertoire de Chimie pure*, 1859, p. 491.
(2) *Comptes rendus*, t. CVI, 1887, p. 431 et 854.

J'ai repris le travail de Rose en l'étendant à un plus grand nombre de sels. Je décrirai successivement l'action de l'oxyde mercurique sur les solutions des sels des métaux qui suivent : cuivre, zinc, nickel, cobalt, manganèse, cadmium, plomb et fer. J'ai, pour chacun d'eux, étudié les chlorure, bromure, nitrate et sulfate. J'indiquerai ensuite les résultats obtenus avec quelques sels de bismuth, d'aluminium et d'uranium.

I. — Sels de cuivre.

1° *Chlorure de cuivre.* — D'après Rose, le chlorure de cuivre est entièrement précipité à l'état d'oxyde par l'oxyde de mercure. En réalité, lorsqu'on oppose à une solution de chlorure cuivrique de l'oxyde jaune récemment préparé, il en précipite instantanément une poudre amorphe bleue difficile à laver. Séchée, elle présente la composition du chlorure tétracuivrique

$$CuCl^2.3CuO.3H^2O.$$

L'analyse donne pour 100 de matière :

	Trouvé.		Calculé.
	I.	II.	
Cu...........	59,0	58,6	59,4
Cl...........	16,8	16,9	16,7

L'oxyde jaune sec et l'oxyde rouge produisent à froid le même composé, après quelques heures de contact. Le mercure passe tout entier dans la dissolution et en chasse complètement tout le cuivre. Ce n'est donc pas sous forme d'oxyde, mais bien sous forme de sel basique de cuivre que l'oxyde mercurique déplace le cuivre de la solution du chlorure.

2° *Bromure de cuivre.* — L'action est encore beaucoup plus intéressante avec le bromure.

Une petite quantité d'oxyde jaune se transforme, dans les solutions de bromure cuivrique, en une poudre verte amorphe ne contenant pas traces de mercure. C'est un bromure basique de cuivre. Ajouté en plus grande quantité, l'oxyde donne une poudre bleu vert qui, examinée au microscope, se présente en petits grains excessivement ténus. Lavée à l'eau et séchée à froid, elle a donné la composition d'un bromure basique mixte cupro-mercurique

$$2HgBr^2.CuBr^2.3CuO.H^2O.$$

Pour 100 parties de matière, on a

	Trouvé.		
	I.	II.	Calculé.
Br...........	39,7	39,9	40,0
CuO........	27,4	27,6	26,4
Hg..........	33,1	33,8	33,3

Le mercure a été dosé dans tous les composés qui en contiennent, à l'état de sulfure de mercure.

Si l'on examine la dissolution de bromure de cuivre après la réaction, on constate qu'elle contient une certaine quantité de mercure; si l'oxyde mercurique est en quantité suffisante, tout le cuivre est déplacé.

3° *Azotate de cuivre.* — Rose a annoncé que l'oxyde de mercure n'exerce aucune action à froid sur les sels des acides oxygénés. Or, en opposant à froid de l'oxyde jaune sec à une solution très concentrée de nitrate de cuivre, il s'y transforme peu à peu et, au bout d'un temps assez long, en une poudre bleue. Au microscope elle apparaît formée par des lamelles quadrangulaires. C'est un nitrate basique mixte de cuivre et de mercure de formule

$$(NO^3)^2Hg.CuO.5H^2O.$$

Analyse.

	Trouvé.		
	I.	II.	Calculé.
CuO pour 100.	17,0	16,9	16,1
Hg.........	40,52	40,4	40,7
N^2O^6........	24,1	24,2	25,2

L'analyse de l'azotate a été faite par la méthode de Dumas (dosage de l'azote nitrique) et par la méthode Henriet [1], qui consiste à transformer l'azotate en hydroxylamine au moyen de chlorure stanneux en excès et à doser celui-ci par une solution titrée d'iode. Les résultats sont toujours trop faibles; mais, à l'aide de Tables calculées par l'auteur et qu'il est facile de construire soi-même, on peut faire la correction et obtenir alors des résultats très rigoureux. Cette méthode est très expéditive, et je l'ai toujours employée pour calculer l'azote des nitrates que j'ai analysés; ce n'est qu'exceptionnellement que je me suis servi de la méthode

---

[1] HENRIET, *Dosage de l'azote* (*Comptes rendus*, t. CXXII, n° 16, 1901).

Dumas, dans le but d'établir un contrôle. Les nombres rapportés dans mes analyses sont ceux qui m'ont été fournis par l'expérience.

L'azotate mixte de cuivre et de mercure s'obtient bien plus facilement si au lieu d'oxyde sec on se sert d'oxyde jaune humide. En ajoutant une certaine quantité de cet oxyde à la solution concentrée de nitrate de cuivre, la transformation totale peut être terminée après cinq à six jours si l'agitation est souvent renouvelée. Mais on le produit immédiatement si l'on ajoute l'oxyde par petites quantités à la fois. Il est alors possible d'obtenir en très peu de temps une grande quantité de nitrate mixte.

Ce corps se présente toujours sous forme d'une belle poudre bleue décomposable immédiatement par l'eau avec mise en liberté d'oxyde de mercure; elle ne peut donc pas être lavée. Aussi faut-il la sécher très rapidement sur du papier buvard pour la priver de l'eau mère qu'elle contient. Cette facilité avec laquelle l'eau décompose ce nitrate basique mixte indique les conditions de préparation; il faut que l'eau de la dissolution ne puisse le détruire et, pour cela, qu'elle soit assez concentrée.

Les meilleures dissolutions sont celles qui proviennent de la liquéfaction du nitrate de cuivre dans son eau de cristallisation; mais ce ne sont pas là les seules; on peut, en effet, à celles-là ajouter un quart de leur volume d'eau et produire encore le nitrate mixte; au-dessous de cette dissolution les difficultés augmentent et la production du sel bleu ne se fait qu'avec une extrême lenteur.

Lorsqu'on chauffe ce nitrate cupro-mercurique à l'étuve à 100°, il perd toute l'eau de cristallisation et se transforme en un composé vert.

En faisant bouillir directement l'oxyde jaune humide dans une solution contenant par litre deux molécules de nitrate de cuivre, on le voit se dissoudre peu à peu et finalement disparaître. Si on laisse refroidir la liqueur, elle abandonne un précipité bleu cristallisé en beaux prismes quadratiques décomposables encore par l'eau avec mise en liberté d'oxyde mercurique. Ce corps, séparé de la solution du nitrate et rapidement essoré entre des feuilles de papier buvard, est un nitrate mixte cupro-mercurique identique au précédent.

L'analyse fournit pour 100 parties de composé :

	Trouvé.		
	I.	II.	Calculé.
Hg	40,9	40,8	40,7
CuO	17,0	16,7	16,1
N^2O^5	24,1	24,0	25,2

Ces nombres s'accordent avec la formule

$$(NO^3)^2Hg.CuO.5H^2O.$$

Les liqueurs de nitrate de cuivre provenant de ces réactions contiennent du mercure.

L'oxyde rouge produit à froid et à chaud des résultats identiques.

Ainsi donc il est possible d'obtenir ce nitrate mixte et par conséquent le déplacement d'une certaine quantité de nitrate de cuivre par deux voies bien distinctes : par simple contact à froid de l'oxyde avec la solution de nitrate, ou en dissolvant à chaud cet oxyde et laissant déposer par refroidissement.

4° *Sulfate de cuivre.* — Rose indique que le sulfate de cuivre est altéré à la longue par l'oxyde mercurique, et qu'il se forme au bout de plusieurs mois une masse insoluble jaune composée de sous-sulfate mercurique et de sous-sulfate cuivrique. J'ai maintenu de l'oxyde jaune à froid pendant plus de six mois au contact d'une solution concentrée de sulfate cuivrique; je n'ai aperçu au bout de ce temps aucun changement appréciable; même en faisant bouillir plus d'une heure l'oxyde dans la solution de sulfate, aucune modification n'est intervenue. Le sulfate de cuivre résiste donc parfaitement à la décomposition; il partage d'ailleurs ce caractère avec la grande majorité des sulfates métalliques, et ceci n'a pas lieu de nous étonner si l'on se souvient que les nitrates basiques mixtes sont tous décomposables par l'eau. La difficulté que l'on éprouve à faire des solutions de sulfate très concentrées est une des causes de l'échec dans la production des sulfates basiques mixtes du mercure et des autres métaux.

II. — Sels de zinc.

L'action qu'exerce l'oxyde mercurique sur les sels de zinc est de tout point semblable à celle qu'ont fournie les sels de cuivre.

1° *Chlorure de zinc.* — D'après Rose, le chlorure de zinc est précipité de sa solution par l'oxyde mercurique, à l'état d'oxyde de zinc avec formation d'oxychlorure de mercure. En ajoutant peu à peu de l'oxyde jaune à une solution concentrée et chaude de chlorure de zinc (500^{g} de chlorure dans 750$^{cm^3}$ d'eau), M. André a obtenu par refroidissement de la liqueur un précipité blanc amorphe renfermant très peu de mercure, et qui serait, d'après cet auteur, un oxychlorure de zinc $2ZnCl^2.3ZnO\,11H^2O$ se changeant par dessiccation dans le composé $ZnCl^2\,4ZnO\,6H^2O$.

J'ai ajouté à une solution de chlorure de zinc soit de l'oxyde jaune sec, soit de l'oxyde jaune récemment précipité et encore humide. Celui-ci s'est transformé presque instantanément en une poudre blanche cristalline très ténue; l'oxyde sec a produit de même précipitation d'une poudre blanche qui, examinée au fort

grossissement du microscope, se présente sous forme de petits hexagones. Lavée à l'eau et séchée, elle ne contient pas la moindre trace d'oxyde de mercure. C'est un oxychlorure de zinc de formule

$$ZnCl^2.3ZnO.5H^2O.$$

L'analyse a fourni pour 100 parties de matière :

	Trouvé.		
	I.	II.	Calculé.
Zn..........	56,0	56,2	55,4
Cl............	14,7	14,65	15,1

Ce chlorure basique de zinc a déjà été trouvé par d'autres voies par Kane et André.

Il se produit instantanément à froid dans des solutions contenant 600^g de chlorure de zinc pour 100 d'eau, lorsqu'on leur ajoute de l'oxyde humide. Il est alors amorphe. Mais on l'obtient encore après quelques minutes de contact et à froid dans des solutions à 20^g de chlorure de zinc par litre. L'oxyde rouge lui-même le produit après quelques jours dans une solution à 50^g de chlorure pour 1000.

L'action de l'oxyde jaune sec n'étant pas aussi rapide que celle de l'oxyde humide, j'ai examiné si la réaction était identique à la précédente lorsqu'on fait varier la température. L'oxyde jaune se transforme dans une solution bouillante de chlorure de zinc en une poudre noire qui ne tarde pas à blanchir et finalement disparaît dans la liqueur. Par le refroidissement, la liqueur laisse déposer une poudre blanche constituée par de petits hexagones. L'analyse montre qu'elle ne contient pas de mercure et qu'elle est constituée par un oxychlorure de zinc identique au précédent.

On trouve, en effet, pour 100 de matière :

	I.	II.
Zn........................	55,0	55,3
Cl..........................	14,8	14,75

Ces nombres correspondent bien au chlorure basique

$$ZnCl^2.3ZnO.5H^2O.$$

L'oxyde rouge de mercure mis à bouillir dans les mêmes conditions produit un précipité cristallin formé d'hexagones, après être passé par les mêmes étapes que l'oxyde jaune.

2° *Bromure de zinc.* — Les solutions de bromure de zinc présentent, vis-à-vis de l'oxyde de mercure, un parallélisme complet avec les solutions de bromure de cuivre.

Une très petite quantité d'oxyde mercurique récemment précipité donne, dans une solution de bromure de zinc, une poudre blanche qui, lavée et séchée, ne contient pas traces de mercure. C'est un bromure basique de zinc amorphe qui a pris naissance.

Mais, si l'on ajoute une quantité suffisante d'oxyde jaune, il se précipite encore une poudre blanche qui est formée de petits grains cristallins lorsqu'on a fait usage de l'oxyde humide, et au contraire de petits prismes clinorhombiques nettement différenciés si l'on a employé l'oxyde sec. L'analyse du composé ainsi obtenu a donné pour 100 parties :

	Trouvé.		Théorie pour
	I.	II.	$HgBr^2.ZnO.8H^2O$.
Hg..........	36,0	36,3	35,0
Br...........	28,4	28,3	27,8
ZnO	14,0	14,0	14,2

Ces nombres peuvent s'accorder avec la formule

$$HgBr^2.ZnO.8H^2O.$$

C'est donc un bromure basique mixte de zinc et de mercure. Il se produit très rapidement avec l'oxyde jaune humide, moins vite avec l'oxyde sec. Mais, si l'on fait bouillir l'oxyde sec dans la solution du bromure, il s'y transforme en une poudre blanche cristallisée en petites lamelles hexagonales et une partie se dissout. La liqueur filtrée laisse déposer par refroidissement un précipité cristallisé en fines aiguilles. Les deux composés ainsi obtenus sont constitués par un bromure basique mixte identique au précédent.

3° *Azotate de zinc.* — Dans une solution très concentrée de nitrate de zinc, j'ai ajouté une certaine quantité d'oxyde jaune sec. A froid, au bout de plusieurs jours, et après des agitations renouvelées, il s'est transformé en une poudre blanche qui, au microscope, apparaît sous la forme de petites paillettes ou de fines aiguilles. Recueillie et rapidement essorée sur du papier pour la débarrasser de l'eau mère, elle présente la composition d'un nitrate basique mixte de zinc et de mercure, de formule

$$(NO^3)^2Hg.ZnO.2H^2O.$$

L'analyse a donné, pour 100 parties du composé :

	Trouvé.		
	I.	II.	Calculé.
Hg...........	45,4	45,0	45,3
ZnO..........	17,8	18,1	18,3
N^2O^6.........	27,1	27,0	28,1

C'est l'azotate basique de mercure $(NO^3)^2Hg.HgO.H^2O$, où 1^{mol} d'oxyde de mercure a été remplacée par 1^{mol} de ZnO; il peut, par conséquent, être considéré comme le sel normal d'un oxyde mixte inconnu

$$\begin{matrix} Zn - OH \\ \rangle O \\ Hg - OH \end{matrix}.$$

Ce composé est très facilement décomposable par l'eau avec mise en liberté d'oxyde mercurique jaune; aussi, comme le nitrate mixte de cuivre et de mercure, ne peut-il être obtenu que dans des solutions de nitrate de zinc très concentrées.

L'oxyde rouge se transforme, lui aussi, plus lentement que l'oxyde jaune en une poudre blanche cristalline, décomposable par l'eau, formée par le nitrate mixte précédent.

En chauffant directement l'oxyde mercurique dans une solution de nitrate de zinc, on le voit disparaître au bout d'un certain temps. La liqueur filtrée abandonne par le refroidissement un composé cristallisé blanc formé par des cristaux quadratiques. Rapidement essorés, ils donnent à l'analyse la composition d'un nitrate basique mixte zinco-mercurique de même formule que le précédent :

$$(NO^3)^2Hg.ZnO.2H^2O.$$

Analyse.

	Trouvé.		
	I.	II.	Calculé.
Hg...........	45,6	45,5	45,3
ZnO..........	18,0	18,3	18,3
N^2O^6.........	27,0	26,8	28,1

Très fréquemment on obtient aussi un composé amorphe. En faisant bouillir l'oxyde jaune dans une solution de nitrate de zinc, on le voit se transformer directement en une poudre blanche amorphe de même composition que le nitrate basique précédent. La solution chaude filtrée, additionnée d'eau froide, laisse déposer un précipité blanc floconneux, indécomposable par l'eau, et qui est encore un nitrate basique mixte. Ce n'est qu'exceptionnellement que j'ai pu obtenir un corps bien cristallisé.

4° *Sulfate de zinc.* — Ainsi que Rose l'avait annoncé, l'oxyde mercurique n'agit pas sur les solutions les plus concentrées de sulfate de zinc. J'ai fait bouillir pendant plusieurs heures l'oxyde jaune humide dans de telles solutions; aucun changement n'est intervenu. De même, à froid, pendant près d'un an, l'oxyde jaune n'a pas subi la moindre altération dans une solution concentrée de sulfate de zinc.

III. — Sels de nickel.

1° *Chlorure de nickel.* — D'après Rose, le chlorure de nickel est complètement précipité de sa solution par l'oxyde de mercure. En réalité, il se forme un oxychlorure mixte. L'oxyde jaune sec se transforme lentement, l'oxyde humide presque instantanément, en une poudre verte lorsqu'on le fait réagir sur une solution de chlorure de nickel. Examinée au microscope, on n'y aperçoit pas une cristallisation bien nette. Elle est, en effet, formée par de tout petits grains cristallins sans forme bien définie. Lavée à l'eau froide et séchée, elle présente la composition d'un chlorure basique mixte très complexe ne répondant à aucun des chlorures basiques connus. L'analyse donne, en effet, pour 100 parties de matière :

	Trouvé.		Calculé pour $HgCl^2.NiCl^2.6NiO.20H^2O$.
	I.	II.	
Hg..........	15,1	15,2	16,5
NiO..........	44,0	43,8	43,3
Cl...........	11,0	11,5	11,6

Ces nombres s'accordent avec la formule

$$HgCl^2.NiCl^2.6NiO.20H^2O,$$

que l'on peut écrire

$$(HgCl^2.3NiO)(NiCl^2.3NiO)20H^2O.$$

L'oxyde rouge de mercure bouilli avec le chlorure de nickel donne un composé vert cristallin de composition identique au précédent. Si l'on porte ce chlorure basique mixte à l'étuve à 110° pendant près de 1 heure, il perd très facilement 15^{mol} d'eau.

2° *Bromure de nickel.* — Les solutions de bromure de nickel présentent des réactions identiques à celles du chlorure. L'oxyde jaune sec, mis à froid dans une solution de bromure de nickel, s'y transforme lentement en une poudre verte formée de grains très ténus; l'oxyde humide produit immédiatement le même

[illegible]

[illegible]

[illegible]

	[illegible]		[illegible]
[illegible]		[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

[illegible] jaune [illegible] transforme peu à peu en une [illegible] l'oxyde de mercure [illegible] elle exige des [illegible] sous forme de [illegible] impossible [illegible] elles fournissent la composition suivante :

	[illegible]	II.	Calculé pour $(NO^3)^2Hg.NiO.4H^2O$
Hg pour cent	[illegible]	[illegible]	62,1
[illegible]	[illegible]	[illegible]	15,9
[illegible]	[illegible]	[illegible]	26,3

Ces nombres correspondent exactement à la formule d'un nitrate basique mixte de nickel et de mercure

$$(NO^3)^2Hg.NiO.4H^2O.$$

Ce composé ne se produit à froid que dans des solutions très concentrées de nitrate de nickel.

Si l'on fait bouillir de l'oxyde jaune dans une solution de nitrate de nickel, on le voit peu à peu se transformer en une poudre verte très bien cristallisée. Elle apparaît, en effet, au microscope, sous forme de grosses lamelles hexagonales accompagnées de lames octogonales très nombreuses. C'est encore un nitrate basique mixte répondant à la formule précédente.

La réaction diffère donc sensiblement, dans ce cas, de celle que j'avais obtenue avec les nitrates de cuivre et de zinc. Tandis que dans ceux-ci l'oxyde mercurique

se dissolvait d'abord et le nitrate mixte se déposait par refroidissement, pour le nitrate de nickel, le nitrate mixte se forme sans dissolution préalable de l'oxyde. Il y a cependant une partie de l'oxyde qui se dissout, et dans certains cas j'ai même obtenu un léger dépôt d'une poudre verte présentant la même composition que le nitrate précédent.

4° *Sulfate de nickel.* — Les solutions de sulfate de nickel présentent, vis-à-vis de l'oxyde de mercure, la même indifférence que celle de cuivre et de zinc. Aucune transformation n'a jamais lieu ni à froid, ni à l'ébullition.

IV. — Sels de cobalt.

Les sels de cobalt présentent des analogies très étendues avec les sels de nickel.

1° *Chlorure de cobalt.* — L'oxyde de mercure récemment précipité se transforme presque instantanément, dans une solution de chlorure de cobalt, en une poudre verte constituée par des grains cristallins extrêmement petits, très facile à laver. L'oxyde sec ne produit le même composé qu'avec une extrême lenteur.

L'analyse indique qu'il est formé pour 100 parties :

	Trouvé.		Calculé pour
	I.	II.	$HgCl^2.CoCl^2.6CoO.20H^2O$.
Hg	15,7	15,9	16,5
CoO	44,0	43,6	43,3
Cl	12,0	11,9	11,6

Ces nombres correspondent à la formule

$$HgCl^2.CoCl^2.6CoO.20H^2O,$$

identique à celle que j'ai obtenue pour le chlorure basique mixte de nickel et de mercure.

Que l'on ajoute une petite quantité d'oxyde de mercure, ou une grande quantité, à une solution de chlorure de cobalt, c'est toujours un chlorure basique mixte qui se produit.

2° *Bromure de cobalt.* — Dans une dissolution de bromure de cobalt, une petite quantité d'oxyde jaune humide y produit instantanément un précipité vert amorphe; une grande quantité y détermine la formation immédiate du même

composé. L'oxyde jaune sec et l'oxyde rouge le produisent de même sous forme d'une poudre cristalline très ténue où l'on peut déceler au fort grossissement de petits hexagones. De couleur vert foncé, cette poudre ressemble au chlorure mixte précédent et présente d'ailleurs une composition identique

$$HgBr^2.CoBr^2.6CoO.20H^2O,$$

qu'on peut écrire encore

$$(HgBr^2.3CoO)(CoBr^2.3CoO.)20H^2O.$$

Analyse.

	Trouvé.		
	I.	II.	Calculé.
Hg...........	15,0	14,8	14,4
CoO.........	38,2	38,8	37,8
Br............	22,4	22,7	23,0

Tout le cobalt est déplacé si la quantité d'oxyde mercurique est suffisante.

3° *Nitrate de cobalt.* — Lorsqu'on ajoute à une solution concentrée et froide de nitrate de cobalt une certaine quantité d'oxyde de mercure, il se transforme, après plusieurs jours de contact et par des agitations répétées, en un composé de formule

$$(NO^3)^2Hg.CoO.4H^2O.$$

Analyse.

	Trouvé.		
	I.	II.	Calculé.
Quantité pour 100 de Hg.....	41,9	41,81	42,2
» CoO...	16,0	16,2	15,9
» N^2O^5..	25,0	25,0	26,3

C'est un nitrate basique mixte, se présentant sous forme d'une poudre rouge constituée par des prismes clinorhombiques, isomorphes de ceux du nitrate de nickel et de mercure; mais ils en diffèrent en ce qu'ils portent rarement des troncatures sur leurs angles. Comme ce dernier, il est décomposable par l'eau, et sa formation nécessite l'emploi de solutions de nitrate de cobalt très concentrées.

Lorsqu'on fait bouillir de l'oxyde jaune sec ou, ce qui vaut mieux, de l'oxyde humide dans une solution de nitrate de cobalt, il s'y dissout peu à peu, puis, si l'on abandonne au refroidissement la liqueur filtrée, elle laisse déposer un beau

précipité rouge formé de lamelles rhombes. L'analyse l'identifie avec le nitrate mixte précédent. Donc, qu'on fasse agir l'oxyde mercurique à froid ou à chaud, on obtient toujours le même sel basique mixte. L'examen des liqueurs montre que de l'oxyde mercurique reste toujours en dissolution, ce qui indique qu'il y a eu réellement un déplacement.

4° *Sulfate de cobalt.* — Les réactions négatives fournies par le sulfate de nickel se retrouvent dans le cas du sulfate de cobalt. L'oxyde mercurique ne réagit jamais.

V. — SELS DE MANGANÈSE.

1° *Chlorure de manganèse.* — Lorsqu'on ajoute de l'oxyde mercurique récemment précipité à une solution de chlorure de manganèse, on a d'abord formation d'un précipité blanc d'hydrate manganeux qui ne tarde pas à brunir par suite d'une suroxydation, faisant place à un précipité gélatineux constitué, ainsi que Rose l'avait démontré, par un oxychlorure de mercure mélangé d'oxyde manganoso-manganique.

2° *Nitrate de manganèse.* — Au sein d'une solution de nitrate de manganèse, l'oxyde jaune humide est remplacé à la longue par un précipité blanc cristallin qui se présente au microscope sous la forme de prismes hexagonaux. La réaction est très lente à froid, et elle nécessite, pour se produire, des solutions très concentrées. L'analyse du précipité donne pour 100 parties :

	Trouvé.		Calculé pour $(NO^3)^2Hg.MnO.H^2O$.
	I.	II.	
Hg	42,17	42,3	42,8
MnO	16,1	15,9	15,2
N^2O^6	25,1	25,3	26,5

Ces nombres correspondent au nitrate basique mixte de manganèse et de mercure

$$(NO^3)^2Hg.MnO.4H^2O.$$

Ce nitrate est, comme tous ses congénères, décomposable par l'eau avec mise en liberté d'oxyde de mercure. Les cristaux blancs noircissent peu à peu à la surface sans que leur composition soit sensiblement modifiée.

L'oxyde rouge de mercure opposé à une solution de nitrate manganeux donne lieu à la formation du même sel basique mixte.

Si l'on traite à chaud une solution d'azotate de manganèse par de l'oxyde mercurique récemment précipité, il y a d'abord précipitation d'une poudre noire formée par du sesquioxyde de manganèse mélangé à de l'oxyde mercurique; puis, si l'on continue l'action de la chaleur, l'oxyde jaune se dissout complètement. La liqueur filtrée laisse déposer par le refroidissement un précipité blanc constitué par de petites lamelles orthorhombiques décomposables par l'eau. Ce composé est séché rapidement entre des feuilles de papier et analysé; on trouve pour 100 parties :

	I.	II.
Hg	42,3	42,6
MnO	16,5	16,0
N^2O^5	25,2	25,5

Ces nombres s'accordent avec la formule du nitrate mixte trouvé plus haut :

$$(NO^3)^2Hg.MnO.4H^2O.$$

VI. — Sels de cadmium.

1° *Chlorure de cadmium.* — Si, à une solution concentrée de chlorure de cadmium, on ajoute une petite quantité d'oxyde mercurique, il se précipite instantanément une poudre blanche amorphe, d'aspect gélatineux, très difficile à laver. Elle est constituée par un oxychlorure de cadmium de formule

$$CdCl^2.CdO.7H^2O.$$

L'analyse a donné pour 100 parties :

	Trouvé.		
	I.	II.	Calculé.
Cd	51,8	50,8	51,2
Cl	15,8	15,6	16,19

Mais, si l'on ajoute à une solution assez diluée un excès d'oxyde jaune humide, on obtient encore très rapidement une poudre amorphe blanche se déposant très facilement. Lavée avec soin à l'eau froide, elle a la composition d'un chlorure basique mixte de cadmium et de mercure

$$HgCl^2.CdO.H^2O.$$

Analyse.

	Trouvé. I.	II.	Calculé.
Hg..........	49,0	49,1	47,9
Cd..........	28,0	28,2	26,8
Cl...........	16,5	16,7	17,0

2° *Bromure de cadmium.* — L'oxyde jaune récemment précipité se transforme rapidement à froid, dans une solution de concentration moyenne de bromure de cadmium, en un précipité blanc qui se présente en longues aiguilles prismatiques, résistant aux lavages par l'eau.

L'analyse a donné pour 100 parties du composé :

	Trouvé. I.	II.	Calculé pour $HgBr^2.CdO.H^2O$.
Hg..........	38,8	38,5	38,0
Cd...........	24,9	25,0	24,3
Br............	34,0	33,7	34,2

Ces nombres s'accordent avec la formule d'un bromure basique mixte de cadmium et de mercure, de constitution analogue au chlorure mixte trouvé plus haut

$$HgBr^2.CdO.H^2O.$$

3° *Azotate de cadmium.* — A froid, et dans une solution concentrée de nitrate de cadmium, l'oxyde jaune sec se transforme, après un temps très long (plusieurs mois de contact avec agitations successives sont nécessaires pour effectuer totalement la réaction), en un composé blanc cristallisé. L'oxyde humide ajouté peu à peu à une semblable solution de nitrate s'y transforme au contraire presque instantanément dans le même composé. Il se présente en lames ou prismes clinorhombiques blancs, très facilement décomposables par l'eau avec mise en liberté d'oxyde jaune. Essorés rapidement, ils constituent un nitrate basique mixte de cadmium et de mercure, de formule

$$(NO^3)^2Hg.CdO.3H^2O.$$

L'analyse donne, pour 100 parties du composé :

	Trouvé. I.	II.	Calculé.
Hg..........	38,2	38,3	39,5
CdO..........	26,0	26,2	25,2
N^2O^6.........	24,8	25,0	25,8

En faisant bouillir l'oxyde mercurique dans le nitrate de cadmium, il se dissout et, par refroidissement, il laisse déposer un précipité blanc constitué par de grosses lames hexagonales dérivées d'un prisme clinorhombique. L'analyse montre qu'il est formé par un nitrate basique mixte de cadmium et de mercure de même formule que le précédent. Il est d'ailleurs, comme lui, très facilement décomposable par l'eau.

4° *Sulfate de cadmium.* — Les solutions de sulfate de cadmium ne font subir aucun changement à l'oxyde de mercure.

VII. — Sels de plomb.

Chlorure de plomb. — D'après Rose, de l'oxyde mercurique précipite de l'oxyde de plomb des dissolutions de chlorure. En réalité, l'oxyde jaune récemment précipité disparaît peu à peu à froid dans une solution saturée de chlorure de plomb et est remplacé par une poudre blanche amorphe, qui est un chlorure basique double de plomb et de mercure de composition

$$HgCl^2.2PbO.2H^2O.$$

L'analyse m'a fourni, pour 100 parties de matière :

	Trouvé. I.	II.	Calculé.
Hg..........	25,8	25,4	26,4
Pb..........	52,0	52,2	53,6
Cl...........	9,8	9,9	9,4

L'azotate de plomb ne m'a fourni, dans les mêmes conditions, aucune réaction.

VIII. — Sels ferreux.

L'action de l'oxyde mercurique sur les sels de fer est particulièrement intéressante.

1° *Chlorure ferreux.* — Rose a montré que, si l'on traite une solution de chlorure ferreux par l'oxyde mercurique, celui-ci noircit par suite de la précipitation d'oxyde ferreux, puis redevient rouge. Lorsqu'il n'y a pas assez d'oxyde mercurique pour former l'oxychlorure insoluble, la solution renferme du bichlorure, et le résidu insoluble serait formé de chlorure mercureux et d'un oxychlorure de fer.

J'ai repris l'étude du phénomène étudié par Rose; les résultats obtenus ont été différents, suivant les conditions de la réaction.

A une solution de chlorure ferreux, préparée soigneusement à l'abri de l'air, j'ai ajouté à la fois une assez grande quantité d'oxyde mercurique récemment précipité. Il s'est formé immédiatement une poudre noire qui, presque instantanément, prend une couleur jaune brun. Cette poudre, lavée et séchée, paraît homogène. En réalité, elle est constituée par un mélange de chlorure mercureux (60 pour 100) et d'oxychlorure ferrique très basique. L'eau à l'ébullition ne la décompose pas, mais l'acide azotique ou l'acide chlorhydrique en séparent à chaud une poudre blanche constituée par du chlorure mercureux, et la solution d'oxychlorure ferrique dans l'acide nitrique montre qu'elle contient 3,5 parties de chlore pour 16,5 parties de fer.

Mais si, au lieu d'ajouter brusquement une quantité d'oxyde de mercure à la solution de chlorure ferreux, on l'ajoute peu à peu, en se plaçant toujours à l'abri de l'air, cet oxyde devient d'abord noir, puis jaune brun et finalement blanc. La poudre blanche amorphe est insoluble dans l'acide azotique à froid. Elle est uniquement constituée par du chlorure mercureux. On peut ainsi obtenir des quantités assez grandes de chlorure mercureux en continuant l'addition de l'oxyde jaune humide dans la solution de chlorure ferreux. Celle-ci se charge en même temps de chlorure ferrique.

2° *Sulfate ferreux.* — Dans une solution de sulfate ferreux, l'oxyde mercurique récemment précipité se change instantanément en une poudre noire, en même temps qu'il y a précipitation du fer sous forme de sulfate ferrique basique. Mais, si le contact est assez prolongé, la poudre noire disparaît et laisse la place à une poudre jaune amorphe où l'œil aperçoit très nettement des globules de mercure métallique, et qui, par conséquent, peut être considérée comme un mélange de sulfate mercureux, de mercure et d'un sulfate basique de fer de formule

$$(SO^4)^3Fe^2.Fe^2O^3.nH^2O.$$

La liqueur provenant de la réaction de l'oxyde mercurique sur le sulfate ferreux a une coloration rouge; elle ne contient pas de mercure.

IX. — Sels ferriques.

1° *Chlorure ferrique.* — Rose pensait que le fer du chlorure ferrique est complètement précipité à l'état de peroxyde avec formation d'oxychlorure de mercure. En réalité, lorsqu'on ajoute de l'oxyde mercurique à une solution de perchlorure de fer, il se dissout jusqu'à refus, puis en précipite un composé rouge gélatineux qui n'est autre que l'hydrate ferrique. Tout l'oxyde de mercure reste dissous.

2° *Sulfate ferrique.* — Dans une solution de sulfate ferrique, l'oxyde mercurique se transforme instantanément en une poudre amorphe de couleur jaune-citron très dense et se déposant, par suite, très facilement. L'analyse montre qu'elle est constituée par le turbith minéral

$$SO^4Hg.2HgO.$$

Pour 100 parties du composé, on a :

	Trouvé.		
	I.	II.	Calculé.
HgO.........	88,5	88,3	89,0
SO^3..........	10,6	11,0	10,9

3° *Azotate ferrique.* — L'azotate ferrique présente une réaction identique à celle du sulfate. L'oxyde jaune humide, après s'être dissous jusqu'à refus dans une solution d'azotate ferrique, se précipite sous forme d'une poudre cristalline apparaissant au microscope, sous l'aspect de tables hexagonales irrégulières appartenant au système monoclinique. Ces tables séchées ne peuvent être complètement privées de leur eau mère, qui leur communique une teinte jaune due au sel ferrique entraîné (la proportion de fer ainsi fixé est de 4 pour 100). Ces cristaux présentent la composition d'un azotate basique de mercure déjà connu,

$$(NO^3)^2Hg.HgO.H^2O.$$

Sur 100 parties de matière, l'analyse donne :

	Trouvé.		
	I.	II.	Calculé.
Hg...........	71,9	72,0	71,7
N^2O^6.........	21,3	21,4	22,2

X. — Sels divers.

J'examinerai, dans ce paragraphe, l'action qu'exerce l'oxyde de mercure sur quelques sels particuliers.

1° *Chlorure de bismuth.* — Dans une solution de chlorure de bismuth, l'oxyde mercurique se dissout immédiatement et en précipite une poudre blanche qui est un oxychlorure de bismuth, $BiOCl$.

2° *Nitrate de bismuth.* — L'oxyde jaune humide se dissout encore de suite dans une solution de nitrate de bismuth, puis en précipite une poudre blanche constituée par des lamelles cristallines soyeuses. Lavées à l'eau et séchées, elles correspondent au sous-nitrate de bismuth à une molécule d'eau

$$(NO^3)BiO.H^2O.$$

Pour 100 parties, j'ai trouvé : Bi^2O^3, 76 et 76,1 ; le calcul exige 76,3.
Tout l'oxyde mercurique passe dans la dissolution.

3° *Nitrate d'aluminium.* — A froid, dans les solutions concentrées de nitrate d'alumine, l'oxyde mercurique n'éprouve aucun changement; mais en le faisant bouillir dans la solution il se dissout lentement. La liqueur filtrée laisse déposer, par le refroidissement, une poudre blanche, légèrement jaunâtre, formée par des prismes clinorhombiques et de grosses lames hexagonales dérivant par clivage des premiers.

L'analyse du composé a donné, pour 100 parties :

	Trouvé.		
	I.	II.	Calculé.
$(NO^3)^2$.......	21,0	20,9	22,2
Hg...........	71,2	71,4	71,7

Ces nombres correspondent à la formule

$$(NO^3)^2Hg.HgO.H^2O.$$

C'est donc un nitrate basique de mercure identique à celui que j'ai précédemment obtenu avec les solutions d'azotate ferrique.

4° *Nitrate d'uranium.* — Lorsqu'on ajoute de l'oxyde mercurique à une solution assez concentrée de nitrate d'urane, il se dissout jusqu'à refus, puis se

précipite sous forme d'une poudre amorphe jaune qui, lavée à l'eau et séchée, présente encore la composition du nitrate basique de mercure précédent. Ce composé est toujours souillé par des traces d'uranium.

On voit que ce nitrate basique de mercure a une grande tendance à se former dans les solutions qui sont surtout très acides.

Comparaison des divers résultats obtenus avec l'oxyde mercurique.

En résumé, l'oxyde mercurique opposé aux solutions des sels métalliques ne se borne pas, comme Rose l'avait indiqué, à déplacer simplement l'oxyde des solutions des chlorures.

J'ai trouvé, en effet, qu'il agissait aussi sur les solutions concentrées des azotates.

La réaction est très rapide avec les chlorures et les bromures, surtout lorsque l'on opère avec l'oxyde jaune récemment précipité. Elle est au contraire d'une extrême lenteur avec les azotates, et elle exige pour se produire des solutions très concentrées.

Lorsque l'on fait agir l'oxyde mercurique à chaud sur les solutions des azotates, il commence toujours par se dissoudre, puis la liqueur abandonne par refroidissement un sel basique.

Dans aucun cas on n'obtient ce que Rose avait indiqué, savoir un simple déplacement d'oxyde métallique. Il y a toujours formation d'un sel basique simple ou d'un sel basique mixte.

Les sels basiques simples que j'ai obtenus étaient tous connus. Les sels basiques mixtes, que j'ai obtenus pour la première fois, dérivent, pour les azotates, d'un nitrate basique de mercure

$$(NO^3)^2Hg.HgO\,H^2O$$

par le remplacement de 1^{mol} d'oxyde de mercure par 1^{mol} d'oxyde métallique.

Les chlorures et les bromures basiques mixtes ne correspondent généralement pas à des sels basiques simples connus.

Quelle que soit la dissolution, on trouve toujours que tout ou partie du mercure est passé en solution.

CHAPITRE II.

ACTION DES HYDRATES DE CUIVRE SUR LES DISSOLUTIONS AQUEUSES DES SELS MÉTALLIQUES. — SELS BASIQUES MIXTES DU CUIVRE ET D'AUTRES MÉTAUX.

Dans ce travail, j'ai employé deux hydrates de cuivre très bien définis : 1° l'hydrate tétracuivrique brun, obtenu à partir de l'hydrate bleu par déshydratation à 100°, de formule $Cu^4O^3(OH)^2$, dont la composition a été établie par M. P. Sabatier (1); 2° l'hydrate bleu de Péligot, de formule $Cu(OH)^2$, préparé d'après les indications données par cet auteur. Exceptionnellement, j'ai fait usage de l'oxyde de cuivre noir CuO.

Je décrirai successivement l'action exercée par ces hydrates sur les solutions des sels (chlorures, bromures, nitrates et sulfates) des métaux suivants : zinc, nickel, cobalt, manganèse, cadmium, mercure, plomb. J'indiquerai ensuite les résultats obtenus avec quelques autres sels.

Dans une Note publiée récemment (2), et pendant que je faisais ce travail, M. Recoura a étudié l'action de l'hydrate de cuivre sur les solutions des sulfates métalliques. Il a obtenu dans chaque cas, et suivant les conditions de température où il a opéré, des combinaisons amorphes constituées par des sels basiques mixtes de cuivre et d'autres métaux. Ces composés auraient une composition bien différente suivant qu'ils ont été produits à froid ou à l'ébullition. Les résultats auxquels m'a conduit l'étude du même phénomène sont complètement différents de ceux obtenus par M. Recoura.

I. — Sels de zinc.

1° *Chlorure de zinc.* — M. André a déjà étudié en 1887 (3) l'action exercée par l'oxyde de cuivre sur le chlorure de zinc. Au contact d'une solution bouillante de chlorure de zinc, l'oxyde de cuivre récemment précipité et encore humide se transforme rapidement en une poudre verte qui, bouillie dans la dissolution pendant quelques heures, a présenté la composition d'un chlorure basique mixte très complexe auquel il a assigné la formule $(ZnCl^2.ZnO.2CuO)(ZnCl^2.3CuO.6H^2O)$.

Par l'emploi de l'hydrate tétracuivrique, j'ai obtenu un résultat sensiblement

(1) *Comptes rendus*, t. CXXV, 1897, p. 101 et 301.
(2) *Comptes rendus*, t. CXXXII, 1901, p. 1414.
(3) *Comptes rendus*, t. CVI, 1887, p. 854.

différent. En ajoutant à une solution froide et peu concentrée de chlorure de zinc une certaine quantité d'hydrate brun encore humide, j'ai obtenu, après 3 à 4 jours de contact et après quelques agitations, une poudre bleu vert constituée par de petits hexagones ou de petites lamelles rhombes microscopiques. Cette poudre bleu vert se produit avec une extrême lenteur si, au lieu d'hydrate humide, on emploie l'hydrate sec.

L'analyse de ce composé a donné pour 100 de matière :

	Trouvé.		Théorie pour
	I.	II.	$ZnCl^2.3CuO.4H^2O$.
CuO..........	52,8	52,9	53,3
Zn............	15,0	15,0	14,6
Cl............	16,5	16,3	15,9

Ces nombres s'accordent suffisamment avec la formule

$$ZnCl^2.3CuO.4H^2O.$$

On a donc affaire à un chlorure basique mixte de cuivre et de zinc répondant au chlorure tétracuivrique $CuCl^2.3CuO.3H^2O$ par le remplacement d'un atome de cuivre par un atome de zinc, ou au chlorure tétrazincique $ZnCl^2.3ZnO.5H^2O$ par le remplacement de 3^{mol} d'oxyde de zinc par 3^{mol} d'oxyde de cuivre.

En ajoutant l'hydrate brun à une solution chaude de chlorure de zinc, ce même sel basique mixte s'obtient après quelques minutes de contact et il se produit toujours, quelle que soit la concentration de la solution.

Si l'on examine la dissolution de chlorure de zinc après la réaction, on constate qu'elle contient du cuivre. Il résulte de ce fait qu'il y a eu déplacement d'une partie de chlorure de zinc par une certaine quantité d'oxyde de cuivre.

L'hydrate bleu de Péligot bouilli avec une solution de chlorure de zinc déplace en partie l'oxyde de zinc et passe dans la dissolution. La poudre amorphe bleu pâle résultant de ce déplacement ne peut pas être considérée comme un corps bien défini.

2° *Bromure de zinc.* — L'action de l'hydrate tétracuivrique sur le bromure de zinc est de tout point parallèle à celle du chlorure. Après quelques jours de contact et à froid, l'hydrate brun s'est transformé en une poudre verte. Examinée au microscope, elle apparaît formée par des lamelles hexagonales allongées se groupant en étoiles à six branches.

J'ai obtenu très rapidement ces même étoiles en faisant bouillir directement l'hydrate tétracuivrique dans une solution quelconque de bromure de zinc. Lavées

à l'eau froide et séchées, elles présentent la composition d'un bromure basique mixte de cuivre et de zinc de formule

$$ZnBr^2.3CuO.4H^2O.$$

L'analyse a donné pour 100 de matière :

	Trouvé. I.	Trouvé. II.	Calculé.
CuO..........	45,0	44,6	44,3
Zn............	12,0	12,2	12,2
Br............	29,7	29,6	29,9

L'hydrate de Péligot opposé à froid ou à chaud à une solution de bromure de zinc m'a fourni un composé amorphe sans intérêt. Il y a néanmoins déplacement de bromure de zinc et dissolution d'oxyde de cuivre.

L'oxyde de cuivre noir, mis à bouillir pendant plusieurs heures dans une solution de bromure de zinc, m'a donné un précipité vert cristallin constitué par de fines lamelles. C'est un composé bien défini répondant au bromure basique mixte de cuivre et zinc, mais contenant 2^{mol} d'eau de moins. Le corps, bien lavé à l'eau pour le débarrasser des parcelles d'oxyde noir non transformées, a donné à l'analyse :

	Trouvé. I.	Trouvé. II.	Théorie pour $ZnBr^2.3CuO.2H^2O$.
Quantité de CuO pour 100.	47,0	47,2	47,6
Quantité de Zn pour 100...	13,0	12,7	13,0
Quantité de Br pour 100...	33,0	32,8	32,1

nombres vérifiant la formule

$$ZnBr^2.3CuO.2H^2O.$$

Les deux bromures mixtes répondent, à la quantité d'eau près, au bromure tétracuivrique $CuBr^2.3CuO.3H^2O$.

3° *Azotate de zinc.* — J'ai ajouté à froid de l'hydrate brun humide à une dissolution de zinc de concentration moyenne. Après plusieurs jours de contact, il a été transformé en une poudre verte cristalline formée de lamelles hexagonales; la solution contenait du cuivre.

En faisant varier la concentration des dissolutions, la quantité d'hydrate brun réagissant et la température de la réaction, le résultat a été toujours identique.

J'ai obtenu dans tous les cas, dans des dissolutions contenant des quantités de nitrate de zinc comprises entre 2^{mol} et $\frac{1}{6}$ de molécule par litre, la même poudre verte. L'analyse des divers échantillons recueillis dans ces solutions m'a donné pour 100 parties de matière :

	Trouvé.			Théorie pour
	I.	II.	III.	$(NO^3)^2Zn.3CuO.3H^2O$.
CuO..........	49,0	49,1	49,3	49,3
ZnO..........	17,0	16,7	16,9	16,8
N^2O^5..........	21,0	20,9	21,0	22,5

Ces nombres s'accordent complètement avec la formule

$$(NO^3)^2Zn.3CuO.3H^2O.$$

C'est donc à un nitrate basique mixte de zinc et de cuivre que l'on a affaire. Il répond au nitrate tétracuivrique $(NO^3)^2Cu.3CuO.3H^2O$, avec lequel il présente un isomorphisme complet. Il se présente, en effet, en lamelles clinorhombiques dans lesquelles l'angle des faces *m* est de 83°30′, toujours mélangées à d'autres lamelles hexagonales dérivant des premières par des troncatures sur *a*. On les voit souvent se grouper en étoiles; cette particularité n'est pas propre au nitrate mixte de zinc et de cuivre; elle est générale et appartient à presque tous les corps similaires obtenus avec les autres nitrates métalliques. L'examen de ces cristaux et de la grande majorité de ceux qui seront décrits ultérieurement est dû à mon collègue et ami P. Dop, agrégé préparateur. Je suis heureux de lui adresser ici tous mes remercîments.

Si l'on examine les solutions de nitrate de zinc où s'est produite la réaction, on constate qu'elles contiennent toutes du cuivre, et cette quantité dissoute est d'autant plus grande que la dissolution de nitrate est plus concentrée. Il résulte néanmoins, des divers dosages que j'ai effectués, que cette quantité n'augmente pas indéfiniment avec les transformations répétées d'hydrate tétracuivrique en nitrate basique. Il semble qu'il y ait une limite assez difficile à préciser.

L'hydrate bleu de Péligot a donné, avec une dissolution de nitrate de zinc soit à froid, soit à l'ébullition, un précipité amorphe de couleur bleu pâle. L'analyse montre qu'il est formé par du nitrate de zinc mélangé sans doute à de l'hydrate bleu non encore transformé; il est peu intéressant. La présence du cuivre dans la dissolution montre qu'il y a réellement déplacement de nitrate de zinc par l'oxyde de cuivre.

4° *Sulfate de zinc.* — D'après M. Recoura [1], de l'hydrate de cuivre mis en

---

[1] *Comptes rendus*, t. CXXXII, 1901, p. 1414.

contact avec une solution de sulfate de zinc et chauffé jusqu'à 70° donne une poudre vert bleuâtre pâle. Après quelques minutes d'ébullition, la liqueur n'a pas présenté de traces de cuivre; mais une certaine quantité de sulfate de zinc a été enlevée à la solution par l'hydrate de cuivre, et cette quantité n'a plus varié, quelle que fût la durée de l'ébullition. Le composé vert bleuâtre amorphe obtenu a la composition du sulfate basique mixte $SO^4Zn.3CuO + aq$. A la température ordinaire, après plusieurs heures, quelquefois après plusieurs jours de contact avec agitation continuelle, M. Recoura a obtenu le composé

$$24CuO.7SO^4Zn + aq.$$

sous forme d'une poudre amorphe bleu pâle.

Les résultats auxquels je suis arrivé par l'emploi de l'hydrate tétracuivrique sont complètement différents. Ayant placé à froid une petite quantité de cet hydrate dans une solution moyennement concentrée de sulfate de zinc (environ $\frac{1}{2}$ molécule de sulfate au litre), j'ai obtenu, après 7 à 8 jours de contact, une poudre bleue qui, sous le microscope, apparut constituée par de petits hexagones. L'examen de la liqueur y décela la présence du cuivre.

A cette solution ainsi modifiée par cette première réaction j'ai ajouté une nouvelle quantité d'hydrate tétracuivrique humide; au bout de plusieurs jours et à froid, il s'est transformé en une poudre verte formée par des lamelles quadrangulaires. Lavées à l'eau froide et séchées, elles ont présenté la composition d'un sulfate basique mixte de zinc et de cuivre, de formule

$$2SO^4Zn.3CuO.12H^2O.$$

L'analyse a, en effet, donné, pour 100 parties du composé :

	Trouvé.		
	I.	II.	Calculé.
CuO	30,4	31,0	30,7
ZnO..........	20,8	20,5	20,9
SO^3..........	20,8	20,5	20,6

A la liqueur provenant de cette deuxième réaction j'ai ajouté une troisième fois, puis une quatrième, puis une cinquième, une nouvelle quantité d'hydrate brun humide. Dans tous les cas, j'ai obtenu le même composé vert cristallisé en lamelles quadrangulaires et répondant au même sulfate basique mixte.

Des phénomènes de tous points parallèles se sont produits en plaçant le mélange dans un bain-marie de 70°; dans ce cas, la réaction a été beaucoup plus rapide, et il a suffi de quelques heures pour la totaliser.

Il résulte de cette expérience que deux composés de cristallisation, de couleur et de composition différentes (la suite de ce travail vérifiera cette dernière assertion), prennent naissance suivant que l'on fait réagir l'hydrate sur une solution de sulfate de zinc pure ou sur une solution modifiée par la présence de cuivre.

Pourquoi ces deux étapes? La présence de cuivre serait-elle donc nécessaire pour produire le sulfate pentamétallique $2SO^4Zn.3CuO.12H^2O$, ou bien la concentration de la solution intervient-elle pour modifier la réaction?

Envisageant cette dernière hypothèse, j'ai étudié la marche du phénomène produit par l'hydrate tétracuivrique sur des dissolutions de concentration très variables, comprises entre 3^{mol} et moins de $\frac{1}{30}$ de molécule de sulfate de zinc par litre. Les unes, les plus concentrées, ont été étudiées à froid et à une température de 80° à 90°; les autres, de concentration inférieure à $\frac{1}{2}$ de molécule par litre, ont été étudiées à chaud vers 80° à 90°.

Disons de suite que les résultats obtenus à froid et à chaud, pour les premières solutions, sont complètement parallèles, et, par suite, afin d'accélérer le phénomène, toutes les réactions peuvent être produites à chaud. Je me suis servi, à cet effet, d'un bain-marie chauffé à une température de 80° à 90° et dans lequel je plongeais les flacons où devait se faire la réaction. Je décrirai successivement les phénomènes que j'ai observés pour chaque solution.

Solution (1) *à* 3^{mol} *de sulfate de zinc par litre.* — A 100^{cm^3} d'une solution contenant 3^{mol} de sulfate par litre j'ai ajouté une quantité d'hydrate brun humide correspondant à environ $0^g,50$ de CuO. Après digestion dans un bain-marie à 50° pendant 8 à 10 minutes, cet hydrate s'est transformé en une poudre verte formée de prismes allongés appartenant au système quadratique et à biréfringence faible. L'analyse de ce corps m'a montré qu'il était constitué par un sulfate basique mixte de zinc et de cuivre, de formule

$$2SO^4Cu.3ZnO.12H^2O.$$

L'analyse a donné, pour 100 parties de matière :

	Trouvé.		
	I.	II.	Calculé.
CuO	21,0	20,8	20,4
ZnO..........	30,6	31,0	31,2
SO^3..........	21,0	20,8	20,6

Une portion de la solution a été analysée; cette analyse a montré que les 100^{cm^3} de sulfate de zinc ont dissous $0^g,16$ d'oxyde de cuivre.

Dans cette première étape, l'hydrate brun a donc déplacé une partie du sulfate de zinc à raison de 3^mol d'oxyde de zinc pour 1^mol de CuO. La réaction peut, dès lors, être exprimée par l'équation suivante :

$$3SO^4Zn + 3CuO + aq. = 2SO^4Cu.3ZnO.aq. + SO^4Cu,$$

ou bien encore

$$12SO^4Zn + 3Cu^4O^4.H^2O + aq. = 4(2SO^4Cu.3ZnO.aq.) + 4SO^4Cu + aq.$$

Elle exprime, ce qui est conforme à l'analyse, que $\frac{1}{3}$ de la quantité d'oxyde de cuivre est passé dans la dissolution.

Si, maintenant, on ajoute à la solution de sulfate de zinc, modifiée par la présence de cuivre, une nouvelle quantité d'hydrate brun humide, le résultat change. On obtient encore un composé vert formé de prismes quadratiques où l'analyse révèle une moins grande quantité d'oxyde de zinc et plus d'oxyde de cuivre que dans le sulfate $2SO^4Cu.3ZnO.12H^2O$.

L'analyse de deux échantillons a donné, pour 100 parties du composé :

	I.	II.
CuO	25,5	25,3
ZnO	25,2	25,0
SO^3	21,0	21,0

Si l'on fait la somme des deux oxydes CuO et ZnO $(25,5 + 25,2) = 50,7$, nous la trouvons sensiblement égale à $(21,0 + 30,6) = 51,6$, c'est-à-dire à la somme des oxydes du sulfate à 3^mol d'oxyde de zinc. Le composé correspondant à cette analyse pourrait être représenté par la formule

$$2SO^4Cu.2ZnO(\tfrac{1}{2}ZnO.\tfrac{1}{2}CuO).12H^2O,$$

dérivant du sulfate $2SO^4Cu.3ZnO.12H^2O$ par remplacement de $\frac{1}{2}$ molécule de ZnO par $\frac{1}{2}$ molécule de CuO.

Si l'on analyse une portion de la solution de sulfate de zinc, on constate que la quantité de cuivre dissoute y est plus grande qu'après la première réaction; elle a été, en effet, de $0^g,20$ dans un cas, de $0^g,25$ dans un deuxième, le tout rapporté à 100^{cm^3} de solution; l'hydrate tétracuivrique ajouté avait été sensiblement de 1^g de CuO. A cette solution j'ai ajouté une troisième fois, puis une quatrième, de nouvelles quantités variables d'hydrate brun. Le sel basique mixte formé dans chaque cas était isomorphe des précédents, mais non identique. L'analyse y révélait des quantités d'oxyde de cuivre toujours croissantes et des quantités d'oxyde de zinc décroissantes.

Finalement, après un nombre de réactions variables, j'obtenais une combinaison de composition toujours constante répondant au sulfate mixte

$$2SO^4Zn.3CuO.12H^2O.$$

L'analyse a montré que, pour 100 de matière, on avait toujours :

	Trouvé.		
	I.	II.	Calculé.
CuO	30,0	30,8	30,7
ZnO..........	20,2	20,6	20,9
SO^3..........	20,6	20,5	20,6

L'addition d'hydrate brun humide avait, dans ces diverses réactions, modifié légèrement la composition de la solution. A la fin, quand ce sulfate à 3CuO s'est produit, l'analyse m'a montré que la quantité de sulfate de zinc par litre n'était plus que de $750^{g},4$, soit un peu plus de 2^{mol}.

Solution (2) *à* 2^{mol} *de sulfate de zinc au litre.* — J'ai ajouté, à 100^{cm^3} d'une telle solution, une quantité d'hydrate brun correspondant approximativement à 1^{g} de CuO. Le mélange a été mis au bain-marie à 80°; il s'est produit, au bout de 10 minutes, une poudre verte formée de prismes du système quadratique; cette poudre, lavée à l'eau froide et séchée, a présenté la composition du sulfate basique mixte déjà trouvé plus haut

$$2SO^4Cu.3ZnO.12H^2O.$$

L'analyse a donné, pour 100 parties de matière :

	Trouvé.		
	I.	II.	Calculé.
CuO	20,2	20,4	20,4
ZnO..........	30,8	30,9	31,2
SO^3..........	20,0	20,2	20,6

La quantité de cuivre dissoute par les 100^{cm^3} de solution a été de $0^{g},25$ de CuO.

A cette liqueur de nouvelles additions d'hydrate tétracuivrique ont donné des combinaisons isomorphes de la précédente, où la somme des deux oxydes reste constante et égale à des nombres variant entre 50 et 51 pour 100. L'analyse du

composé obtenu après la deuxième addition d'hydrate brun m'a donné, pour 100 de matière :

	I.	II.
CuO	25,5	25,3
ZnO	25,0	24,2
SO^3	21,6	21,2

Après la troisième addition d'une quantité quelconque d'hydrate brun :

	I.	II.
CuO	27,0	27,0
ZnO	23,0	23,2
SO^3	21,6	21,5

Enfin, après une quatrième addition d'hydrate brun, j'ai obtenu le sulfate basique mixte

$$2SO^4Zn.3CuO.12H^2O.$$

En ce moment, l'analyse de la liqueur m'a montré qu'elle contenait encore $1^{mol},5$ de sulfate par litre.

Si, au lieu d'ajouter à des solutions de concentration supérieure à 1^{mol} de sulfate au litre une très petite quantité d'hydrate brun, on en fait réagir à la fois un grand excès (soit 3^g de CuO dans 100^{cm^3}), on obtient encore des lames quadratiques. Leur analyse donne, pour 100 parties de composé :

	I.	II.
CuO	26,3	26,1
ZnO	24,4	25,0
SO^3	21,3	21,0

La somme des oxydes CuO + ZnO est encore égale à 50,7 et 51,1. On a affaire, dans ce cas, à un mélange de composés isomorphes identique à ceux que fournissaient des additions successives, et en petite quantité, d'hydrate brun.

Solution (3) *à* 1^{mol} *de sulfate de zinc au litre.* — A deux échantillons de 100^{cm^3} d'une telle solution et à 100^{cm^3} d'une autre solution de concentration un peu inférieure j'ai ajouté une quantité d'hydrate brun correspondant à environ $0^g,30$ de CuO. Après 10 à 15 minutes de contact à 80° j'ai obtenu, dans les trois cas, une poudre bleue amorphe. Lavée à l'eau froide et séchée, elle a donné à l'analyse la composition suivante :

	I.	II.	III.
Quantité pour 100 de CuO...	34,0	33,8	33,0
» ZnO...	17,8	17,1	17,3
» SO^3....	18,1	18,0	17,5

nombres qui correspondraient approximativement à un composé de formule

$$SO^4Zn.2CuO.8H^2O.$$

Sur $0^g,30$ de CuO mis à réagir $0^g,08$ est entré en dissolution dans deux cas, et $0^g,10$ dans l'autre. Les quantités d'oxyde de zinc mises en liberté sous forme de sulfate ont été de $0^g,099$ dans une solution, de $0^g,110$ dans une autre.

A ces solutions ainsi modifiées par la présence d'une petite quantité de cuivre une nouvelle addition d'une petite quantité d'hydrate brun humide m'a donné, après 15 à 20 minutes de contact à 30°, une poudre verte formée de lamelles quadrangulaires répondant au sulfate basique mixte de formule

$$2SO^4Zn.3CuO.12H^2O.$$

L'analyse a donné pour 100 parties de composé :

	I.	II.
CuO................	31,2	31,0
ZnO................	20,1	20,1
SO^3................	20,0	19,83

De nouvelles additions d'hydrate tétracuivrique m'ont, avec ces solutions, conduit au même résultat. Après plusieurs réactions, j'ai calculé la quantité d'oxyde de cuivre dissoute; deux analyses m'ont fourni les nombres $0^g,091$ et $0^g,097$ pour l'une des solutions, les nombres $0^g,103$ et $0^g,11$ pour une autre, c'est-à-dire une quantité approximativement égale à celle qui avait été dissoute après la première addition des $0^g,30$ d'hydrate brun. Il résulte de là que la quantité d'oxyde de cuivre que peut dissoudre la solution de sulfate de zinc paraît limitée.

Un phénomène identique à celui que je viens de décrire se produit d'une façon régulière si, au lieu d'opérer à chaud, on effectue la réaction à froid. La vitesse de la transformation est simplement diminuée. Dans deux échantillons d'une solution de sulfate de zinc à une molécule au litre, une petite quantité d'hydrate brun s'est transformée au bout de 4 à 5 jours en un précipité bleu qui se présente sous forme de très petits globules cristallins et qui donne à l'analyse la composition suivante :

	Trouvé.	
	I.	II.
Quantité pour 100 de CuO......	35,0	34,22
» ZnO......	18,6	17,9
» SO^3.......	17	16,7

Ces nombres répondent approximativement au composé

$$SO^4Zn.2CuO.8H^2O,$$

c'est-à-dire au composé obtenu à chaud dans les mêmes conditions. Mais tandis que précédemment il constituait une poudre amorphe, dans le cas actuel, la réaction ayant été beaucoup plus lente, j'ai pu l'obtenir à l'état cristallisé.

La liqueur provenant de cette première transformation contient du cuivre. L'addition de nouvelles quantités d'hydrate brun y produit, après plusieurs jours de contact, une poudre verte constituée par des prismes quadratiques de formule

$$2SO^4Zn.3CuO.12H^2O.$$

Analyse.

	Trouvé.	
	I.	II.
CuO................	31	30,8
ZnO................	20,3	19,9
SO^3.................	20,7	20,4

A partir de ce moment, on obtient toujours ce même composé à froid quand on fait agir de nouvelles quantités d'hydrate brun.

Les phénomènes ne sont pas tout à fait identiques si l'on fait varier la quantité d'hydrate de cuivre du début. En ajoutant à 100^{cm^3} d'une solution de sulfate de zinc, contenant une molécule au litre, une quantité d'hydrate tétracuivrique humide correspondant à environ 2^g de CuO, j'ai obtenu, après quelques minutes de contact à 80°, un précipité vert constitué par des prismes quadratiques isomorphes des sels obtenus précédemment. L'analyse de ce composé a donné pour 100 parties de matière :

	I.	II.
CuO................	28,0	27,6
ZnO................	22,5	23,0
SO^3.................	21,3	21,7

En faisant la somme des quantités d'oxyde qu'il renferme (CuO + ZnO) on la

trouve égale à 50,5 et 50,6. Nous avons affaire, sans doute, dans ce cas à un mélange de corps isomorphes, identique à ceux que m'avaient fournis les solutions 1 et 2.

Après cette réaction, une addition nouvelle d'une quantité d'hydrate brun détermine la formation du composé $2SO^4Zn.3CuO.12H^2O$.

Il résulte de ces expériences que la production normale du composé pentamétallique $2SO^4Zn.3CuO.12H^2O$ exigerait la présence d'un peu de cuivre dans la dissolution. S'il en est ainsi, on doit pouvoir obtenir du premier coup ce sulfate basique en ajoutant de l'hydrate brun à une solution de sulfate de zinc à une molécule contenant un peu de sulfate de cuivre. L'expérience a vérifié mes prévisions. La présence du cuivre évite donc le passage par un sel intermédiaire.

Solution (4) *à $\frac{1}{2}$ molécule de sulfate de zinc au litre.* — J'ai pris trois échantillons de 100^{cm^3} d'une solution contenant $\frac{1}{2}$ molécule de sulfate au litre, et deux échantillons de 100^{cm^3} d'une solution contenant un peu moins de $\frac{1}{2}$ molécule (soit 130^g au litre). Par addition d'une petite quantité d'hydrate brun humide j'ai obtenu à froid après plusieurs jours, au bain-marie à 80° après 20 à 30 minutes, une poudre bleue constituée par de petits cristaux hexagonaux. L'analyse des différents précipités recueillis m'a donné pour 100 parties de matière :

	Trouvé.			Théorie pour
	I.	II.	III.	$SO^4Zn.2CuO.5H^2O$.
CuO	40,2	38,7	39,0	38,8
ZnO	20,0	20,5	19,6	20,0
SO^3	18,4	18,8	18,6	19,5

Ces nombres s'accordent suffisamment avec la formule

$$SO^4Zn.2CuO.5H^2O.$$

Les solutions provenant de cette première réaction contiennent du cuivre. Une addition nouvelle d'hydrate brun y détermine dans toutes un composé vert cristallisé en lames quadratiques auquel l'analyse a révélé la composition suivante :

	I.	II.
Quantité de CuO pour 100	31,2	31,1
» ZnO »	20,0	20,1
» SO^3 »	20,0	20,1

nombres s'accordant parfaitement avec le sulfate basique mixte

$$2SO^4Zn.3CuO.12H^2O.$$

A partir de ce moment, j'ai toujours obtenu ce même composé par des additions successives et souvent répétées d'hydrate brun.

Si, au lieu de faire réagir sur les solutions primitives à $\frac{1}{2}$ molécule une petite quantité d'hydrate tétracuivrique, on leur oppose une quantité correspondant à $1^g,50$ ou 2^g, on obtient du premier coup une poudre bleu vert qui, examinée au microscope, apparaît constituée par un mélange de petits hexagones et de lamelles quadrangulaires. Il est probable, dans ce cas, que les cristaux hexagonaux ont dû se former tout d'abord pendant qu'un peu de cuivre s'est dissous; à ce moment l'hydrate n'ayant pas encore réagi se trouve dans le milieu favorable à la production du sulfate pentamétallique, et il se transforme en ce dernier composé.

Solution (5) *à* $\frac{1}{3}$ *de molécule de sulfate de zinc au litre.* — Deux portions de $100^{cu.3}$ d'une telle solution ont été prélevées. Après 30 à 40 minutes de contact à 80°, une petite quantité d'hydrate brun s'est transformée dans ces solutions en une poudre bleu vert constituée dans un cas par de petites lamelles hexagonales mélangées à des lames quadrangulaires, dans un autre par de grosses lames hexagonales. Une troisième solution a fourni à froid, après plusieurs jours de contact, cette même poudre verte où l'on constate la présence de lamelles quadrangulaires et hexagonales. Le plus souvent, ce sont donc deux composés bien différents qui prennent naissance simultanément dans ces solutions. Celles-ci contiennent du cuivre après la réaction; de nouvelles quantités d'hydrate brun s'y transforment alors à froid et à chaud en prismes allongés appartenant au système quadratique, et répondant à la formule du sulfate basique mixte $2SO^4Zn.3CuO.12H^2O$. Cette expérience vérifie donc encore notre hypothèse première, à savoir que le composé pentamétallique ne peut prendre naissance que dans des solutions contenant déjà une petite quantité de cuivre.

Solution (6) *à* $\frac{1}{4}$ *de molécule de sulfate de zinc au litre.* — Dans de telles solutions, et dans des solutions contenant une quantité de sulfate comprise entre $\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{5}$ de molécule, l'hydrate brun en quantité faible ($0^g,40$ de CuO) s'est transformé à froid au bout de plusieurs jours, à 80° après 45 minutes, en une poudre vert bleu constituée par des lamelles hexagonales. Une quantité plus élevée d'hydrate (1^g à $1^g,50$ de CuO) a fourni un mélange de lamelles hexagonales et de prismes quadratiques. Après une première réaction, ces solutions, qui contiennent du cuivre, continuent à donner, par addition de nouvelles quantités d'hydrate tétracuivrique, un mélange de prismes hexagonaux et quadratiques. Dans un cas toutefois j'ai obtenu exclusivement ces derniers; mais généralement les deux espèces se produisent en même temps.

Solution (7) *à* $\frac{1}{5}$ *de molécule de sulfate de zinc au litre.* — Dans trois échan-

tillons d'une telle solution, l'hydrate brun a donné, après une heure de contact à 80°, une poudre vert bleu constituée par des lamelles hexagonales. Lavées à l'eau et séchées, maintenues pendant 24 heures à l'exsiccateur, elles ont présenté la composition suivante :

	Trouvé. I.	Trouvé. II.	Trouvé. III.	Théorie pour $SO^4Zn.3CuO.5H^2O$.
Quantité pour 100 de CuO....	48,7	48,2	47,8	48,5
» ZnO....	16,8	16,0	15,8	16,6
» SO^3.....	17,1	17	16,9	16,4

Ces nombres correspondent suffisamment au composé

$$SO^4Zn.3CuO.5H^2O;$$

c'est donc un composé bien différent de ceux que j'avais trouvés jusqu'ici.

Les trois solutions qui m'ont fourni ce sulfate mixte contiennent une petite quantité de cuivre dissoute. Je leur ai ajouté une nouvelle quantité d'hydrate brun; après 45 minutes à 1 heure de contact au bain-marie à 80°, j'ai obtenu dans deux solutions le même composé vert bleu constitué exclusivement par des lamelles hexagonales, dans la troisième un mélange d'hexagones et de prismes quadrangulaires. De nouvelles additions d'hydrate brun m'ont conduit tantôt à un mélange, tantôt à la production unique d'hexagones.

Des solutions contenant de $\frac{1}{5}$ à $\frac{1}{6}$ de molécule de sulfate au litre m'ont fourni des résultats similaires.

Solution (8) *contenant des quantités de sulfate de zinc inférieures à $\frac{1}{6}$ de molécule par litre.* — Dans de telles solutions l'hydrate tétracuivrique ne réagit pas à froid; la concentration n'est pas suffisante. Mais à une température de 80° à 90°, la réaction est facile. Lente avec les solutions très diluées, elle s'accélère au fur et à mesure que la teneur en sulfate de zinc croît. J'ai fait des solutions contenant les unes un peu moins de $\frac{1}{6}$ de molécule de sulfate de zinc par litre, d'autres dans lesquelles j'avais dissous $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{20}$, $\frac{1}{30}$ et un peu moins de $\frac{1}{30}$ de molécule de sulfate par litre. A toutes ces solutions j'ai ajouté des quantités variables d'hydrate tétracuivrique, tantôt peu ($0^g,30$ à $0^g,50$ de CuO), tantôt beaucoup (1^g à 2^g), et je les ai toutes placées dans un bain-marie à 80°-90°. Après 1 heure 30 minutes de contact pour la solution voisine de $\frac{1}{6}$ de molécule, après 12 heures pour la solution à $\frac{1}{30}$, la transformation totale de l'hydrate brun a été effectuée. Il s'est produit dans tous les cas une poudre vert bleu constituée exclusivement par de grosses lamelles hexagonales. Cette poudre a été recueillie et lavée à l'eau froide et dans chaque cas soumise à l'analyse après l'avoir fait

séjourner pendant 24 heures à l'exsiccateur. Les analyses m'ont fourni les résultats suivants :

		I.	II.
a. Solution à $\frac{1}{7}$ de molécule...	CuO pour 100..	47,9	48,2
	ZnO..........	16,7	16,75
	SO^3..........	17,0	17,1
b. Solution à $\frac{1}{8}$ de molécule...	CuO..........	48,1	47,8
	ZnO..........	16,4	16,5
	SO^3..........	16,8	16,9
c. Solution à $\frac{1}{10}$ de molécule...	CuO..........	49,0	48,6
	ZnO..........	16,1	16,85
	SO^3..........	17,0	16,67
d. Solution à $\frac{1}{20}$ de molécule...	CuO..........	48,0	48,3
	ZnO..........	16,4	16,7
	SO^3..........	16,7	16,6
e. Solution à $\frac{1}{35}$ de molécule...	CuO..........	47,8	48,1
	ZnO..........	16,5	16,45
	SO^3..........	16,6	16,71

Tous ces nombres s'accordent avec la formule

$$SO^4Zn.3CuO.5H^2O.$$

Théorie pour cette formule......	CuO.....	48,5
	ZnO.....	16,6
	SO^3.....	16,4

De toutes ces expériences il résulte que la simplicité d'action produite par l'hydrate tétracuivrique sur les solutions aqueuses des chlorure, bromure et azotate de zinc ne se retrouve pas pour les solutions de sulfate. Le phénomène complexe qui se produit dans ce dernier cas peut être divisé en quatre parties bien distinctes :

1° Dans une première série de dissolutions, comprises entre 1^{mol} et 3^{mol} de sulfate de zinc par litre, on obtient toujours un composé vert formé par des prismes allongés appartenant au prisme quadratique et à biréfringence faible. Ils sont constitués, soit par le sulfate basique mixte

$$2SO^4Cu.3ZnO.12H^2O,$$

soit par le composé

$$2SO^4Zn.3CuO.12H^2O,$$

soit par un mélange de ces deux sels isomorphes, où pour la même quantité de SO^3

(20,6 pour 100) on trouve toujours la même somme des oxydes CuO et ZnO, savoir : 51,0 à 51,6 pour 100.

Le sulfate mixte trizincique s'obtient très rapidement vers 50° dans une dissolution contenant 3^{mol} de sulfate de zinc au litre.

2° Dans une deuxième série de dissolutions de concentrations comprises entre zéro (moins de $\frac{1}{30}$ de molécule) et $\frac{1}{6}$ de molécule de sulfate au litre, on obtient, d'autant plus rapidement que la solution est plus sèche, un sel vert bleu formé par des lamelles hexagonales constamment éteintes, c'est-à-dire appartenant à un prisme hexagonal et parallèles à la face *p*. Ces cristaux sont positifs et ont une biréfringence faible. Ils constituent un sel basique tétramétallique de formule

$$SO^4Zn.3CuO.5H^2O.$$

3° Dans des dissolutions à concentration comprise entre 1^{mol} et $\frac{1}{4}$ de molécule de sulfate par litre, on obtient, selon la quantité d'hydrate tétracuivrique que l'on fait réagir, soit un composé bleu formé par de petits hexagones de formule

$$SO^4Zn.2CuO.5H^2O$$

(j'ai obtenu aussi un composé analogue ayant 8^{mol} d'eau), soit un mélange de ce composé et du corps

$$2SO^4Zn.3CuO.12H^2O,$$

formé de prismes allongés appartenant au système quadratique, à extinction longitudinale et allongement positif; leur biréfringence est faible; mais dès que les dissolutions contiennent une certaine quantité de cuivre, on obtient toujours et exclusivement le sel mixte

$$2SO^4Zn.3CuO.12H^2O.$$

Ce sel, qui tend constamment à se produire dans les dissolutions concentrées, est l'analogue des sulfates basiques mixtes obtenus à froid avec la plupart des autres métaux.

4° Dans des dissolutions contenant de $\frac{1}{4}$ à $\frac{1}{6}$ de molécule de sulfate, on obtient encore, à une température voisine de 80° et selon la quantité d'hydrate brun réagissant, soit exclusivement le sulfate tétramétallique

$$SO^4Zn.3CuO.5H^2O,$$

soit un mélange de ce corps et du sulfate pentamétallique

$$2SO^4Zn.3CuO.12H^2O.$$

Nous nous trouvons ici à la limite de formation de ces deux sels, et il suffit

d'un peu plus ou d'un peu moins de sulfate de zinc dans les dissolutions pour obtenir l'un ou l'autre de ces composés.

L'action de l'hydrate tétracuivrique sur les solutions de sulfate de zinc m'a donc fourni quatre sels basiques mixtes de cuivre et de zinc bien différents :

1° Les deux sulfates

$$2SO^4Zn.3CuO.12H^2O,$$
$$2SO^4Cu.3ZnO.12H^2O,$$

tous deux isomorphes; ils correspondent, à la quantité d'eau près, à un sulfate de cuivre pentamétallique signalé par M. Sabatier (1), de formule

$$2SO^4Cu.3CuO.5H^2O.$$

2° Le sulfate basique mixte

$$SO^4Zn.2CuO.5H^2O,$$

répondant à un sulfate basique de cuivre

$$SO^4Cu.2CuO.3H^2O.$$

3° Le sulfate basique mixte tétramétallique

$$SO^4Zn.3CuO.5H^2O,$$

correspondant au sulfate tétracuivrique

$$SO^4Cu.3CuO.5H^2O.$$

L'emploi de l'hydrate bleu de Péligot ne m'a jamais fourni une combinaison cristallisée quand je l'ai opposé à diverses solutions de sulfate de zinc; il déplace cependant une certaine quantité d'oxyde pendant qu'il passe lui-même en dissolution.

L'oxyde de cuivre noir, mis à bouillir plusieurs heures dans une solution de sulfate de zinc, s'y transforme en lamelles quadratiques qui constituent vraisemblablement le sulfate pentamétallique.

J'ai montré, dans tous les cas, contrairement à ce qu'avait annoncé M. Recoura, que l'on trouve du cuivre dans les dissolutions. On pourrait objecter que ce cuivre y est dissous par l'acidité toujours assez forte des solutions de sulfate de zinc, et que l'oxyde de cuivre ne déplace pas réellement une certaine quantité d'oxyde de zinc. L'expérience suivante prouve le contraire.

(1) *Comptes rendus*, t. CXXV, p. 101.

Si, à une solution très concentrée de sulfate de zinc (2^{mol} au litre) et par conséquent très acide, on ajoute peu à peu à chaud de l'hydrate brun, il se dissout réellement; mais quand la quantité dissoute est d'environ 1^{cg}, une nouvelle quantité d'hydrate produit des lamelles quadrangulaires, c'est-à-dire un sulfate basique mixte. Si l'on examine alors la dissolution par les procédés colorimétriques, on constate qu'elle contient un peu plus de cuivre que tout à l'heure, soit approximativement 3^{cg}. Il résulte de ce fait que, si une très petite quantité d'hydrate de cuivre est dissoute à la faveur de l'acidité du sel de zinc, cette quantité est relativement faible, et incomparablement inférieure à celle qui est dissoute après plusieurs réactions.

Si, au lieu de prendre une dissolution de sulfate de zinc très concentrée, on prend des dissolutions faibles, on ne peut pas faire dissoudre de suite des traces appréciables d'hydrate cuivrique; cependant, dans des solutions contenant $\frac{1}{7}$ de molécule j'ai trouvé jusqu'à $0^{g},06$ de CuO dissous dans 100^{cm^3}, après la production d'une certaine quantité de sel basique mixte. Cela ne peut se concilier qu'en admettant que cet hydrate se dissout en chassant une partie de l'oxyde de zinc. L'hydrate trétracuivrique et même l'hydrate bleu déplacent donc partiellement de l'oxyde de zinc sous forme de sulfate.

II. — Sels de nickel.

Nous allons retrouver pour les sels de nickel des phénomènes à peu près semblables à ceux qui nous ont été fournis par les sels de zinc. Les quelques divergences que nous rencontrerons ne se produiront qu'avec les dissolutions du sulfate de nickel.

1° *Chlorure de nickel*. — Dans une solution de chlorure de nickel de concentration quelconque, l'hydrate brun se change peu à peu, à froid, en une poudre vert pâle formée de cristaux microscopiques. Lavée et séchée, elle présente la composition d'un chlorure basique mixte de nickel et de cuivre

$$NiCl^2.3CuO.4H^2O,$$

dérivant du chlorure tétracuivrique par remplacement d'un atome de cuivre par un atome de nickel.

L'analyse a donné pour 100 parties de composé :

	Trouvé.		
	I.	II.	Calculé.
CuO	54,0	54,1	53,9
Ni	13,7	13,6	13,4
Cl	16,3	16,25	16,1

Ce même composé s'obtient presque instantanément dans une solution chaude de chlorure de nickel; il est alors amorphe, la transformation étant trop rapide.

L'hydrate bleu de Péligot donne à froid dans les solutions de chlorure de nickel un précipité amorphe de couleur verte. Après lavage et dessiccation à la température ordinaire, il a présenté la composition du chlorure basique mixte précédent.

2° *Bromure de nickel.* — Au sein d'une solution quelconque de bromure de nickel, l'hydrate brun donne très lentement à froid, plus rapidement vers 60°, un précipité vert cristallisé en lamelles quadrangulaires portant parfois des troncatures à leurs deux extrémités.

C'est un bromure mixte de nickel et de cuivre de formule

$$NiBr^2.3CuO.4H^2O.$$

Analyse.

	Trouvé.		
	I.	II.	Calculé.
Quantité de CuO pour 100...	46,0	45,8	45,2
» Ni » ...	11,8	11,5	11,2
» Br » ...	29,8	29,7	30,3

J'ai obtenu ce même composé avec une très grande facilité en faisant bouillir directement l'hydrate tétracuivrique dans une solution de bromure de nickel.

Il se présente alors sous forme d'une poudre verte constituée par des lamelles hexagonales allongées toujours groupées en étoiles à six branches, isomorphes du bromure mixte de zinc et de cuivre et correspondant comme lui au bromure tétracuivrique.

3° *Nitrate de nickel.* — Opposé à une solution de nitrate de nickel de concentration moyenne (environ $\frac{3}{4}$ de molécule au litre), l'hydrate brun se change en un sel basique mixte de couleur verte, constitué par des lamelles hexagonales dérivant d'un prisme monoclinique avec troncatures h_1, isomorphes du nitrate mixte zinco-cuprique, et se groupant encore en étoiles à six branches.

L'analyse de ce composé a donné pour 100 parties de matière :

	Trouvé.			Théorie pour
	I.	II.	III.	$(NO^3)^2Ni.3CuO.3H^2O$.
CuO............	49,6	49,4	49,6	50,0
NiO............	15,5	15,6	16,0	15,8
N^2O^5...........	21,4	21,4	21,3	22,7

Ces nombres correspondent au nitrate basique mixte de nickel et de cuivre

$$(NO^3)^2Ni.3CuO.3H^2O.$$

Il est encore isomorphe du nitrate tétracuivrique.

La production de ce nitrate est très lente à la température ordinaire, encore assez difficile vers 70° ou 80° dans des solutions peu concentrées. Au contraire, il se forme très facilement à cette température dans des solutions à 1^{mol} de nitrate de zinc par litre. Ce n'est qu'après une ébullition prolongée qu'on peut l'obtenir lorsqu'on fait bouillir directement l'hydrate brun dans une solution peu concentrée de nitrate de zinc.

4° *Sulfate de nickel.* — M. Recoura a obtenu, en faisant agir l'hydrate de cuivre sur les dissolutions de sulfate de nickel, deux sulfates mixtes : à chaud, le composé $16CuO.SO^4Ni$ sous forme d'une poudre amorphe bleu vert pâle, et, à froid, un corps bleu vif de formule $20CuO.SO^4Ni$. Pour ces sulfates mixtes, M. Recoura n'a pas calculé l'eau de combinaison.

L'emploi de l'hydrate tétracuivrique m'a conduit à des corps bien cristallisés. Je l'ai fait réagir sur des solutions de concentrations différentes et j'ai examiné dans chaque cas la marche du phénomène. L'action est ici beaucoup plus simple que dans le cas du sulfate de zinc.

Les solutions de sulfate de nickel n'ont pas pu être préparées dans un état de concentration aussi élevé que celles de sulfate de zinc, et j'ai employé seulement des solutions contenant moins de $1^{mol}\frac{1}{2}$ de sulfate au litre.

Solution (1) *à* 1^{mol} *de sulfate de nickel au litre.* — Dans deux solutions à 1^{mol} de sulfate, dans deux solutions à $1^{mol}\frac{1}{4}$ (350^g) de sulfate par litre, l'hydrate brun a fourni au bain-marie à 80°, au bout de quelques minutes, une poudre verte formée de lamelles hexagonales et de prismes clinorhombiques d'où dérivent les premières. Cette poudre, soigneusement lavée à l'eau froide et séchée, a donné à l'analyse la composition suivante :

	Trouvé.			Calculé pour
	I.	II.	III.	$2SO^4Ni.3CuO.12H^2O$.
Quantité de CuO pour 100...	31,0	31,5	31,0	31,2
» NiO » ...	19,5	19,45	20,2	19,6
» SO^3 » ...	20,7	20,6	21,0	20,9

Ces nombres répondent à la formule

$$2SO^4Ni.3CuO.12H^2O.$$

La solution de sulfate de nickel provenant de cette première réaction contient du cuivre. De nouvelles additions d'hydrate brun y produisent encore le même composé. A froid, la même réaction se produit, mais plus lentement. Il faut 10 à 12 jours avec agitation répétée pour transformer totalement une quantité relativement faible ($0^g,50$) d'hydrate tétracuivrique.

Solution (2) *à $\frac{1}{2}$ molécule de sulfate de nickel au litre.* — A une température de 80° à 90°, l'hydrate brun s'est transformé dans de telles solutions en une poudre verte constituée par des lamelles hexagonales à biréfringence faible. Elles sont de tout point identiques à celles obtenues dans la solution précédente et présentent comme elles la même composition.

Solution (3) *à $\frac{1}{3}$ de molécule de sulfate de nickel au litre.* — Dans deux portions d'une telle solution, et dans une solution voisine quoique sensiblement inférieure à $\frac{1}{2}$ molécule de sulfate au litre, une certaine quantité d'hydrate brun se transforme en une poudre verte qui, au microscope, apparaît formée par un mélange en quantité variable de prismes hexagonaux et de prismes quadrangulaires allongés. On a affaire, dans ce cas, à deux composés bien distincts qui prennent simultanément naissance dans ces solutions. Si l'on examine celles-ci, on y constate la présence de cuivre. L'addition de nouvelles quantités d'hydrate brun y produit le même résultat, c'est-à-dire un mélange de prismes hexagonaux et quadrangulaires.

Solution (4) *à $\frac{1}{4}$ de molécule de sulfate de nickel.* — Un phénomène de tous points comparable au précédent se produit par l'action de l'hydrate brun sur de telles solutions. On obtient dans chaque cas un mélange de composés.

Solution (5) *à $\frac{1}{5}$ et $\frac{1}{10}$ de molécule de sulfate de nickel au litre.* — Le phénomène change complètement si l'on oppose l'hydrate tétracuivrique à des solutions contenant de $\frac{1}{5}$ à $\frac{1}{10}$ de molécule de sulfate par litre. Au bout de 1 heure pour les premières, de 3 à 4 heures pour les secondes, on obtient au bain-marie, à 80°-90°, une poudre verte où le microscope montre des lamelles quadrangulaires souvent groupées en forme d'étoiles. Lavée et séchée, elle présente la composition d'un sulfate basique mixte de nickel et de cuivre, de formule

$$SO^4Ni.2CuO.6H^2O$$

répondant à un sulfate tricuivrique connu.

L'analyse a donné, en effet, pour 100 parties de matière :

	Trouvé.		
	I.	II.	Calculé.
CuO	36,8	37,0	37,5
NiO..........	18,6	18,5	17,8
SO^3..........	18,8	19,3	19,0

Si, aux solutions de sulfate de nickel contenant maintenant du cuivre dissous, on ajoute de nouvelles quantités d'hydrate brun, on obtient toujours ce même composé tricuivrique. L'action n'a pas lieu à froid.

Il résulte de ces différentes expériences que le phénomène se présente dans le cas du sulfate de nickel avec un grand degré de simplicité. Nous ne retrouvons plus, en effet, comme pour le sulfate de zinc, ces intermédiaires qui compliquaient la marche du phénomène; et la présence de cuivre primitivement dissous n'est plus nécessaire pour la production du composé pentamétallique.

On peut ici distinguer trois cas bien nets :

1° Dans une première série de dissolutions de concentrations supérieures à $\frac{1}{2}$ molécule de sulfate, on obtient toujours, soit à froid, soit à chaud, le composé pentamétallique

$$2SO^4Ni.3CuO.12H^2O,$$

sous forme de lamelles hexagonales ou de prismes clinorhombiques dans lesquels l'angle des faces *m* est voisin de 90°.

2° Dans une deuxième série de dissolutions de concentrations comprises entre $\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{10}$ de molécule, on obtient, sous forme de lamelles quadrangulaires allongées, le sulfate basique mixte

$$SO^4Ni.2CuO.6H^2O.$$

Au-dessous de la concentration $\frac{1}{10}$, je n'ai pas pu l'obtenir.

3° Dans des solutions intermédiaires à $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{4}$ de molécule, on obtient toujours un mélange des deux composés.

Tout se borne donc, dans l'action de l'hydrate tétracuivrique sur les solutions de sulfate de nickel, à la production de deux sels basiques mixtes.

En faisant bouillir directement de l'hydrate brun dans une solution de sulfate, j'ai pu obtenir le composé pentamétallique sous forme d'une poudre verte constituée par des tables losangiques.

L'hydrate bleu m'a donné à froid, dans une solution de concentration moyenne de sulfate de nickel, un précipité amorphe vert bleu répondant au sulfate basique mixte

$$2SO^4Ni.3CuO.12H^2O.$$

Analyse.

	Trouvé.		
	I.	II.	Calculé.
Quantité pour 100 de CuO....	30,0	30,2	31,2
» NiO.....	21,0	21,1	19,6
» SO^3.....	21,3	21,4	20,9

La solution provenant de la transformation contient du cuivre.

L'oxyde noir, bouilli pendant plusieurs heures dans une solution de sulfate de nickel, n'a subi aucun changement.

III. — Sels de cobalt.

Les solutions des différents sels de cobalt, opposées à l'hydrate tétracuivrique, présentent un parallélisme absolu avec celles des sels de nickel. J'ai retrouvé, dans tous les cas, des composés isomorphes des sels basiques mixtes de nickel et de cuivre.

1° *Chlorure de cobalt.* — En présence d'une solution assez peu concentrée de chlorure de cobalt, l'hydrate tétracuivrique se transforme peu à peu en une poudre verte cristalline constituée par de petits hexagones; elle a la composition d'un chlorure basique mixte de cuivre et de cobalt,

$$CoCl^2.3CuO.4H^2O.$$

L'analyse a donné, pour 100 parties de matière,

	Trouvé.		
	I.	II.	Calculé.
CuO	53,5	53,6	53,9
Co............	13,8	13,7	13,4
Cl............	16,0	16,1	16,1

Cette même poudre verte s'obtient très rapidement en faisant bouillir directement l'hydrate brun dans la solution de chlorure de cobalt. Si la concentration de la solution est assez grande ($\frac{3}{4}$ de molécule de chlorure au litre), il suffit de 2 à 3 minutes pour opérer la transformation totale, qui a lieu seulement à froid au bout de 4 à 5 jours.

L'hydrate de Péligot m'a fourni à froid une poudre verte amorphe. Après

l'avoir lavée et séchée à froid, l'analyse m'a donné la composition suivante, pour 100 parties :

	I.	II.
CuO	52,0	52,6
Cl	16,3	16,2
Co	13,5	13,5

Ces nombres correspondent exactement à la formule du chlorure basique mixte

$$CoCl^2.3CuO.4H^2O.$$

L'oxyde de cuivre noir bouilli dans une solution de chlorure de cobalt s'y est transformé incomplètement, après 1 à 2 heures d'ébullition, en un précipité vert gris cristallisé.

2° *Bromure de cobalt.* — A froid, après 2 à 3 heures de contact; au bain-marie à 60°, après 10 à 15 minutes, l'hydrate tétracuivrique encore humide a donné, dans une solution de concentration moyenne de bromure de cobalt (20^g dans 100^{cm^3} d'eau), un précipité vert gris, cristallisant en lamelles hexagonales allongées se groupant en élégantes étoiles à six branches, comme les bromures mixtes de nickel et de cuivre, et de zinc et de cuivre. Ce précipité a été lavé à l'eau froide pour le débarrasser de l'eau mère, et séché à froid. Il est constitué par un bromure basique mixte de cobalt et de cuivre, de formule

$$CoBr^2.3CuO.4H^2O.$$

L'analyse pour 100 de matière a fourni les résultats suivants :

	Trouvé.		
	I.	II.	Calculé.
CuO	45,8	45,3	45,2
Co	11,3	11,5	11,2
Br	30,1	30,1	30,3

On obtient un composé gris amorphe de même formule en faisant bouillir l'hydrate de Péligot dans une solution de bromure de cobalt.

3° *Azotate de cobalt.* — Les solutions de nitrate de cobalt agissent sur l'hydrate tétracuivrique à la façon des solutions des autres nitrates. Elles le transforment lentement à froid (plusieurs jours sont nécessaires pour effectuer la réaction totale), plus rapidement à une température de 80° à 90°, en une poudre

verte se présentant en lames hexagonales dérivant d'un prisme monoclinique et se groupant en étoiles à six branches, isomorphe des nitrates basiques obtenus précédemment avec le zinc et le nickel, et, par conséquent, isomorphe aussi du nitrate trétracuivrique. Il répond comme eux à la formule

$$(NO^3)^2Co.3CuO.3H^2O.$$

L'analyse a donné, pour 100 parties de composé :

	Trouvé.			
	I.	II.	III.	Calculé.
CuO	49,6	49,5	49,5	50,0
CoO	15,5	15,5	15,6	15,8
N^2O^5......	21,4	21,4	21,2	22,7

L'hydrate bleu, ajouté à une solution froide ou chaude de nitrate de cobalt, s'y transforme en un composé violacé apparaissant, au microscope, sous forme de petites étoiles. C'est un nitrate basique mixte de composition semblable à celle du précédent.

4° *Sulfate de cobalt.* — L'action de l'hydrate brun sur le sulfate de cobalt est complètement identique à celle qu'il exerce sur le sulfate de nickel, et tout ce que j'ai dit pour celui-ci pourrait être appliqué au sulfate de cobalt. Aussi, pour éviter des redites inutiles, je me bornerai à résumer rapidement les résultats obtenus. Mais, auparavant, je signalerai les deux sulfates basiques mixtes de cobalt et de cuivre obtenus par M. Recoura, par les méthodes qui l'ont conduit à la découverte de corps semblables : d'abord le sulfate $SO^4Co.3CuO + aq.$ amorphe vert pâle, puis le composé amorphe bleu $24CuO.SO^4Co$.

Comme dans le cas du sulfate de nickel, l'action de l'hydrate brun peut encore se diviser en trois cas bien distincts :

1° Dans des solutions comprises entre 1^{mol} et $\frac{1}{2}$ molécule de sulfate de cobalt par litre, l'hydrate brun encore humide se transforme, après plusieurs jours, à froid et grâce à des agitations répétées, après quelques minutes de contact dans un bain-marie à 80°, en un composé de couleur vert foncé constitué par de grosses lamelles hexagonales.

Elles répondent à la formule d'un sulfate basique mixte de cobalt et de cuivre

$$2SO^4Co.3CuO.12H^2O.$$

L'analyse a donné, pour 100 parties de matière :

	Trouvé.		
	I.	II.	Calculé.
CuO	31,8	31,6	31,5
CoO	18,0	17,7	18,3
SO^3..........	21,0	21,1	21,3

2° Dans des solutions de concentrations inférieures à $\frac{1}{2}$ molécule de sulfate de cobalt au litre, on obtient encore une poudre vert foncé; mais, si on l'examine au microscope, on constate qu'elle n'est pas homogène. Elle apparaît formée de lamelles hexagonales et de prismes quadratiques allongés; ceux-ci, peu nombreux dans des solutions de concentration voisine de $\frac{1}{2}$ molécule, peuvent parfois échapper à un examen microscopique trop rapide. Mais, dès que la dilution de la solution augmente, ils apparaissent de plus en plus nombreux, tandis que les prismes hexagonaux diminuent. Finalement, si l'on s'adresse à des solutions d'un peu moins de $\frac{1}{4}$ de molécule au litre, on obtient exclusivement des lamelles quadrangulaires.

3° Dans des solutions contenant un peu moins de $\frac{1}{4}$ de molécule de sulfate au litre, l'hydrate brun se transforme, après un temps relativement long (8 à 10 heures), à la température de 80° à 90°, en une poudre vert foncé formée exclusivement de prismes quadrangulaires allongés, à extinction longitudinale. L'analyse y révèle la composition suivante, pour 100 parties de matière :

	Trouvé.		Calculé pour
	I.	II.	$SO^4Co.2CuO.6H^2O$.
CuO	37,4	38,0	37,5
CoO..........	18,0	17,7	17,8
SO^3..........	20,0	20,2	19,0

Ces nombres s'accordent avec la formule d'un sulfate basique mixte de cobalt et de cuivre

$$SO^4Co.2CuO.6H^2O.$$

Ce composé se produit encore après un temps très long (30 heures) au bain-marie à 80°-90° sous forme de très longues lamelles quadrangulaires, dans des solutions contenant $6^g,50$ et $6^g,20$ d'oxyde de cobalt par litre, soit environ $\frac{1}{10}$ de molécule de sulfate. C'est dans cette dernière transformation que l'on pourrait chercher une légère divergence avec le sulfate de nickel; j'ai montré, en effet, qu'un sel basique isomorphe ne nécessitait pas plus de 3 heures pour se produire dans la solution à $\frac{1}{10}$ de molécule de sulfate de nickel, tandis qu'il faut dix fois plus de temps pour le produire avec les mêmes solutions de sulfate de cobalt.

Dans des solutions contenant $4^g,5$ de sulfate de cobalt, la réaction n'a plus lieu, même après 50 heures de contact à 90°.

En résumé, j'ai pu former, comme dans le cas du sulfate de nickel, deux composés basiques mixtes : le sulfate pentamétallique

$$2\,SO^4Co.3CuO.12H^2O,$$

isomorphe du sel de nickel correspondant, et le sulfate trimétallique

$$SO^4Co.2CuO.6H^2O,$$

présentant encore les mêmes caractères d'isomorphisme avec le sulfate mixte de nickel et de cuivre $SO^4Ni.2CuO.6H^2O$.

L'hydrate tétracuivrique, bouilli directement dans une solution de sulfate de cobalt, y produit un composé marron se présentant en tables hexagonales à biréfringence forte. C'est le sulfate basique mixte

$$2\,SO^4Co.3CuO.12H^2O.$$

Analyse.

	Trouvé.		
	I.	II.	Calculé.
Quantité pour 100 de CuO...	31,0	31,1	31,5
» CoO...	18,0	18,2	18,3
» SO^3....	21,2	21,2	21,3

Cette réaction se comprend facilement. Le sel basique trimétallique se forme très lentement, même à 90°; le sulfate pentamétallique exige encore 15 à 20 minutes pour prendre naissance. Il en résulte que, tant que la concentration du sulfate sera trop faible, rien ne se produira, mais dès qu'elle sera d'au moins $\frac{1}{2}$ molécule au litre, ce sera le sel pentamétallique qui seul prendra naissance.

L'hydrate bleu donne, à froid, avec les solutions de sulfate de cobalt, un précipité amorphe violacé contenant du sulfate de cobalt; l'oxyde noir ne donne aucun résultat, même après plusieurs heures d'ébullition.

Quelle que soit la concentration des solutions, toutes contiennent du cuivre après la réaction. Il y a donc eu réellement un déplacement.

IV. — Sels de manganèse.

Si nous avons trouvé jusqu'à présent des analogies très étendues dans l'action de l'hydrate tétracuivrique sur les solutions des sels étudiés précédemment, nous ne les retrouvons plus dans l'action exercée par cet hydrate sur les sels de manganèse.

1° *Chlorure de manganèse.* — M. André ayant maintenu quelque temps à l'ébullition, en présence d'hydrate cuivrique, une solution concentrée de chlorure manganeux, a obtenu une poudre vert foncé présentant la composition d'un chlorure basique mixte $MnCl^2.3CuO.3H^2O$.

J'ai ajouté, à une solution de concentration moyenne de chlorure de manganèse, de l'hydrate tétracuivrique encore humide. Au bout de 4 à 5 jours, à la température ordinaire et après quelques agitations, il a été totalement transformé en une poudre verte apparaissant au microscope sous forme de petits hexagones. Lavée à l'eau froide et séchée, elle présente la composition suivante :

	Trouvé.		Théorie pour
	I.	II.	$MnCl^2.3CuO.4H^2O$.
Quantité pour 100 de CuO...	54,0	53,8	54,4
» Mn.....	12,8	12,9	12,6
» Cl.....	17,0	16,9	16,3

Ces nombres correspondent à un chlorure basique mixte de manganèse et de cuivre

$$MnCl^2.3CuO.4H^2O.$$

Si, au lieu d'opérer la réaction à froid, on fait bouillir l'hydrate brun dans une solution de chlorure manganeux, le même sel basique se produit après 4 à 5 minutes de contact.

L'hydrate de Péligot se change à froid, au sein d'une solution de chlorure de manganèse, en une poudre verte amorphe; c'est encore un chlorure basique mixte de même formule que le précédent.

2° *Nitrate de manganèse.* — L'hydrate tétracuivrique à froid, après un temps très long ou par une ébullition prolongée au contact d'une dissolution de concentration quelconque de nitrate de manganèse, ne donne généralement aucune réaction. Dans un seul cas, et à froid, j'ai pu obtenir, après 3 mois de contact, une poudre verte formée de lamelles hexagonales groupées deux par deux. Mais jamais la transformation totale de l'hydrate de cuivre n'a pu s'effectuer. Il y a sans doute une limite qu'il est impossible de dépasser. Les cristaux verts recueillis et soigneusement débarrassés, par des lévigations répétées à l'eau froide, de l'hydrate brun non transformé, ont présenté à l'analyse la composition d'un nitrate basique mixte de manganèse et de cuivre, de formule

$$(NO^3)^2Mn.3CuO.3H^2O.$$

Analyse.

	Trouvé.		
	I.	II.	Calculé.
CuO	49,8	49,6	50,4
MnO	15,8	15,7	15,1
N^2O^5	21,3	21,0	22,9

J'ai essayé de faire varier la concentration des dissolutions d'azotate de manganèse, les quantités d'hydrate brun et la température; je n'ai pu, en aucun cas, obtenir de nouveau le même composé.

L'hydrate bleu, qui, dans tous les cas étudiés jusqu'ici (le nitrate de cobalt excepté), m'avait conduit à une combinaison amorphe, m'a fourni, avec le nitrate de manganèse, une combinaison bien cristallisée, par conséquent bien définie.

A froid, la réaction est lente et donne un précipité amorphe; mais, si l'on fait bouillir pendant quelques minutes de l'hydrate bleu dans une solution assez concentrée (1^{mol} au litre) de nitrate de manganèse, il se transforme en une poudre verte se présentant sous le microscope en aiguilles groupées ou en petites lamelles. Cette poudre, soigneusement lavée pour lui enlever toute trace de nitrate de manganèse qu'elle retient, et séchée à froid, contient, sur 100 parties :

	I.	II.
CuO	50,5	50,0
MnO	15,5	15,6
N^2O^5	21,6	21,4

Ces nombres s'accordent parfaitement avec le nitrate basique mixte

$$(NO^3)^2Mn.3CuO.3H^2O.$$

Cette circonstance heureuse de pouvoir obtenir un composé cristallisé avec l'hydrate bleu vient combler la lacune produite par l'inaptitude à la réaction qu'a présentée l'hydrate brun.

3° *Sulfate de manganèse.* — L'inactivité des hydrates de cuivre vis-à-vis des solutions aqueuses de sulfate de manganèse se retrouve au même degré que vis-à-vis des solutions de nitrate.

M. Recoura a pu obtenir, par action de l'hydrate de cuivre à froid sur une solution d'un tel sel, une poudre verte amorphe, de formule $24CuO.SO^4Mn$, et, à l'ébullition, un corps vert gris également amorphe répondant au sulfate basique mixte $3CuO.SO^4Mn$.

En partant des deux hydrates bien définis qui m'ont servi dans tous ces déplacements, j'ai essayé de reproduire, pour le sulfate de manganèse, les phénomènes si nets que m'avaient fourni et la variation de concentration des solutions, et la variation de température. Je n'ai obtenu aucun résultat.

L'hydrate brun que j'ai opposé à froid pendant 5 mois à plusieurs solutions de sulfate de manganèse n'a été nullement modifié. En faisant bouillir le mélange pendant 1 à 2 heures, je n'ai pas aperçu de trace de réaction.

L'hydrate bleu, bouilli pendant quelques minutes avec une solution de sulfate de manganèse, se transforme en une poudre verte. Examinée au microscope, elle apparaît sous forme de grains excessivement ténus où il est difficile de distinguer la moindre trace de cristallisation. Je la considère donc comme amorphe. Après l'avoir lavée à l'eau froide et séchée, elle a fourni à l'analyse les résultats suivants :

	I.	II.	Théorie pour $SO^4Mn.2CuO.3H^2O$.
CuO pour 100.	44,0	44,6	43,5
MnO	18,5	18,7	19,5
SO^3	21,4	21,3	22,0

Ces nombres s'accordent sensiblement avec la formule

$$SO^4Mn.2CuO.3H^2O,$$

répondant au sulfate tricuivrique.

L'examen de la solution de sulfate de manganèse y décèle du cuivre.

Je me suis demandé s'il ne fallait pas attribuer l'action négative exercée par les hydrates de cuivre sur les sels de manganèse à la faiblesse de ces bases, et j'ai été amené à faire agir l'hydrate de manganèse, ou plutôt le carbonate, sur les différents sels de cuivre. L'hydrate manganeux est peu stable; son oxydabilité est telle qu'il est difficile de le préparer à l'état de corps bien défini. Il n'en est pas de même du carbonate manganeux, qui se présente avec un degré de stabilité très grand. L'action identique (que je décrirai dans la troisième Partie) exercée par le carbonate et l'hydrate de nickel sur les sels de cuivre permet de penser que les résultats fournis par le carbonate et l'oxyde de manganèse doivent être identiques.

J'ai donc opposé à froid du carbonate de manganèse à des dissolutions de concentration variable de chlorure, bromure, nitrate et sulfate de cuivre. Après quelques jours et par des agitations renouvelées, tout le carbonate a été décomposé avec mise en liberté d'anhydride carbonique, qui se dégage, et l'oxyde de manganèse passe en dissolution. Il se produit en même temps un précipité variant du bleu au vert et qui est constitué par les chlorure, bromure, nitrate et azotate tétracuivrique.

Le chlorure se présente en poudre amorphe; le bromure, sous forme de petits hexagones de couleur verte; le nitrate constitue une poudre bleu vert se présentant en lamelles hexagonales et rhombiques, et le sulfate sous forme de petites aiguilles.

Si la quantité de carbonate de manganèse a été suffisante, tout le cuivre est déplacé de la solution.

Il semblerait résulter de cette expérience que l'hydrate de manganèse est plus fort que l'hydrate de cuivre, et que c'est à cette propriété qu'il doit d'empêcher la formation des sels basiques mixtes de cuivre et de manganèse, par action des hydrates cuivriques sur les solutions des sels de manganèse. Mais je montrerai plus loin que l'hydrate de nickel et le carbonate jouissent de propriétés identiques au carbonate de manganèse vis-à-vis des solutions des sels de cuivre, c'est-à-dire qu'ils en déplacent totalement le cuivre sous forme de sel basique tétracuivrique. Et pourtant l'hydrate brun agissant sur les sels de nickel donne des sels basiques mixtes.

Invoquer la force d'un hydrate par rapport à un autre ne résout donc pas le problème.

V. — Sels de cadmium.

Avec les sels de cadmium on rentre de nouveau dans les actions normales exercées par l'hydrate tétracuivrique, c'est-à-dire dans la formation de sels basiques mixtes tous bien cristallisés.

1° *Chlorure de cadmium.* — Dans une solution assez concentrée de chlorure de cadmium (environ $\frac{1}{2}$ molécule au litre), l'hydrate brun s'est transformé peu à peu à froid en une poudre verte qui se présente au microscope sous la forme de petits hexagones. La transformation d'une petite quantité d'hydrate n'est totale qu'au bout de plusieurs jours.

Le composé obtenu est un chlorure basique mixte de cadmium et de cuivre, de formule

$$CdCl^2.3CuO.3H^2O.$$

L'analyse a donné pour 100 parties de matière :

	Trouvé.			
	I.	II.	III.	Calculé.
CuO........	49,0	48,8	48,7	50,0
Cd.........	24,0	23,5	24,0	24,0
Cl..........	15,0	15,0	14,6	14,9

J'ai obtenu ce même composé très rapidement en faisant bouillir l'hydrate brun dans une solution de chlorure de cadmium ; 20 à 30 minutes de contact ont généralement suffi pour transformer une petite quantité d'hydrate.

L'hydrate de Péligot a donné un déplacement d'une certaine quantité d'oxyde de cadmium, mais le composé amorphe est peu intéressant.

2° *Bromure de cadmium.* — Les solutions de bromure de cadmium présentent des réactions de tous points comparables à celles du chlorure, lorsqu'on les oppose à l'hydrate tétracuivrique. Toutefois, l'action est beaucoup plus lente et, pour se produire, elle exige des solutions très concentrées (environ 1^mol à $\frac{3}{4}$ de molécule au litre). Dans ces conditions, j'ai pu obtenir à froid, après 30 à 40 jours de contact et par des agitations souvent répétées, une poudre verte cristalline formée de tout petits hexagones isomorphes de ceux que m'a donnés le chlorure. Ils correspondent à un bromure basique mixte de cadmium et de cuivre, de constitution identique à celle du chlorure :

$$CdBr^2.3CuO.3H^2O.$$

J'ai trouvé pour 100 parties de sel :

	I.	II.	Calculé.
CuO	41,0	40,8	42,0
Cd...........	21,0	20,6	19,8
Br...........	27,6	27,9	28,4

Si l'on essaie de produire la réaction à chaud, on constate qu'elle s'opère encore avec une extrême lenteur. Une heure d'ébullition a été nécessaire pour transformer totalement environ 2^g d'hydrate cuivrique dans la solution concentrée de bromure. Après séparation du précipité, cette dernière contenait du cuivre. Il y a donc eu déplacement de bromure de cadmium, à raison de 1^mol pour 3^mol de CuO.

3° *Nitrate de cadmium.* — A deux solutions de concentration moyenne de nitrate de cadmium j'ai ajouté une petite quantité d'hydrate brun encore humide. A froid, après plusieurs jours et par des agitations renouvelées, il s'est transformé en une poudre verte constituée par des lamelles hexagonales dérivant d'un prisme hexagonal et parallèles à la face *p*, à biréfringence faible. C'est un nitrate basique mixte de cuivre et de cadmium

$$(NO^3)^2Cd.3CuO.5H^2O.$$

L'analyse a donné pour 100 parties :

	Trouvé.		
	I.	II.	Calculé.
CuO.........	42,0	41,6	42,0
CdO..........	22,4	22,0	22,7
N^2O^5.........	18,5	18,3	19,1

J'ai effectué la réaction au bain-marie à 80°; dans ces conditions, 1 ou 2 heures suffisent généralement pour transformer $1^g,50$ à $2^g,50$ d'hydrate brun.

Par ébullition directe de l'hydrate dans la solution de nitrate, on arrive au même résultat. Dans tous les cas, on trouve du cuivre dans la solution.

4° *Sulfate de cadmium.* — Par l'action de l'hydrate de cuivre sur les solutions de sulfate de cadmium, M. Recoura a obtenu deux composés amorphes $SO^4Cd.3CuO$ et $20CuO.6SO^4Cd$.

L'hydrate tétracuivrique réagit très simplement sur les solutions de sulfate de cadmium. Dans des solutions contenant $\frac{2}{3}$ de molécule de sulfate de cadmium par litre, soit 28^g dans 150^{cm^3} d'eau, l'hydrate brun s'est transformé au bout de 1 heure en une poudre verte constituée par de grosses lamelles hexagonales et des lamelles octogonales dérivant toutes d'un prisme orthorhombique.

L'analyse a montré que, pour 100 parties, on trouve :

	I.	II.	Théorie pour $2SO^4Cd.3CuO.8H^2O$.
CuO.........	30,0	30,4	31,1
CdO..........	33,8	34,1	33,6
SO^3..........	21,1	20,8	21,0

Ces nombres répondent à la formule

$$2SO^4Cd.3CuO.8H^2O.$$

C'est donc un sulfate basique mixte de cadmium et de cuivre différent des autres sulfates mixtes analogues par la quantité d'eau de cristallisation.

J'ai essayé de faire varier la concentration des solutions de sulfate de cadmium et, à cet effet, j'ai fait réagir une quantité indéterminée (variant de $0^g,50$ à $1^g,50$ de CuO) d'hydrate tétracuivrique dans des solutions contenant $\frac{1}{2}$ molécule (14^g dans 100^{cm^3} H^2O), $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ et $\frac{1}{10}$ de molécule de sulfate par litre. Au bout d'un temps plus ou moins long, variant de 1 à 5 heures, j'ai obtenu à la température de 80°-90° la même poudre verte que précédemment; elle se présente encore sous forme de tables hexagonales dérivées du prisme orthorhombique profondément entaillé sur les faces *h*.

L'analyse des divers échantillons recueillis montre qu'ils constituent le sulfate basique mixte de cadmium et de cuivre trouvé plus haut.

Au-dessous de $\frac{1}{10}$ de molécule, la réaction n'a plus lieu qu'avec une très grande difficulté.

A froid, après plusieurs jours de contact et dans une solution très concentrée contenant au moins $\frac{1}{2}$ molécule de sulfate de cadmium par litre, l'hydrate brun se transforme en une poudre verte formée de lamelles hexagonales identiques à celles que j'ai obtenues à froid.

Contrairement aux sulfates métalliques déjà étudiés, le sulfate de cadmium ne donne plus qu'un seul sulfate mixte lorsque l'on oppose ses solutions à l'hydrate brun.

Après la réaction, toutes les solutions de sulfate contiennent du cuivre.

VI. — Sels de mercure.

1° *Chlorure et bromure de mercure.* — J'ai montré dans la première Partie que, lorsque l'on oppose de l'oxyde mercurique à une solution de chlorure de cuivre, il s'y change en une poudre bleue amorphe constituée par le chlorure tétracuivrique $CuCl^2.3CuO.4H^2O$. Dans une solution de bromure de cuivre, j'ai obtenu, au contraire, un composé vert cristallisé en lames quadrangulaires; c'est un bromure basique mixte $2HgBr^2.CuBr^2.3CuO.H^2O$. J'avais pensé qu'en opposant les hydrates de cuivre à des solutions de chlorure et bromure mercuriques j'arriverais au même résultat. Or, l'hydrate tétracuivrique et l'oxyde noir n'exercent aucune action ni à froid, ni à chaud, sur les dissolutions de sublimé ou de bromure de mercure; même bouilli dans ces solutions, il n'y subit aucune transformation. L'hydrate de Péligot ne subit non plus aucun changement à froid au contact d'une dissolution de bichlorure, mais en le faisant bouillir dans cette solution il s'y transforme très rapidement en une poudre verte amorphe qui est indécomposable par l'eau.

L'analyse a donné pour 100 parties :

	Trouvé.		Calculé pour
	I.	II.	$HgCl^2.CuCl^2.7CuO.2H^2O$.
Hg...........	20,0	20,3	20,1
CuO..........	63,0	63,3	63,7
Cl............	13,8	13,6	13,2

Ces nombres s'accordent avec la formule

$$HgCl^2.CuCl^2.7CuO.2H^2O.$$

C'est donc un chlorure basique mixte de cuivre et de mercure que je n'avais pu obtenir par action directe de l'oxyde de mercure sur les solutions de chlorure cuivrique.

Le bromure mercurique bouilli de même avec l'hydrate bleu n'a produit aucune transformation.

2° *Nitrate mercurique.* — Dans les solutions de nitrate mercurique les hydrates de cuivre se comportent d'une manière spéciale.

L'hydrate brun ajouté à froid à une dissolution de ce nitrate s'y dissout d'abord jusqu'à refus, puis en précipite une poudre grise cristallisée. Elle est formée, en effet, de lamelles clinorhombiques mêlées souvent à des prismes hexagonaux tronqués sur a, très biréfringents, à allongement positif et s'éteignant à 45°. La couleur grise des cristaux est due à des traces d'hydrate brun qui les souille. Ce corps a la composition d'un nitrate basique de mercure déjà connu, que j'ai obtenu encore précédemment (Chap. I) par l'action à froid de l'oxyde mercurique sur les dissolutions de nitrate ferrique.

Il répond à la formule

$$(NO^3)^2Hg.HgO.H^2O.$$

L'analyse a donné pour 100 parties du composé :

	Trouvé.		
	I.	II.	Calculé.
Hg..........	71,9	72,0	71,7
$(NO^3)^2$.......	21,2	21,0	22,2

L'hydrate bleu ajouté à froid à une dissolution de nitrate mercurique produit ce même nitrate basique sous forme d'une poudre blanche cristallisée en lamelles clinorhombiques mêlées encore à des prismes hexagonaux.

Dans tous les cas, le mercure est totalement déplacé et le cuivre passe en dissolution.

L'action des hydrates de cuivre ne conduit donc plus ici à la formation d'un nitrate basique mixte; il y a production d'un sel basique simple avec déplacement total de l'oxyde de la dissolution. Ce phénomène rentre dans le troisième type des déplacements d'oxydes, dont la classification a été donnée par M. P. Sabatier [1].

3° *Sulfate mercurique.* — C'est encore une action identique à la précédente

[1] *Comptes rendus*, t. CXXXII, 24 juin 1901.

que produisent les hydrates cuivriques sur les dissolutions de sulfate mercurique. A froid, les hydrates brun et bleu déplacent totalement le mercure des solutions de sulfate sous forme d'une poudre amorphe jaune qui a la composition du turbith minéral.

L'analyse y révèle pour 100 parties :

	Trouvé.		
	I.	II.	Calculé.
HgO	88,7	88,6	89,0
SO^3	11,1	11,3	10,9

Ces nombres correspondent à la formule

$$SO^4Hg.2HgO.$$

VII. — Sels de plomb.

1° *Chlorure de plomb.* — Au contact d'une dissolution saturée à froid de chlorure de plomb, l'hydrate tétracuivrique se change en une poudre blanche légèrement grisâtre. L'action est lente et ne se produit qu'au bout de 2 à 3 jours. Si l'on examine cette poudre au microscope, on constate qu'elle est formée de lamelles hexagonales ou rhombes, constituant un oxychlorure de plomb de formule

$$PbCl^2.PbO.H^2O.$$

L'analyse a donné, pour 100 parties :

	Trouvé.		
	I.	II.	Calculé.
Pb	75,0	75,3	76,4
Cl	13,8	13,7	13,1

L'examen de la dissolution de chlorure de plomb montre qu'elle contient du cuivre ; il y a donc eu déplacement d'oxychlorure de plomb par l'hydrate de cuivre brun.

En faisant bouillir l'hydrate bleu de Péligot dans une solution de chlorure de plomb, j'ai obtenu encore une poudre blanche amorphe légèrement colorée en bleu et formée encore par un oxychlorure de plomb.

2° *Nitrate de plomb.* — L'action des hydrates de cuivre sur le nitrate de

plomb présente une grande analogie avec celles qu'ils exercent sur le nitrate de mercure.

Dans une solution d'azotate de plomb, l'hydrate brun ajouté en petite quantité s'y transforme lentement en un précipité gris cristallisé en lamelles clinorhombiques et parfois en prismes tronqués sur a, isomorphes du nitrate basique de mercure décrit plus haut. L'analyse montre d'ailleurs qu'il répond à une formule semblable,

$$(NO^3)^2Pb.PbO.H^2O.$$

	Trouvé. I.	Trouvé. II.	Calculé.
PbO	78	77,8	78,1

L'hydrate bleu fournit ce même composé lorsqu'on l'oppose à froid à une solution de nitrate de plomb. Tout le cuivre passe dans la liqueur.

VIII. — Sels divers.

Je grouperai dans ce paragraphe l'action qu'exercent les hydrates de cuivre sur les dissolutions aqueuses d'un certain nombre de sels métalliques. Cette action est trop peu importante pour qu'elle fasse l'objet d'un paragraphe spécial pour chaque composé.

J'étudierai d'abord les réactions obtenues : 1° avec les sulfates d'aluminium et de chrome; 2° avec les nitrates d'aluminium, de bismuth et d'uranium.

1° *Sulfate d'aluminium.* — L'hydrate brun et l'hydrate bleu ajoutés peu à peu à froid à une solution de sulfate d'alumine y déplacent totalement de l'hydrate d'alumine sous forme d'un précipité blanc gélatineux, pendant qu'ils passent dans la dissolution. Si la quantité d'hydrate cuivrique ajoutée est supérieure à la quantité qui est nécessaire pour déplacer toute l'alumine, on trouve, au bout d'un certain temps, avec l'hydrate brun, un mélange de sulfate tétracuivrique caractérisé par ses aiguilles, et d'hydrate d'aluminium.

2° *Sulfate de chrome.* — La réaction est parallèle à la précédente. L'hydrate brun et l'hydrate bleu réagissent très lentement à froid sur les dissolutions de sulfate chromique. Mais, dans un bain-marie à 70°, les hydrates déplacent totalement le chrome de la dissolution, sous forme d'une poudre verte amorphe, qui est constituée par de l'hydrate chromique, et tout le cuivre entre en dissolution.

3° *Nitrate d'aluminium.* — Les deux hydrates de cuivre déplacent encore

toute l'alumine du nitrate, sous forme d'un précipité blanc gélatineux très difficile à laver. Tout le cuivre passe en dissolution.

4° *Nitrate de bismuth.* — A froid, dans une dissolution de nitrate de bismuth, l'hydrate brun se dissout, puis précipite une poudre blanche amorphe qui, lavée à l'eau froide et séchée, présente la composition du sous-nitrate de bismuth,

$$(NO^3)BiO.H^2O.$$

L'analyse a en effet donné, pour 100 parties de nitrate :

	Trouvé.		
	I.	II.	Calculé.
Bi^2O^3	77,6	77,2	76,3

L'hydrate bleu produit le même phénomène.

5° *Nitrate d'uranium.* — Dans une dissolution de concentration moyenne de nitrate d'urane, l'hydrate bleu de Péligot se dissout jusqu'à refus, puis en précipite une poudre jaune cristalline indécomposable par l'eau et pouvant être facilement lavée. Examinée au microscope, elle se présente sous forme de petits hexagones.

L'analyse de ce composé m'a donné, pour 100 parties :

	I.	II.
UO^2................	88	87,8

nombres correspondant à l'hydrate uranique, de formule

$$UO^2(OH)^2,$$

décrit antérieurement par MM. Riban et Aloy.

L'hydrate brun produit le même composé. Dans tous les cas, tout l'uranium est déplacé par le cuivre.

Comparaison des résultats obtenus avec les hydrates cuivriques.

En résumé, l'hydrate tétracuivrique donne presque toujours, quand on l'oppose à une solution aqueuse d'un sel métallique, un sel basique mixte ou un sel basique simple cristallisé. L'hydrate bleu de Péligot donne rarement un composé cristallisé.

Tous deux agissent sur les dissolutions en déplaçant réellement une partie ou la totalité de l'hydrate du sel, pendant qu'ils passent partiellement ou totalement en dissolution.

Si l'on examine les formules des sels basiques mixtes obtenus, on constate qu'ils répondent tous à un sel basique de cuivre déjà connu, par le remplacement d'un ou plusieurs atomes de cuivre par un autre métal.

Ainsi les chlorures basiques mixtes correspondent au chlorure tétracuivrique

$$CuCl^2.3CuO.3H^2O,$$

les bromures au bromure tétracuivrique

$$CuBr^2.3CuO.3H^2O,$$

par remplacement d'un atome de cuivre par un atome de Zn, Ni, Co, Mn, etc.

Les sulfates basiques mixtes correspondent aux trois sulfates basiques de cuivre :

$$2SO^4Cu.3CuO.5H^2O,$$

$$SO^4Cu.3CuO.5H^2O,$$

$$SO^4Cu.2CuO.3H^2O.$$

Enfin, les azotates basiques mixtes dérivent du nitrate tétracuivrique

$$(NO^3)^2Cu.3CuO.3H^2O,$$

avec lequel ils présentent d'ailleurs un isomorphisme très étendu.

Ces sels basiques mixtes possèdent d'ailleurs des propriétés générales identiques.

Ils sont tous, à une ou deux exceptions près, cristallisés, d'une couleur variant du vert clair au vert sombre, indécomposables par l'eau, ce qui permet leur lavage facile. Ils sont insolubles dans l'eau au même titre que les sels basiques simples, mais solubles dans les acides très étendus. Chauffés entre 100° et 150° à l'étuve, ils perdent une partie de leur eau de cristallisation, et il faut porter la température vers 250° pour l'enlever complètement à certains composés. Enfin, beaucoup de ces sels mixtes présentent entre eux de grandes analogies d'isomorphisme.

CHAPITRE III.

ACTION DE L'HYDRATE DE NICKEL SUR LES DISSOLUTIONS AQUEUSES DES SELS MÉTALLIQUES.

J'ai cherché à voir si l'action de l'hydrate de nickel opposé aux sels de mercure et de cuivre conduisait à des résultats identiques à ceux qu'a donnés l'action des oxydes de mercure et de cuivre opposés aux sels de nickel.

I. — Sels de mercure.

1° *Chlorure mercurique.* — L'hydrate de nickel ne produit aucun déplacement à froid sur le bichlorure de mercure, même au bout de plusieurs jours; mais, si l'on fait bouillir le mélange, on obtient une poudre de couleur marron, amorphe. Lavée à l'eau froide, elle contient du chlorure mercurique.

L'examen de la liqueur montre que la plus grande partie du nickel est passée en dissolution.

2° *Bromure mercurique.* — L'ébullition prolongée de l'hydrate de nickel dans une solution de bromure de cuivre m'a donné encore une poudre amorphe de couleur marron identique à la précédente. L'analyse y décèle la présence de bromure mercurique qui a été réellement déplacé par l'hydrate de nickel qui s'est dissous.

3° *Sulfate mercurique.* — A froid, au contact d'une dissolution de sulfate mercurique, l'hydrate de nickel sec produit la précipitation d'une poudre jaune amorphe qui, lavée et séchée à froid, a donné à l'analyse la composition suivante, pour 100 parties :

SO^3......... 11,4 HgO....... 88,6

Ces nombres correspondent à la formule du turbith minéral

$$SO^4Hg.2HgO.$$

Tout le mercure est déplacé de la solution sous forme de ce composé, tandis que l'hydrate de nickel se dissout. C'est là un phénomène que j'ai déjà signalé plusieurs fois dans ce Travail.

4° *Azotate de mercure.* — Dans une solution de nitrate mercurique et à froid, l'hydrate de nickel sec déplace tout le mercure sous forme d'une poudre jaune qui, examinée au microscope, se présente en lamelles hexagonales dérivant d'un prisme clinorhombique par des troncatures sur *a*. Ce corps est un nitrate basique de mercure

$$(NO^3)^2Hg.HgO.H^2O.$$

L'analyse a donné pour 100 :

	Trouvé.		
	I.	II.	Calculé.
$(NO^3)^2$........	21,3	21,1	22,2
Hg...........	72,0	71,9	71,7

L'action de l'hydrate de nickel ne conduit donc jamais à un sel basique mixte lorsqu'on l'oppose aux solutions des sels de mercure; tandis que j'ai montré, au contraire, dans le Chapitre I, que l'oxyde mercurique opposé à un sel de nickel donne toujours un composé cristallisé répondant à la constitution d'un sel basique mixte.

Le carbonate de nickel conduit, dans les mêmes conditions, à des résultats semblables.

II. — Sels de cuivre.

Dans l'étude des sels de cuivre, j'ai fait agir successivement l'hydrate de nickel sec, le carbonate et l'oxyde vert-olive NiO.

1° *Chlorure de cuivre.* — A froid, l'hydrate de nickel s'est transformé, au bout de quelques jours, dans une solution de chlorure de cuivre, en une poudre bleu pâle amorphe. Lavée à l'eau froide, séchée et analysée, elle montre qu'elle ne contient pas de nickel. On trouve, en effet, pour 100 parties de composé :

	I.	II.	Théorie pour $CuCl^2.3CuO.3H^2O$.
Cu...........	59,2	59,0	59,4
Cl............	16,3	16,45	16,7

Ces nombres répondent au chlorure tétracuivrique $CuCl^2.3CuO.3H^2O$, obtenu directement par M. P. Sabatier par le contact à froid de l'hydrate brun sur une solution de chlorure de cuivre.

Quelle que soit la dilution de la solution, on obtient toujours ce composé.

A chaud, il suffit de quelques minutes d'ébullition pour le produire. Dans tous les cas, le cuivre est déplacé complètement.

Le carbonate de nickel produit, à chaud et à froid, le même chlorure tétracuivrique avec dégagement de CO^2.

L'oxyde de nickel vert-olive ne réagit pas à froid sur les solutions de chlorure cuivrique. Mais en maintenant le mélange au bain-marie à 80°-90° pendant 5 à 6 heures, il fournit une poudre bleu vert qui, examinée au microscope, se présente sous forme de petits cristaux hexagonaux.

L'analyse m'a donné, pour 100 parties :

Cu..........	59,1	Cl...........	16,3

Ces nombres répondent approximativement à la formule du chlorure tétracuivrique

$$CuCl^2.3CuO.3H^2O.$$

Ainsi, il est facile d'obtenir par cette voie ce composé, que l'on obtient presque toujours à l'état amorphe dans toutes les réactions où on le produit.

2° *Bromure cuivrique*. — Le bromure cuivrique présente des réactions de tous points parallèles à celles du chlorure. L'hydrate de nickel, à froid ou à l'ébullition, en précipite une poudre verte cristallisée en petits hexagones. La réaction est totale, c'est-à-dire que tout le cuivre est déplacé par l'hydrate de nickel qui se dissout.

La poudre verte obtenue est un bromure basique tétracuivrique

$$CuBr^2.3CuO.3H^2O.$$

Analyse.

	Trouvé.		
	I.	II.	Calculé.
Cu...........	49,2	49,3	49,0
Br............	30,7	30,8	31,1

Le carbonate de nickel a donné un résultat identique à froid et à l'ébullition.

L'oxyde NiO n'a rien produit à froid dans les solutions de bromure de cuivre; mais à 80°, après plusieurs heures de contact, il a fourni de grosses lamelles hexagonales vertes. Après les avoir bien lavées pour les débarrasser de l'oxyde

non transformé, elles ont été analysées : elles répondent au chlorure tétracuivrique.

3° *Nitrate de cuivre.* — L'hydrate de nickel et le carbonate de nickel déplacent à froid tout le cuivre de la solution du nitrate, sous forme d'une poudre bleu vert, constituée par de fines lamelles quadrangulaires. L'analyse montre qu'elle constitue un nitrate tétracuivrique

$$(NO^3)^2Cu.3CuO.3H^2O.$$

	Trouvé.	Calculé.
CuO.......	66 pour 100	66,2 pour 100

L'action de l'oxyde de nickel vert-olive ne se produit à chaud qu'avec une extrême lenteur. Il faut chauffer plusieurs jours, au bain-marie à 90°, le mélange pour obtenir une poudre bleu vert formée de grosses lames quadrangulaires qui constituent encore un nitrate tétracuivrique.

4° *Sulfate de cuivre.* — Dans une solution de sulfate de cuivre, l'hydrate de nickel en précipite totalement le cuivre à froid et à chaud ; le carbonate de nickel agit de même. La poudre verte résultant de ce déplacement se présente au microscope sous forme de fines aiguilles caractéristiques du sulfate tétracuivrique. L'analyse montre, en effet, qu'on a affaire à ce sulfate basique

$$SO^4Cu.3CuO.4H^2O.$$

		Théorie.
Quantité pour 100 de CuO......	66,6	67,6

L'oxyde de nickel agit très lentement; il faut le maintenir plusieurs jours au bain-marie à 90° pour avoir un déplacement relativement faible de sulfate tétracuivrique.

De toutes ces expériences il résulte que l'on peut obtenir les sels basiques normaux de cuivre par action de l'hydrate, du carbonate ou de l'oxyde de nickel sur les solutions des sels neutres de cuivre, et que jamais dans les mêmes conditions on n'obtiendra les sels basiques mixtes de cuivre et de nickel.

Si l'on examine les solutions des sels de cuivre auxquelles on a opposé l'hydrate de nickel, on constate que tout le cuivre en est déplacé, si l'hydrate est en quantité suffisante. Il est probable que cette action est due à la faible solubilité de l'hydrate de nickel dans l'eau, solubilité qui favorise peu à peu le déplacement total du cuivre.

J'ai cherché cependant à savoir si cette action de l'hydrate de nickel était particulière aux sels de cuivre, et je l'ai opposé à quelques sels de zinc.

Les expériences que je vais décrire montrent que les sels de zinc se comportent d'une façon identique aux sels de cuivre.

III. — Sels de zinc.

1° *Chlorure de zinc.* — L'hydrate de nickel sec mis à froid au contact d'une solution quelconque de chlorure de zinc en déplace lentement une poudre blanche toujours mêlée à de l'hydrate non transformé. Mais, si l'on fait bouillir l'hydrate de nickel dans la solution, on obtient rapidement une poudre blanche formée de fines aiguilles souvent groupées. Elles présentent à l'analyse la composition du chlorure basique de zinc

$$ZnCl^2.3ZnO.3H^2O.$$

	Trouvé.		
	I.	II.	Calculé.
Zn............	59,7	59,3	60,0
Cl............	16,0	15,8	16,3

Le carbonate de nickel bouilli avec une solution de chlorure de zinc produit le même résultat. Il précipite de fines aiguilles blanches de même composition que les précédentes; l'oxyde de nickel se dissout et CO^2 se dégage.

2° *Sulfate de zinc.* — Lorsqu'on fait bouillir une solution de sulfate de zinc avec de l'hydrate ou du carbonate de nickel, la liqueur devient verte. Mais il se précipite en même temps une poudre blanche cristalline apparaissant, au microscope, sous forme d'aiguilles qui, lavées et séchées à froid, présentent la composition du sulfate basique de zinc

$$SO^4Zn.3ZnO.8H^2O.$$

Sur 100 parties du composé, on trouve :

	I.	II.	Théorie.
ZnO...........	61,7	61,9	62,5
SO^3...........	14,6	14,9	15,41

L'hydrate de nickel agit donc sur les sels de zinc pour en déplacer un sel basique de zinc cristallisé du type tétrazincique.

CONCLUSIONS.

I. Les résultats obtenus dans ce Travail montrent que les actions exercées par l'oxyde de mercure, les hydrates de cuivre et de nickel sur les solutions aqueuses des sels métalliques sont assez variées.

Dans une Note publiée aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (1), M. P. Sabatier a classé en six types distincts les réactions que peut fournir l'action d'un oxyde ou hydrate métallique opposé aux solutions des divers sels. Je les ai rencontrés à peu près tous au cours de ces recherches :

1° *Il n'y a aucune action.* C'est ce qui a lieu pour l'oxyde mercurique opposé aux solutions des différents sulfates métalliques, pour l'hydrate tétracuivrique opposé au sulfate manganeux et aux chlorure et bromure mercuriques.

2° *Il y a déplacement pur et simple de l'hydrate du sel dissous.* L'oxyde mercurique a déplacé l'hydrate ferrique dans les solutions de perchlorure de fer; les hydrates de cuivre déplacent les hydrates de chrome et d'alumine dans les solutions des sulfates.

3° *Il y a déplacement partiel avec précipitation d'un sel basique insoluble issu de l'un des métaux antagonistes.* Ce cas est très fréquent et je l'ai rencontré pour les trois hydrates ou oxydes que j'ai fait réagir.

Avec l'oxyde mercurique j'ai obtenu précipitation d'un oxychlorure de zinc, d'un chlorure tétracuivrique, d'un chlorure basique de cadmium, d'un oxychlorure et d'un nitrate basique de bismuth, et dans d'autres cas de sulfate et de nitrate basique de mercure.

Avec les hydrates de cuivre, j'ai obtenu un oxychlorure de plomb, un nitrate basique de plomb, un sous-nitrate de bismuth, et des sulfate et nitrate basiques de mercure.

L'hydrate de zinc m'a toujours conduit, dans une solution d'un sel de cuivre ou de zinc, à un sel basique tétracuivrique ou tétrazincique.

4° *Il y a : 1° oxydation du sel dissous, par l'oxyde ou l'hydrate facilement réductibles, ou inversement il y a : 2° suroxydation de l'oxyde par le sel dissous, le phénomène étant suivi dans chaque cas par l'action ultérieure réciproque des produits formés, action d'où résultera fréquemment un sel basique.*

---

(1) *Comptes rendus*, t. CXXXII, 24 juin 1901.

L'action de l'oxyde mercurique sur du sulfate ferreux est un exemple du premier cas; on a, en effet, mise en liberté de mercure et production simultanée de sulfate mercureux et de sulfate basique ferrique.

5° *Il y a formation d'un oxyde mixte accompagné ou non d'un sel basique.* Ce type n'a pas été rencontré.

6° *Il y a production d'un sel basique mixte issu des deux métaux.* Ce type s'est rencontré fréquemment; à lui appartiennent tous les sels basiques mixtes que j'ai décrits.

Généralement, l'action d'un oxyde sur une solution de sel métallique donne un sel basique (types 3, 4, 6). Les types 2 et 5 se rencontrent exceptionnellement.

II. J'ai obtenu pour la première fois les sels basiques mixtes qui suivent :

1° *Sels cristallisés.*

Le bromure basique mixte de cuivre et de mercure

$$2HgBr^2.CuBr^2.3CuO.H^2O;$$

Le nitrate basique mixte de cuivre et de mercure

$$(NO^3)^2Hg.CuO.5H^2O;$$

Le bromure basique mixte de zinc et de mercure

$$HgBr^2.ZnO.8H^2O;$$

Le nitrate basique mixte de zinc et de mercure

$$(NO^3)^2Hg.ZnO.2H^2O;$$

Le chlorure basique mixte de nickel et de mercure

$$HgCl^2.NiCl^2.6NiO.20H^2O;$$

Le bromure basique mixte de nickel et de mercure

$$HgBr^2.NiBr^2.6NiO.20H^2O;$$

Le nitrate basique mixte de nickel et de mercure

$$(NO^3)^2Hg.NiO.4H^2O;$$

Le chlorure basique mixte de cobalt et de mercure

$$HgCl^2.CoCl^2.6CoO.20H^2O;$$

Le bromure basique mixte de cobalt et de mercure

$$HgBr^2.CoBr^2.6CoO.20H^2O;$$

Le nitrate basique mixte de cobalt et de mercure

$$(NO^3)^2Hg.CoO.4H^2O;$$

Le nitrate basique mixte de manganèse et de mercure

$$(NO^3)^2Hg.MnO.4H^2O;$$

Le bromure basique mixte de cadmium et de mercure

$$HgBr^2.CdO.H^2O;$$

Le nitrate mixte de cadmium et de mercure

$$(NO^3)^2Hg.CdO.3H^2O;$$

Le chlorure basique mixte de cuivre et de zinc

$$ZnCl^2.3CuO.4H^2O;$$

Les bromures basiques mixtes de zinc et de cuivre

$$ZnBr^2.3CuO.4H^2O,$$

$$ZnBr^2.3CuO.2H^2O;$$

Le nitrate basique mixte de zinc et de cuivre

$$(NO^3)^2Zn.3CuO.3H^2O;$$

Les sulfates basiques mixtes de zinc et de cuivre

$$2SO^4Cu.3ZnO.12H^2O,$$

$$2SO^4Zn.3CuO.12H^2O,$$

$$SO^4Zn.2CuO.5H^2O,$$

$$SO^4Zn.3CuO.5H^2O;$$

Le chlorure basique mixte de nickel et de cuivre

$$NiCl^2.3CuO.4H^2O;$$

Le bromure basique mixte de nickel et de cuivre

$$NiBr^2.3CuO.4H^2O;$$

Le nitrate basique mixte de nickel et de cuivre

$$(NO^3)^2Ni.3CuO.3H^2O;$$

Les sulfates basiques mixtes de nickel et de cuivre

$$2SO^4Ni.3CuO.12H^2O,$$
$$SO^4Ni.2CuO.\ 6H^2O;$$

Le chlorure basique mixte de cobalt et de cuivre

$$CoCl^2.3CuO.4H^2O;$$

Le bromure basique mixte de cobalt et de cuivre

$$CoBr^2.3CuO.4H^2O;$$

Le nitrate basique mixte de cobalt et de cuivre

$$(NO^3)^2CO.3CuO.3H^2O;$$

Les sulfates basiques mixtes de cobalt et de cuivre

$$2SO^4Co.3CuO.12H^2O,$$
$$SO^4Co.2CuO.\ 6H^2O;$$

Le chlorure basique mixte de manganèse et de cuivre

$$MnCl^2.3CuO.4H^2O;$$

Le nitrate basique mixte de manganèse et de cuivre

$$(NO^3)^2Mn.3CuO.3H^2O;$$

Le chlorure basique mixte de cadmium et de cuivre

$$CdCl^2.3CuO.3H^2O;$$

Le bromure basique mixte de cadmium et de cuivre

$$CdBr^2.3CuO.3H^2O;$$

Le nitrate basique mixte de cadmium et de cuivre

$$(NO^3)^2Cd.3CuO.5H^2O;$$

Le sulfate basique mixte de cadmium et de cuivre

$$2SO^4Cd.3CuO.8H^2O.$$

2° *Sels amorphes.*

Le chlorure basique mixte de cadmium et de mercure

$$HgCl^2.CdO.H^2O;$$

Le chlorure basique mixte de plomb et de mercure

$$HgCl^2.2PbO.2H^2O;$$

Le sulfate basique mixte de manganèse et de cuivre

$$SO^4Mn.2CuO.3H^2O;$$

Le chlorure basique mixte de mercure et de cuivre

$$HgCl^2.CuCl^2.7CuO.2H^2O.$$

III. J'ai obtenu à l'état cristallisé, par des réactions nouvelles, les sels basiques suivants déjà connus :

Le chlorure tétracuivrique

$$CuCl^2.3CuO.3H^2O;$$

Le bromure tétracuivrique

$$CuBr^2.3CuO.3H^2O;$$

Le nitrate tétracuivrique

$$Cu(NO^3)^2.3CuO.3H^2O;$$

Le sulfate tétracuivrique

$$CuSO^4.3CuO.4H^2O;$$

Les chlorures basiques de zinc

$$ZnCl^2.3ZnO.5H^2O,$$
$$ZnCl^2.3ZnO.3H^2O;$$

Le sulfate basique de zinc

$$SO^4Zn.3ZnO.8H^2O;$$

Le nitrate basique de mercure

$$(NO^3)^2Hg.HgO.H^2O;$$

Le nitrate basique de bismuth

$$(NO^3)BiO.H^2O;$$

Le chlorure basique de plomb

$$PbCl^2.PbO.H^2O;$$

Le nitrate basique de plomb

$$(NO^3)^2Pb.PbO.H^2O;$$

L'hydrate uranique

$$UO^2(OH)^2.$$

IV. Ces résultats montrent que, de même que les sels basiques simples doivent être considérés comme les sels normaux d'un oxyde condensé, de même les sels basiques mixtes peuvent être considérés comme des sels normaux d'oxydes mixtes inconnus, dimétallique, trimétallique, tétra et même pentamétalliques.

C'est ainsi qu'à l'oxyde de mercure

$$\begin{matrix} Hg - OH \\ \rangle O \\ Hg - OH \end{matrix} ,$$

auquel se rapporte le nitrate mercurique

$$\begin{matrix} Hg - NO^3 \\ \rangle O \\ Hg - NO^3 \end{matrix} .H^2O,$$

doivent correspondre des oxydes mixtes obtenus en remplaçant 1^{at} de Hg par 1^{at} d'un des métaux Zn, Cu, Mn, Cd, etc.

Il est possible d'espérer, par exemple, la formation d'un oxyde mixte

$$\begin{matrix} Hg - OH \\ \rangle O \\ Cu - OH \end{matrix} \quad \text{ou} \quad \begin{matrix} Hg - OH \\ \rangle O \\ Zn - OH \end{matrix} ,$$

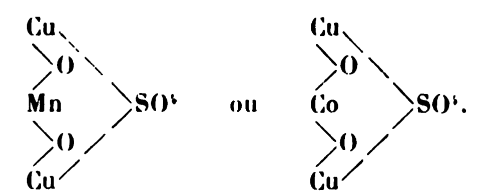
auxquels correspondraient les nitrates basiques mixtes

$$\begin{matrix} Hg - NO^3 \\ \rangle O \\ Cu - NO^3 \end{matrix} \quad \text{ou} \quad \begin{matrix} Hg - NO^3 \\ \rangle O \\ Zn - NO^3 \end{matrix} .$$

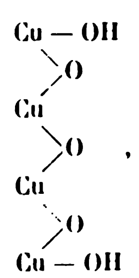
Pour type trimétallique, on peut espérer la formation d'oxydes, tels que

$$\begin{matrix} Cu - OH \\ \rangle O \\ Mn \\ \rangle O \\ Cu - OH \end{matrix} \quad \text{ou} \quad \begin{matrix} Cu - OH \\ \rangle O \\ Co \\ \rangle O \\ Cu - OH \end{matrix} , \quad \text{etc.},$$

auxquels doivent correspondre les sulfates bimétalliques mixtes

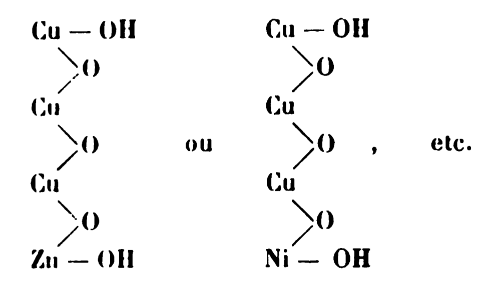


Enfin, à l'hydrate tétracuivrique bien connu

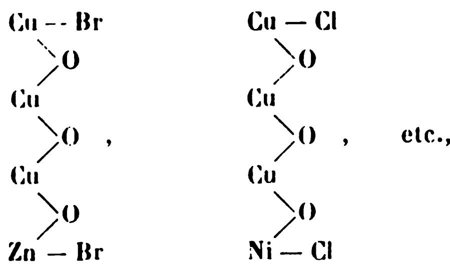


auquel se rapportent tous les sels basiques tétracuivriques, doivent correspondre des oxydes mixtes, où 1^{at} de cuivre est remplacé par 1^{at} de zinc, Mn, Co, Ni, Cd, etc.

On peut admettre, par exemple, l'existence des combinaisons suivantes :



auxquels se rapporteraient les chlorures ou bromures basiques mixtes



V. L'examen de la composition et de la nature cristalline des différents sels basiques que j'ai obtenus montre qu'il existe entre eux des relations d'isomorphisme très étroites, confirmant très nettement les analogies qui existent entre la plupart des métaux.

Les nitrates basiques mixtes

$$(NO^3)^2Cu.3CuO.3H^2O,$$
$$(NO^3)^2Zn.3CuO.3H^2O,$$
$$(NO^3)^2Co.3CuO.3H^2O,$$
$$(NO^3)^2Ni.3CuO.3H^2O,$$
$$(NO^3)^2Mn.3CuO.3H^2O,$$

tous isomorphes, montrent qu'il est possible, sans changer la forme cristalline du composé, de remplacer 1^at de cuivre du nitrate tétracuivrique par 1^at de Zn, de Mn, de Co, ou de Ni.

L'examen cristallographique des trois nitrates mixtes basiques

$$(NO^3)^2Hg.MnO.4H^2O,$$
$$(NO^3)^2Hg.CoO.4H^2O,$$
$$(NO^3)^2Hg.NiO.4H^2O$$

montre qu'il y a analogie parfaite entre le manganèse, le cobalt et le nickel.

Cette analogie est encore révélée pour deux métaux, le mercure et le plomb bivalent, par l'examen des nitrates basiques isomorphes

$$(NO^3)^2Hg.HgO.H^2O,$$
$$(NO^3)^2Pb.PbO.H^2O.$$

Les sulfates basiques mixtes

$$2SO^4Cu.3ZnO.12H^2O,$$
$$2SO^4Zn.3CuO.12H^2O,$$

tous deux isomorphes, montrent l'équivalence absolue entre les atomes de cuivre et de zinc.

Les sulfates mixtes

$$SO^4Co.2CuO.6H^2O,$$
$$2SO^4Co.3CuO.12H^2O,$$

d'une part, et les sulfates

$$SO^4Ni.2CuO.6H^2O,$$

$$2SO^4Ni.3CuO.12H^2O$$

d'autre part, montrent nettement l'analogie étroite qui existe entre le cobalt et le nickel.

Enfin, les bromures basiques mixtes

$$ZnBr^2.3CuO.4H^2O,$$

$$NiBr^2.3CuO.4H^2O$$

$$CoBr^2.3CuO.4H^2O$$

constitués par des lamelles hexagonales, se groupant en élégantes étoiles à six branches, rapprochent encore le zinc du nickel et du cobalt.

Tous ces faits sont parfaitement conformes à la loi de Mitscherlish et aux nombreuses vérifications qu'elle a déjà reçues.

BIBLIOGRAPHIE.

ANDRÉ. — Action de l'oxyde de plomb sur quelques chlorures dissous (*Comptes rendus*, t. CIV, p. 359).

Action de l'oxyde de mercure sur quelques chlorures dissous (*Comptes rendus*, t. CIV, p. 431).

Action de certains oxydes sur les chlorures de zinc et de manganèse dissous (*Comptes rendus*, t. CVI, p. 854).

Observations sur les sels basiques renfermant plusieurs oxydes métalliques (*Comptes rendus*, t. CXXXII, p. 1414).

BRAUN. — Action de l'hydrate de cuivre sur le sulfate ferreux (*Jahresberichte*, 1867, p. 301).

GAY-LUSSAC. — Sur les précipitations mutuelles des oxydes métalliques (*Annales de Chimie*, t. XLIX, p. 21, 30 nivôse an XII).

HENRIET. — Dosage de l'azote (*Comptes rendus*, t. CXXII, n° 16, avril 1901).

H. KLINGER. — Combinaisons du chlorure de calcium et de l'oxyde de mercure (*Berichte deutsche chemischen Gesellschaft*, t. XVI, p. 997).

LEVOL. — Action de l'hydrate de cuivre sur le sulfate ferreux (*Annales de Chimie et de Physique*, 3e série, t. LXV, p. 320).

A. MAILHE. — Action de l'oxyde mercurique sur les dissolutions aqueuses des sels métalliques (*Comptes rendus*, t. CXXXII, p. 1273).

Action de l'oxyde mercurique sur les dissolutions aqueuses des sels métalliques (*Comptes rendus*, t. CXXXII, p. 1560).

Action de l'oxyde mercurique sur les dissolutions aqueuses des sels métalliques (*Bulletin de la Société chimique de Paris*, 3e série, t. XXV, p. 786).

Action de l'hydrate cuivrique sur les dissolutions aqueuses des sels métalliques (*Comptes rendus*, t. CXXXIII, p. 226).

Action de l'hydrate de cuivre sur les dissolutions aqueuses des sels métalliques (*Comptes rendus*, t. CXXXIV, p. 42).

Action de l'hydrate de cuivre sur les solutions aqueuses des sels métalliques (*Comptes rendus*, t. CXXXIV, p. 233).

Action des hydrates de cuivre sur les dissolutions aqueuses des sels métalliques (*Bulletin de la Société chimique de Paris*, 3e série, t. XXVII, p. 167).

Action de l'hydrate tétracuivrique sur les dissolutions aqueuses de quelques sulfates métalliques (*Bulletin de la Société chimique de Paris*, t. XXVII, 5 juin 1902).

PERSOZ. — Expériences sur les déplacements des bases insolubles (*Annales de Chimie et de Physique*, 1835, 2e série, t. LVIII, p. 140).

PÉTRIEFF. — Sur les déplacements métalliques (*Société Chimique russe*, 26 août 1883).

RECOURA. — Action d'un hydrate métallique sur les solutions des autres métaux. Sels basiques à deux métaux (*Comptes rendus*, t. CXXXII, p. 1414).

ROSE. — Action de l'oxyde mercurique sur les solutions des sels métalliques (*Poggendorf Annalen*, t. CVII, p. 298, et *Répertoire de Chimie pure*, 1859, p. 491).
Action de l'oxyde d'argent sur les solutions de nitrate de cuivre (*Poggendorf Annalen*, t. CI, p. 321).

P. SABATIER. — Déplacements réciproques des bases insolubles (Association française pour l'avancement des Sciences : *Congrès de Pau*, 1892, t. I, p. 185).
Sur certains phénomènes observés dans les déplacements réciproques des oxydes métalliques (Association française pour l'avancement des Sciences : *Congrès de Bordeaux*, 1895, t. I, p. 243).
Action de l'oxyde cuivreux sur les solutions d'azotate d'argent (*Comptes rendus*, t. CXXIV, p. 363).
Sur divers sels basiques de cuivre et sur l'hydrate cuivrique brun (*Comptes rendus*, t. CXXV, p. 101 et 301).
Action de l'hydrate de cuivre sur les dissolutions de nitrate d'argent. Sel basique argento-cuivrique (*Comptes rendus*, t. CXXV, p. 175).
Sels basiques mixtes argento-cuivriques (*Comptes rendus*, t. CXXIX, p. 211).
Déplacements réciproques des oxydes de plomb et d'argent dans les solutions de nitrates (Association française pour l'avancement des Sciences : *Congrès de Paris*, 1900).
Action d'un hydrate ou d'un oxyde métallique sur les solutions des sels des autres métaux. Sels basiques mixtes (*Comptes rendus*, t. CXXXII, 24 juin 1901).



SUR QUELQUES TRANSFORMATIONS

DES

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

DU SECOND ORDRE [1],

PAR M. É. GOURSAT.

En étudiant certaines transformations des surfaces à courbure totale constante, M. Bäcklund [2] a été conduit au problème général suivant :

Étant donné un système de quatre relations distinctes

$$F_i(x, y, z, p, q;\ x', y', z', p', q') = 0 \qquad (i = 1, 2, 3, 4),$$

entre les coordonnées des éléments de deux systèmes (E), (E′), *déterminer les surfaces du système* (E) *auxquelles correspondent des surfaces de* (E′).

Il existe toujours des surfaces du système (E) auxquelles correspondent des surfaces du système (E′), et, dans certains cas, ces surfaces sont les intégrales d'une équation aux dérivées partielles du second ordre. Il peut arriver aussi que les surfaces de (E′) qui correspondent à des surfaces de (E) soient elles-mêmes les intégrales d'une seconde équation aux dérivées partielles du second ordre. Lorsque cette circonstance se présente on dit que l'on passe de l'une de ces équations à l'autre par une *transformation de Bäcklund*, qui est définie par les quatre relations $F_i = 0$.

Dans une Thèse récente, M. J. Clairin [3] a fait une étude systématique de ces transformations et obtenu un certain nombre de résultats intéressants; ainsi, en se basant uniquement sur des caractères invariants relativement à une transformation de contact, il a établi une classification rationnelle de ces transforma-

---

[1] La plupart des résultats contenus dans ce Mémoire ont été résumés dans deux Notes présentées à l'Académie des Sciences (*Comptes rendus*, 24 février et 5 mai 1902).

[2] *Mathematische Annalen*, t. XVII et XIX.

[3] *Annales scientifiques de l'École Normale supérieure*, 1902.

tions en trois espèces. D'un autre côté, il a montré qu'une équation aux dérivées partielles du second ordre prise au hasard ne provient pas d'une transformation de Bäcklund. Parmi les nombreuses questions qui restent encore à résoudre, deux des plus importantes sont celles-ci :

1° Former tous les systèmes de quatre relations $F_i = 0$ définissant une transformation de Bäcklund d'une espèce déterminée;

2° Une équation du second ordre étant donnée, reconnaître si elle provient d'une transformation de Bäcklund, et trouver cette transformation. Quand on cherche à traiter analytiquement ce dernier problème on est conduit à un certain nombre d'équations simultanées entre quatre fonctions inconnues. L'étude directe de ce système paraît à peu près impraticable. Il y a, du reste, une cause de complication évidente *a priori*. En effet, si une équation du second ordre provient d'une transformation de Bäcklund d'une certaine espèce, elle provient aussi d'une infinité de transformations de même espèce que l'on obtient en combinant la première avec une transformation de contact quelconque. Si nos équations simultanées admettent un système de solutions, elles doivent donc en admettre une infinité, dépendant de fonctions arbitraires.

J'ai pu simplifier le problème en supposant que les équations $F_i = 0$, qui définissent la transformation, admettent une transformation de contact infinitésimale par rapport à l'élément x', y', z', p', q'. On peut alors supposer, sans diminuer la généralité, que les équations $F_i = 0$ ne renferment pas z'. En introduisant une forme de Pfaff convenable, on a plusieurs systèmes d'équations simultanées à examiner successivement, dans chacun desquels ne figure qu'une seule inconnue. De plus, toutes les transformations de Bäcklund, qui se déduisent de l'une d'elles en la combinant avec une transformation de contact quelconque, correspondent à une même solution de nos équations simultanées et, par conséquent, se déterminent en même temps.

I.

1. Soient

$$(1) \qquad \begin{cases} x' = X(x, y, z, p, q), & y' = Y(x, y, z, p, q), \\ p' = P(x, y, z, p, q), & q' = Q(x, y, z, p, q) \end{cases}$$

un système de quatre relations où les seconds membres X, Y, P, Q sont des fonctions quelconques de x, y, z, p, q. A tout élément (x, y, z, p, q) ces formules font correspondre ∞^1 éléments (x', y', z', p', q'); les valeurs de x', y', p', q' sont données par les formules elles-mêmes, tandis que la valeur de z' reste arbitraire. Tous ces éléments se déduisent de l'un d'entre eux en déplaçant le point (x', y', z') le long d'une parallèle à l'axe Oz, tandis que le plan de l'élément reste parallèle à lui-même. Le problème de Bäcklund peut s'énoncer ainsi :

Quelles surfaces faut-il faire décrire à l'élément (x, y, z, p, q) *pour qu'on puisse leur faire correspondre des surfaces décrites par l'élément* x', y', z', p', q'?

Soit

$$z = \Phi(x, y) \tag{2}$$

l'équation d'une surface décrite par l'élément (x, y, z, p, q); on a

$$p = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \qquad q = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \tag{3}$$

et, en remplaçant z, p, q par les valeurs précédentes dans X, Y, P, Q, l'équation

$$dz' = p'\,dx' + q'\,dy' \tag{4}$$

doit être complètement intégrable, puisque le second membre ne renferme pas z.

Cette équation s'écrit encore, en remplaçant x', y', p', q' par leurs expressions (1),

$$\begin{aligned} dz' = \mathrm{P}\left[\left(\frac{d\mathrm{X}}{dx} + \frac{\partial \mathrm{X}}{\partial p} r + \frac{\partial \mathrm{X}}{\partial q} s\right) dx + \left(\frac{d\mathrm{X}}{dy} + \frac{\partial \mathrm{X}}{\partial p} s + \frac{\partial \mathrm{X}}{\partial q} t\right) dy\right] \\ + \mathrm{Q}\left[\left(\frac{d\mathrm{Y}}{dx} + \frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial p} r + \frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial q} s\right) dx + \left(\frac{d\mathrm{Y}}{dy} + \frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial p} s + \frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial q} t\right) dy\right], \end{aligned} \tag{5}$$

où r, s, t désignent les dérivées partielles du second ordre de la fonction $\Phi(x, y)$, et où l'on a posé

$$\frac{d}{dx} = \frac{\partial}{\partial x} + p\frac{\partial}{\partial z}, \qquad \frac{d}{dy} = \frac{\partial}{\partial y} + q\frac{\partial}{\partial z}.$$

En écrivant la condition d'intégrabilité, on voit facilement que les dérivées du troisième ordre disparaissent, et il reste une équation de Monge-Ampère pour déterminer la fonction $\Phi(x, y)$,

$$\mathrm{R}_{pq}(rt - s^2) + \mathrm{R}_{yp} r + \mathrm{R}_{xq} t + \mathrm{R}_{xy} + \mathrm{S}s = 0, \tag{6}$$

les coefficients R_{pq}, R_{yp}, R_{xq}, R_{xy}, S ayant les valeurs suivantes :

$$\left\{\begin{aligned} \mathrm{R}_{pq} &= \frac{\partial \mathrm{X}}{\partial p}\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial q} - \frac{\partial \mathrm{X}}{\partial q}\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial p} + \frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial p}\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial q} - \frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial q}\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial p}, \\ \mathrm{R}_{yp} &= \frac{\partial \mathrm{X}}{\partial p}\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial y} - \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial p}\frac{d\mathrm{X}}{dy} + \frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial p}\frac{d\mathrm{Q}}{dy} - \frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial p}\frac{d\mathrm{Y}}{dy}, \\ \mathrm{R}_{xq} &= \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial q}\frac{d\mathrm{X}}{dx} - \frac{\partial \mathrm{X}}{\partial q}\frac{d\mathrm{P}}{dx} + \frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial q}\frac{d\mathrm{Y}}{dx} - \frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial q}\frac{d\mathrm{Q}}{dx}, \\ \mathrm{R}_{xy} &= \frac{d\mathrm{P}}{dy}\frac{d\mathrm{X}}{dx} - \frac{d\mathrm{P}}{dx}\frac{d\mathrm{X}}{dy} + \frac{d\mathrm{Q}}{dy}\frac{d\mathrm{Y}}{dx} - \frac{d\mathrm{Q}}{dx}\frac{d\mathrm{Y}}{dy}, \\ \mathrm{S} &= \frac{\partial \mathrm{X}}{\partial q}\frac{d\mathrm{P}}{dy} + \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial p}\frac{d\mathrm{X}}{dx} - \frac{d\mathrm{P}}{dx}\frac{\partial \mathrm{X}}{\partial p} - \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial q}\frac{d\mathrm{X}}{dy} \\ &\quad + \frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial q}\frac{d\mathrm{Q}}{dy} + \frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial p}\frac{d\mathrm{Y}}{dx} - \frac{d\mathrm{Q}}{dx}\frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial p} - \frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial q}\frac{d\mathrm{Y}}{dy}. \end{aligned}\right. \tag{7}$$

Ces formules peuvent s'écrire sous une forme abrégée en posant

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} F_1 &= P\frac{dX}{dx} + Q\frac{dY}{dx}, \\ F_2 &= P\frac{dX}{dy} + Q\frac{dY}{dy}, \\ F_3 &= P\frac{\partial X}{\partial p} + Q\frac{\partial Y}{\partial p}, \\ F_4 &= P\frac{\partial X}{\partial q} + Q\frac{\partial Y}{\partial q}; \end{aligned}\right.$$

les relations (7) sont alors équivalentes aux suivantes

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} &R_{pq} = \frac{\partial F_3}{\partial q} - \frac{\partial F_4}{\partial p}, \qquad R_{yp} = \frac{dF_3}{dy} - \frac{\partial F_2}{\partial p}, \\ &R_{xq} = \frac{\partial F_1}{\partial q} - \frac{dF_4}{dx}, \qquad R_{xy} = \frac{dF_1}{dy} - \frac{dF_2}{dx}, \\ &\qquad S = \frac{dF_4}{dy} - \frac{\partial F_2}{\partial q} + \frac{\partial F_1}{\partial p} - \frac{dF_3}{dx}. \end{aligned}\right.$$

Observons que l'on a identiquement

$$(10)\qquad P\,\overline{dX} + Q\,\overline{dY} = F_1\,dx + F_2\,dy + F_3\,dp + F_4\,dq,$$

en désignant par $\overline{dX}$ et $\overline{dY}$ ce que deviennent dX et dY quand on y remplace dz par $p\,dx + q\,dy$.

2. Pour que la condition d'intégrabilité (4) soit vérifiée identiquement, quelle que soit la fonction $\Phi(x, y)$, il faut et il suffit que l'on ait à la fois

$$R_{pq} = R_{yp} = R_{xq} = R_{xy} = S = 0.$$

La première condition

$$\frac{\partial F_3}{\partial q} - \frac{\partial F_4}{\partial p} = 0$$

montre que F_3 et F_4 sont les dérivées partielles par rapport aux variables p et q respectivement, d'une fonction $U(x, y, z, p, q)$,

$$F_3 = \frac{\partial U}{\partial p}, \qquad F_4 = \frac{\partial U}{\partial q}.$$

Les relations $R_{yp} = 0$, $R_{xq} = 0$ deviennent alors

$$\frac{\partial F_2}{\partial p} = \frac{\partial^2 U}{\partial p\,\partial y} + q\frac{\partial^2 U}{\partial p\,\partial z}, \qquad \frac{\partial F_1}{\partial q} = \frac{\partial^2 U}{\partial q\,\partial x} + p\frac{\partial^2 U}{\partial q\,\partial z},$$

et l'on en tire

$$F_2 = \frac{dU}{dy} + V(x, y, z, q), \qquad F_1 = \frac{dU}{dx} + W(x, y, z, p).$$

Les deux dernières conditions $R_{xy} = 0$, $S = 0$ donnent ensuite

$$\frac{dV}{dx} = \frac{dW}{dy}, \qquad \frac{\partial V}{\partial q} - \frac{\partial W}{\partial p} = 0;$$

la dernière montre que la valeur commune de $\frac{\partial V}{\partial q}$ et $\frac{\partial W}{\partial p}$ est à la fois indépendante de p et de q. C'est donc une fonction $H(x, y, z)$ des variables x, y, z seulement, et l'on a

$$V = H(x, y, z)q + K(x, y, z), \qquad W = H(x, y, z)p + L(x, y, z);$$

en remplaçant V et W par ces expressions dans la condition $\frac{dV}{dx} = \frac{dW}{dy}$, elle devient

$$\frac{\partial K}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y} + \left(\frac{\partial K}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial y}\right)p + \left(\frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial z}\right)q = 0,$$

et se décompose en trois conditions distinctes

$$\frac{\partial K}{\partial x} = \frac{\partial L}{\partial y}, \qquad \frac{\partial K}{\partial z} = \frac{\partial H}{\partial y}, \qquad \frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial L}{\partial z}.$$

Nous pouvons donc poser

$$L = \frac{\partial T}{\partial x}, \qquad K = \frac{\partial T}{\partial y}, \qquad H = \frac{\partial T}{\partial z},$$

T étant une fonction de x, y, z, et nous avons pour expression générale des fonctions F_1, F_2, F_3, F_4, lorsque la condition (4) est vérifiée identiquement,

$$(11) \qquad F_1 = \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial x} + p\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial z}, \qquad F_2 = \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial y} + q\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial z}, \qquad F_3 = \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial p}, \qquad F_4 = \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial q},$$

en posant $\mathfrak{F} = U + T$.

Il est facile de vérifier et d'expliquer ce résultat. En effet, on tire des formules précédentes

$$(12) \qquad F_1\,dx + F_2\,dy + F_3\,dp + F_4\,dq = d\mathfrak{F} - \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial z}(dz - p\,dx - q\,dy);$$

d'autre part, la définition même des fonctions F_1, F_2, F_3, F_4 donne l'identité

$$(13)\qquad \begin{aligned} & F_1\,dx + F_2\,dy + F_3\,dp + F_4\,dq \\ & \quad = P\,dX + Q\,dY - \left(P\frac{\partial X}{\partial z} + Q\frac{\partial Y}{\partial z}\right)(dz - p\,dx - q\,dy), \end{aligned}$$

et, en rapprochant ces deux formules, on en déduit la nouvelle identité

$$(14)\qquad d\mathfrak{F} - P\,dX - Q\,dY = \left(\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial z} - P\frac{\partial X}{\partial z} - Q\frac{\partial Y}{\partial z}\right)(dz - p\,dx - q\,dy).$$

Les formules (1), jointes à la relation

$$z' = \mathfrak{F}(x, y, z, p, q),$$

définissent donc une transformation de contact, et par suite à toute surface décrite par l'élément (x, y, z, p, q) correspond une surface décrite par l'élément (x', y', z', p', q').

3. Laissant de côté ce cas singulier, nous voyons que la fonction $\Phi(x, y)$ doit être une intégrale de l'équation de Monge-Ampère (6); à toute surface intégrale (Σ) de cette équation correspondent une infinité de surfaces (Σ') décrites par l'élément (x', y', z', p', q'). Toutes ces surfaces, dépendant d'une constante arbitraire, s'obtiendront par une quadrature au moyen de l'équation (4).

Les coefficients R_{pq}, R_{yp}, R_{xq}, R_{xy}, S de l'équation (6) dépendant de quatre fonctions arbitraires X, Y, P, Q, il semble qu'on doit pouvoir l'identifier avec une équation quelconque de la même forme. La suite du calcul montrera qu'il n'en est rien. Nous allons d'abord chercher à quelles conditions doivent satisfaire ces coefficients pour que l'équation (6) provienne d'une condition d'intégrabilité d'une relation de la forme (4) sans aucune réduction sur les coefficients. Cela revient à chercher les conditions d'intégrabilité du système (9), où l'on considère F_1, F_2, F_3, F_4 comme les fonctions inconnues.

Nous traiterons d'abord le cas particulier suivant. Si les formules (1) sont de la forme

$$(15)\qquad x' = x, \qquad y' = y, \qquad p' = f(x, y, z, p), \qquad q' = \varphi(x, y, z, q),$$

la condition d'intégrabilité conduit à l'équation du second ordre

$$Ss + R = 0,$$

où l'on a

$$(16)\qquad S = \frac{\partial f}{\partial p} - \frac{\partial \varphi}{\partial q}, \qquad R = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}q - \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial z}p;$$

inversement, les fonctions R et S étant données, cherchons à quelles conditions les équations (16) et les relations

$$\frac{\partial f}{\partial q} = 0, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial p} = 0 \tag{17}$$

sont compatibles.

Des relations (16) et (17) on déduit aisément les conditions suivantes, qui sont *nécessaires :*

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 S}{\partial p\,\partial q} = 0, \qquad \dfrac{\partial^2 R}{\partial p^2} = \dfrac{d}{dy}\left(\dfrac{\partial S}{\partial p}\right), \qquad \dfrac{\partial^2 R}{\partial q^2} = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial S}{\partial q}\right), \qquad \dfrac{\partial^2 R}{\partial p\,\partial q} = \dfrac{\partial S}{\partial z}, \\ \qquad \dfrac{d^2 S}{dx\,dy} + \dfrac{\partial R}{\partial z} = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial R}{\partial p}\right) + \dfrac{d}{dy}\left(\dfrac{\partial R}{\partial q}\right), \end{array}\right. \tag{18}$$

où l'on a posé

$$\frac{d^2}{dx\,dy} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dy}\right).$$

Ces conditions sont aussi *suffisantes*. La première montre que S est la somme d'une fonction des variables (x, y, z, p) et d'une fonction des variables (x, y, z, q). On peut donc toujours trouver deux fonctions $f_1(x, y, z, p)$ et $\varphi_1(x, y, z, q)$ telles que l'on ait

$$\frac{\partial f_1}{\partial p} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial q} = S, \tag{19}$$

et la première des équations (16) devient

$$\frac{\partial(f - f_1)}{\partial p} = \frac{\partial(\varphi - \varphi_1)}{\partial q}.$$

La valeur commune des deux membres de cette équation est indépendante de p et de q, et, par suite, les fonctions f et φ doivent être de la forme

$$f = f_1 + Up + V, \qquad \varphi = \varphi_1 + Uq + W,$$

U, V, W étant trois fonctions inconnues de x, y, z. La seconde des relations (16) devient, en remplaçant f et φ par les valeurs précédentes,

$$\mathfrak{R} = \frac{\partial V}{\partial y} - \frac{\partial W}{\partial x} + \left(\frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial W}{\partial z}\right)p + \left(\frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial U}{\partial x}\right)q, \tag{20}$$

où l'on a posé, pour abréger,

$$\mathfrak{R} = R - \left(\frac{df_1}{dy} - \frac{d\varphi_1}{dx}\right).$$

Des conditions (18) et de la formule (19) on déduit sans peine que l'on a

$$(18)' \quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 \mathfrak{A}}{\partial p^2} = 0, \qquad \dfrac{\partial^2 \mathfrak{A}}{\partial q^2} = 0, \qquad \dfrac{\partial^2 \mathfrak{A}}{\partial p\, \partial q} = 0, \\ \qquad \dfrac{\partial \mathfrak{A}}{\partial z} = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial \mathfrak{A}}{\partial p}\right) + \dfrac{d}{dy}\left(\dfrac{\partial \mathfrak{A}}{\partial q}\right); \end{array} \right.$$

$\mathfrak{A}$ est donc une fonction linéaire en p et q, et de la relation (20) on conclut que l'on a

$$(21) \quad \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial W}{\partial z} = \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial p}, \qquad \frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial q}, \qquad \frac{\partial V}{\partial y} - \frac{\partial W}{\partial x} = \mathfrak{A} - p\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial p} - q\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial q}.$$

La condition d'intégrabilité bien connue de ce système

$$(22) \quad \frac{\partial^2 \mathfrak{A}}{\partial p\, \partial x} + \frac{\partial^2 \mathfrak{A}}{\partial q\, \partial y} + \frac{\partial}{\partial z}\left(p\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial p} + q\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial q} - \mathfrak{A}\right) = 0$$

est précisément identique à la dernière des relations (18)'. Cette condition étant supposée remplie, on peut prendre arbitrairement une des fonctions U, V, W; prendre, par exemple, $U = 0$. Des deux premières équations (21) on tire alors

$$V = \int_{z_0}^{z} \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial q}\, dz + \psi(x, y), \qquad W = -\int_{z_0}^{z} \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial p}\, dz + \pi(x, y),$$

et, en portant ces expressions de V et de W dans la dernière, elle devient

$$\int_{z_0}^{z} \left(\frac{\partial^2 \mathfrak{A}}{\partial q\, \partial y} + \frac{\partial^2 \mathfrak{A}}{\partial p\, \partial x}\right) dz + \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial \pi}{\partial x} = \mathfrak{A} - p\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial p} - q\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial q},$$

ou, en tenant compte de la relation (22),

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial \pi}{\partial x} = \left(\mathfrak{A} - p\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial p} - q\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial q}\right)_{z=z_0}.$$

Il suffira de prendre pour $\psi(x, y)$ et $\pi(x, y)$ deux fonctions de x et de y satisfaisant à cette dernière condition pour avoir une intégrale des équations (21); une des fonctions ψ ou π reste encore arbitraire.

En résumé, *les conditions* (18) *sont nécessaires et suffisantes pour que les équations* (16) *et* (17) *soient compatibles. Si elles sont vérifiées, toutes les solutions s'obtiennent par des quadratures.*

Si l'on a obtenu un premier système de solutions (f, φ), tout autre système de

solutions peut s'écrire $(f+\lambda, \varphi+\mu)$, les fonctions λ et μ vérifiant les relations

$$\frac{\partial\lambda}{\partial q}=0, \qquad \frac{\partial\mu}{\partial p}=0, \qquad \frac{\partial\lambda}{\partial p}=\frac{\partial\mu}{\partial q}, \qquad \frac{d\lambda}{dy}=\frac{d\mu}{dx};$$

on démontre, comme au paragraphe précédent, que l'on doit avoir

$$\lambda=\frac{\partial H}{\partial z}p+\frac{\partial H}{\partial x}, \qquad \mu=\frac{\partial H}{\partial z}q+\frac{\partial H}{\partial y}$$

H étant une fonction arbitraire de x, y, z. Il est clair, en effet, que la condition d'intégrabilité de l'équation

$$dz'=\left(f+\frac{\partial H}{\partial z}p+\frac{\partial H}{\partial x}\right)dx+\left(\varphi+\frac{\partial H}{\partial z}q+\frac{\partial H}{\partial y}\right)dy$$

est indépendante de la fonction $H(x, y, z)$.

4. Considérons maintenant le cas général des équations (9) où les coefficients R_{pq}, R_{yp}, R_{xq}, R_{xy}, S sont quelconques. On peut toujours, et d'une infinité de manières, trouver quatre fonctions f_1, f_2, f_3, f_4 satisfaisant aux trois premières

$$\frac{\partial f_3}{\partial q}-\frac{\partial f_4}{\partial p}=R_{pq}, \qquad \frac{df_3}{dy}-\frac{\partial f_2}{\partial p}=R_{yp}, \qquad \frac{\partial f_1}{\partial q}-\frac{df_4}{dx}=R_{xq}; \tag{23}$$

on peut, par exemple, se donner f_4, et l'on obtiendra ensuite f_3, f_2, f_1 par des quadratures. En posant

$$F_1=f_1+\Phi_1, \qquad F_2=f_2+\Phi_2, \qquad F_3=f_3+\Phi_3, \qquad F_4=f_4+\Phi_4,$$

ces trois équations deviennent

$$\frac{\partial\Phi_3}{\partial q}=\frac{\partial\Phi_4}{\partial p}, \qquad \frac{\partial\Phi_2}{\partial p}=\frac{\partial\Phi_3}{\partial y}+q\frac{\partial\Phi_3}{\partial z}, \qquad \frac{\partial\Phi_1}{\partial q}=\frac{\partial\Phi_4}{\partial x}+p\frac{\partial\Phi_4}{\partial z};$$

on a vu plus haut (n° 2) que la solution la plus générale de ces équations était donnée par les formules

$$\Phi_3=\frac{\partial U}{\partial p}, \qquad\qquad \Phi_4=\frac{\partial U}{\partial q},$$

$$\Phi_1=\frac{\partial U}{\partial x}+p\frac{\partial U}{\partial z}+f(x, y, z, p), \qquad \Phi_2=\frac{\partial U}{\partial y}+q\frac{\partial U}{\partial z}+\varphi(x, y, z, q),$$

U étant une fonction arbitraire de x, y, z, p, q ; f une fonction de x, y, z, p, et φ une fonction de x, y, z, q.

Cela étant, posons, dans les équations (9),

$$
\begin{aligned}
F_1 &= f_1 + \frac{\partial U}{\partial x} + p\frac{\partial U}{\partial z} + f(x, y, z, p),\\
F_2 &= f_2 + \frac{\partial U}{\partial y} + q\frac{\partial U}{\partial z} + \varphi(x, y, z, q),\\
F_3 &= f_3 + \frac{\partial U}{\partial p},\\
F_4 &= f_4 + \frac{\partial U}{\partial q}.
\end{aligned}
$$

Les trois premières équations sont vérifiées identiquement, et il reste les quatre équations

$$
(24)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{df}{dy} - \frac{d\varphi}{dx} = R_{xy} + \frac{df_2}{dx} - \frac{df_1}{dy}, && \frac{\partial f}{\partial q} = 0,\\
&\frac{\partial f}{\partial p} - \frac{\partial \varphi}{\partial q} = S + \frac{\partial f_2}{\partial q} - \frac{\partial f_1}{\partial p} + \frac{df_3}{dx} - \frac{df_4}{dy}, && \frac{\partial \varphi}{\partial p} = 0.
\end{aligned}
\right.
$$

On retrouve ainsi un système de la forme (16). En appliquant les conditions d'intégrabilité de ce système, tout en tenant compte de ce que f_1, f_2, f_3, f_4 sont des intégrales des équations (23), on obtient par un calcul un peu long, mais qui ne présente pas de difficultés, les conditions d'intégrabilité du système général (9). Ces conditions sont les suivantes :

$$
(25)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{d}{dy}\left(\frac{\partial R_{xq}}{\partial p}\right) + \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial R_{yp}}{\partial q}\right) = \frac{\partial^2 R_{xy}}{\partial p\,\partial q} + \frac{d^2 R_{pq}}{dx\,dy} - \frac{\partial S}{\partial z},\\
&\frac{d}{dy}\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right) + \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial R_{yp}}{\partial p}\right) + \frac{d^2 R_{pq}}{dy^2} = \frac{\partial^2 R_{xy}}{\partial p^2} + \frac{d}{dy}\left(\frac{\partial R_{yp}}{\partial q}\right) - 2\frac{\partial R_{yp}}{\partial z},\\
&\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right) + \frac{d}{dy}\left(\frac{\partial R_{xq}}{\partial q}\right) + \frac{d^2 R_{pq}}{dx^2} = \frac{\partial^2 R_{xy}}{\partial q^2} + \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial R_{xq}}{\partial p}\right) - 2\frac{\partial R_{xq}}{\partial z},\\
&\frac{\partial^2 S}{\partial p\,\partial q} + \frac{d}{dy}\left(\frac{\partial R_{pq}}{\partial q}\right) + \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial R_{pq}}{\partial p}\right) = \frac{\partial^2 R_{xq}}{\partial p^2} + \frac{\partial^2 R_{yp}}{\partial q^2} - 3\frac{\partial R_{pq}}{\partial z},\\
&\frac{d^2 S}{dx\,dy} + \frac{d^2 R_{xq}}{dy^2} + \frac{d^2 R_{yp}}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial R_{xy}}{\partial p}\right) + \frac{d}{dy}\left(\frac{\partial R_{xy}}{\partial q}\right) - \frac{\partial R_{xy}}{\partial z}.
\end{aligned}
\right.
$$

Le calcul que nous venons de faire prouve que, si ces conditions sont satisfaites, les équations (9) admettent une infinité de systèmes de solutions que l'on obtiendra par des quadratures. Si l'on connaît un premier système de solutions, d'après ce qu'on a vu au n° 2, on obtiendra tous les autres systèmes de solutions

en remplaçant F_1, F_2, F_3, F_4 par

$$F_1 + \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial x} + p\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial z}, \quad F_2 + \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial y} + q\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial z}, \quad F_3 + \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial p}, \quad F_4 + \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial q},$$

respectivement, $\mathfrak{F}$ étant une fonction arbitraire de x, y, z, p, q.

5. Ayant obtenu F_1, F_2, F_3, F_4, pour avoir X, Y, P, Q, considérons la forme de Pfaff

$$(26) \qquad F_1\,dx + F_2\,dy + F_3\,dp + F_4\,dq + H(dz - p\,dx - q\,dy) + dK,$$

où H et K désignent deux fonctions arbitraires de x, y, z, p, q, et soit

$$(27) \qquad dZ + P\,dX + Q\,dY$$

une forme réduite pour cette expression. Si nous remplaçons partout dz par $p\,dx + q\,dy$, il vient

$$P\,\overline{dX} + Q\,\overline{dY} = F_1\,dx + F_2\,dy + F_3\,dp + F_4\,dq + \frac{d(K-Z)}{dx}dx + \frac{d(K-Z)}{dy}dy + \frac{\partial(K-Z)}{\partial p}dp + \frac{\partial(K-Z)}{\partial q}\partial q.$$

Quelles que soient les fonctions H et K, les fonctions

$$F_1 + \frac{d(K-Z)}{dx}, \quad F_2 + \frac{d(K-Z)}{dy}, \quad F_3 + \frac{\partial(K-Z)}{\partial p}, \quad F_4 + \frac{\partial(K-Z)}{\partial q}$$

forment un système de solutions des équations (9). Si donc nous prenons pour X, Y, P, Q les fonctions qui figurent dans la forme réduite (27), la condition d'intégrabilité de l'équation

$$dz' = P\,dX + Q\,dY$$

conduira précisément à l'équation (6). Cette équation peut donc s'obtenir d'une infinité de manières au moyen de formules de la forme (1), puisque les fonctions H et K restent arbitraires. Mais toutes les solutions ainsi obtenues ne sont pas essentiellement distinctes. En effet, remplaçons K par une autre fonction K_1, et soit

$$dZ_1 + P_1\,dX_1 + Q_1\,dY_1$$

une forme réduite pour la nouvelle forme de Pfaff, de telle sorte que l'on ait

$$dZ_1 + P_1\,dX_1 + Q_1\,dY_1 = dZ + P\,dX + Q\,dY + d(K_1 - K),$$

ou encore

$$d(Z_1 - Z - K_1 + K) + P_1\,dX_1 + Q_1\,dY_1 = P\,dX + Q\,dY. \tag{28}$$

En partant des formules

$$\left\{\begin{array}{ll} x'' = X_1(x, y, z, p, q), & y'' = Y_1(x, y, z, p, q), \\ p'' = P_1(x, y, z, p, q), & q'' = Q_1(x, y, z, p, q), \end{array}\right. \tag{29}$$

et, en écrivant la condition d'intégrabilité de $p''\,dx'' + q''\,dy''$, on est encore conduit à l'équation (6). Mais l'identité (28) prouve que X_1, Y_1, P_1, Q_1 sont des fonctions de X, Y, P, Q, et les formules

$$\begin{aligned} X_1 &= \psi_1(X, Y, P, Q), \\ Y_1 &= \psi_2(X, Y, P, Q), \\ P_1 &= \psi_3(X, Y, P, Q), \\ Q_1 &= \psi_4(X, Y, P, Q), \end{aligned}$$

qui expriment X_1, Y_1, P_1, Q_1 au moyen de X, Y, P, Q, définissent une transformation de contact [1] en (x, p). On passera donc des formules (1) aux formules (29) en effectuant une transformation de contact en (x, p) sur les variables x', y', p', q'. Nous ne considérons pas ces diverses solutions comme distinctes. Il est clair, en effet, que si $p'\,dx' + q'\,dy'$ est une différentielle exacte, il en est de même de $p''\,dx'' + q''\,dy''$. On voit de la même façon que les diverses formes réduites d'une même forme de Pfaff (26) ne sont pas essentiellement distinctes.

Nous pouvons donc supposer $K = 0$, et à toute fonction $H(x, y, z, p, q)$ correspond une forme de Pfaff

$$F_1\,dx + F_2\,dy + F_3\,dp + F_4\,dq + H(dz - p\,dx - q\,dy), \tag{30}$$

qui, ramenée à la forme canonique, fait connaître un système de formules (1) conduisant à l'équation (6). Les divers systèmes de formules correspondant aux diverses formes réduites de l'expression se ramènent à un seul par des transformations de contact en (x, p).

6. Une équation de Monge-Ampère étant donnée, pour qu'elle puisse s'obtenir de la façon qui vient d'être étudiée, il n'est pas nécessaire que ses coefficients vérifient les relations (25); il suffit que l'on puisse trouver un facteur λ, dépendant de x, y, z, p, q, tel qu'en multipliant tous les coefficients de l'équation

[1] *Voir*, par exemple, le Mémoire de M. Darboux, *Sur le problème de Pfaff* (*Bulletin des Sciences mathématiques*, 2e série, t. VI, p. 65).

proposée par ce facteur λ, on obtienne de nouveaux coefficients satisfaisant aux conditions (25). On a ainsi un système de *cinq* équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre pour déterminer le facteur inconnu λ. Il semble presque évident que ces équations doivent être incompatibles, si l'équation de Monge-Ampère donnée est absolument quelconque; on s'en assure aisément en examinant des cas particuliers.

Prenons, par exemple, une équation ne renfermant que x, y, z, p, q, r; on a

$$R_{pq}=0, \qquad R_{xq}=0, \qquad S=0,$$

et les équations (25) donnent les conditions

$$\frac{\partial^2 R_{yp}}{\partial q^2}=0, \qquad \frac{\partial^2 R_{xy}}{\partial q^2}=0,$$

de sorte que l'équation doit être bilinéaire en r et q.

Supposons encore que l'équation ne renferme ni r, ni t. On a, dans ce cas,

$$R_{pq}=R_{yp}=R_{xq}=0,$$

et les équations (25) donnent les conditions

$$\frac{\partial^2 S}{\partial p\,\partial q}=0, \qquad \frac{\partial^2 R_{xy}}{\partial p\,\partial q}=0,$$

de sorte que l'équation doit être de la forme

$$s=\frac{P+Q}{P_1+Q_1},$$

P et P_1 étant des fonctions de x, y, z, p et Q, Q_1 des fonctions de x, y, z, q.

Prenons encore l'équation

$$s+f(z)=0; \tag{31}$$

nous pouvons poser

$$R_{pq}=0, \qquad R_{yp}=0, \qquad R_{xq}=0, \qquad R_{xy}=\lambda f(z), \qquad S=\lambda,$$

λ étant un facteur inconnu, et les conditions (25) deviennent

$$\frac{\partial^2\lambda}{\partial p\,\partial q}=0, \qquad \frac{\partial^2(\lambda f(z))}{\partial p\,\partial q}=\frac{\partial\lambda}{\partial z},$$

$$\frac{d}{dy}\left(\frac{\partial\lambda}{\partial p}\right)=\frac{\partial^2(\lambda f(z))}{\partial p^2}, \qquad \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial\lambda}{\partial q}\right)=\frac{\partial^2(\lambda f(z))}{\partial q^2},$$

$$\frac{d^2\lambda}{dx\,dy}=\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial(\lambda f(z))}{\partial p}\right)+\frac{d}{dy}\left(\frac{\partial(\lambda f(z))}{dq}\right)-\frac{\partial(\lambda f(z))}{\partial z}.$$

Les deux premières montrent que λ doit être de la forme

$$\lambda = \varphi(x, y, p) + \psi(x, y, q);$$

les deux suivantes deviennent alors

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \, \partial p} = f(z) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial p^2}, \qquad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \, \partial q} = f(z) \frac{\partial^2 \psi}{\partial q^2}.$$

Si la fonction $f(z)$ ne se réduit pas à une constante, comme nous le supposons, il faudra que l'on ait

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \, \partial p} = 0, \qquad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial p^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \, \partial q} = 0, \qquad \frac{\partial^2 \psi}{\partial q^2} = 0,$$

et l'on aura, pour λ, une fonction de la forme

$$\lambda = \mathrm{X} p - \mathrm{Y} q + \mu(x, y).$$

La dernière condition devient

$$\frac{\partial^2 \mu}{\partial x \, \partial y} + \mu f'(z) = (\mathrm{X}' - \mathrm{Y}') f(z);$$

ou satisfait à cette équation en prenant $\mathrm{X}' = \mathrm{Y}' = \mathrm{C}$, $\mu = 0$. Pour qu'il y ait d'autres solutions il faudra que l'on ait aussi

$$\mu f''(z) = (\mathrm{X}' - \mathrm{Y}') f'(z),$$

c'est-à-dire que $\frac{f''(z)}{f'(z)}$ soit indépendant de z; la fonction $f(z)$ aura donc la forme

$$f(z) = az + b, \tag{32}$$

ou la forme

$$f(z) = e^{az+b}, \tag{33}$$

a et b étant des coefficients constants. Dans le premier cas on devra avoir

$$\mathrm{X}' = \mathrm{Y}' = \mathrm{C}, \qquad \frac{\partial^2 \mu}{\partial x \, \partial y} + a\mu = 0,$$

et dans le second cas

$$\mu = \frac{\mathrm{X}' - \mathrm{Y}'}{a},$$

les fonctions X, Y restant arbitraires.

II.

7. Tout système de formules de la forme (1) conduit bien à une équation de Monge-Ampère pour déterminer les surfaces (Σ) décrites par l'élément (x, y, z, p, q), auxquelles correspondent des surfaces (Σ') décrites par l'élément (x', y', z', p', q'). Mais les surfaces (Σ') elles-mêmes ne sont pas en général les intégrales d'une équation du second ordre, car on déduit des relations (1) deux équations simultanées du troisième ordre pour définir z' en fonction de x' et de y', lorsque les fonctions X, Y, P, Q sont quelconques. Nous sommes donc conduits à examiner la question suivante. Les fonctions F_1, F_2, F_3, F_4 étant connues, comment faut-il prendre la fonction H pour qu'en ramenant l'expression

$$F_1\,dx + F_2\,dy + F_3\,dp + F_4\,dq + H(dz - p\,dx - q\,dy) \tag{34}$$

à une forme réduite

$$dZ + P\,dX + Q\,dY,$$

les formules

$$\left\{\begin{array}{ll} x' = X(x, y, z, p, q), & y' = Y(x, y, z, p, q), \\ p' = P(x, y, z, p, q), & q' = Q(x, y, z, p, q) \end{array}\right. \tag{35}$$

définissent une transformation de Bäcklund?

Nous rappellerons d'abord quelques propositions bien connues qui jouent un rôle important dans la théorie du problème de Pfaff (¹). Étant donnée l'expression différentielle

$$\Theta_d = X_1\,dx_1 + X_2\,dx_2 + \ldots + X_n\,dx_n, \tag{36}$$

où $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont des fonctions données de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, le système d'équations différentielles

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}\,dx_1 + \ldots + a_{n1}\,dx_n = 0, \\ a_{12}\,dx_1 + \ldots + a_{n2}\,dx_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{1n}\,dx_1 + \ldots + a_{nn}\,dx_n = 0, \end{array}\right. \tag{37}$$

où l'on a posé

$$a_{ik} = \frac{\partial X_i}{\partial x_k} - \frac{\partial X_k}{\partial x_i},$$

(¹) Darboux, *Sur le problème de Pfaff* (*Bulletin des Sciences mathématiques*, 2ᵉ série, t. VI, 1882).

est un *système invariant* associé à la forme de Pfaff (36). Si l'on remplace les n variables x_i par n variables indépendantes nouvelles y_i, la forme Θ_d se change en une forme analogue

$$Y_1\, dy_1 + Y_2\, dy_2 + \ldots + Y_n\, dy_n,$$

où $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ sont des fonctions de $y_1, y_2, \ldots, y_n$, et le système (37) est remplacé par un système de même forme

$$\begin{array}{l} b_{11}\, dy_1 + \ldots + b_{n1}\, dy_n = 0, \\ b_{12}\, dy_1 + \ldots + b_{n2}\, dy_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ b_{1n}\, dy_1 + \ldots + b_{nn}\, dy_n = 0, \end{array}$$

où

$$b_{ik} = \frac{\partial Y_i}{\partial y_k} - \frac{\partial Y_k}{\partial y_i}.$$

Dans le cas de la forme (34), le nombre des variables indépendantes est égal à 5. Les équations (37) se réduisent à quatre équations distinctes, car le déterminant

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & a_{41} & a_{51} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & a_{42} & a_{52} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{43} & a_{53} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} & a_{54} \\ a_{15} & a_{25} & a_{35} & a_{45} & a_{55} \end{vmatrix}$$

est un déterminant de Pfaff d'ordre impair, d'après les relations évidentes

$$a_{ii} = 0, \qquad a_{ik} + a_{ki} = 0.$$

Nous supposerons qu'elles se réduisent à *quatre* équations distinctes, et non à un nombre moindre. Elles admettent alors quatre intégrales distinctes, dont il est facile d'avoir la signification. En effet, l'expression (34) étant supposée ramenée à l'une des formes réduites,

$$dZ + P\, dX + Q\, dY, \quad P\, dX + Q\, dY,$$

le système invariant (37) se réduit pour l'une ou l'autre de ces deux formes à

$$dX = 0, \qquad dY = 0, \qquad dP = 0, \qquad dQ = 0;$$

les fonctions X, Y, P, Q, qui figurent dans la forme réduite, sont donc des intégrales du système invariant (37), et toute autre intégrale de ce système est une fonction arbitraire de X, Y, P, Q. Si la forme (34) pouvait être ramenée à l'une des deux formes

$$dZ + P\,dX, \quad P\,dX,$$

le système invariant correspondant se réduirait à deux équations distinctes seulement qui s'écriraient avec les variables de la forme réduite

$$dX = 0, \qquad dP = 0.$$

C'est le cas exceptionnel que nous laissons de côté.

Le système invariant qui correspond à l'expression (34) est

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial F_1}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial x} + q\frac{\partial H}{\partial x} - p\frac{\partial H}{\partial y}\right) dy + \left(\frac{\partial F_1}{\partial p} - \frac{\partial F_3}{\partial x} - H - p\frac{\partial H}{\partial p}\right) dp \\
&\qquad\qquad + \left(\frac{\partial F_1}{\partial q} - p\frac{\partial H}{\partial q} - \frac{\partial F_4}{\partial x}\right) dq + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{dH}{dx}\right) dz = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} - q\frac{\partial H}{\partial x} + p\frac{\partial H}{\partial y}\right) dx + \left(\frac{\partial F_2}{\partial p} - \frac{\partial F_3}{\partial y} - q\frac{\partial H}{\partial p}\right) dp \\
&\qquad\qquad + \left(\frac{\partial F_2}{\partial q} - q\frac{\partial H}{\partial q} - H - \frac{\partial F_4}{\partial y}\right) dq + \left(\frac{\partial F_2}{\partial z} - \frac{dH}{dy}\right) dz = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial F_3}{\partial x} + H + p\frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial F_1}{\partial p}\right) dx + \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} + q\frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial F_2}{\partial p}\right) dy \\
&\qquad\qquad + \left(\frac{\partial F_3}{\partial q} - \frac{\partial F_4}{\partial p}\right) dq + \left(\frac{\partial F_3}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial p}\right) dz = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial F_4}{\partial x} + p\frac{\partial H}{\partial q} - \frac{\partial F_1}{\partial q}\right) dx + \left(\frac{\partial F_4}{\partial y} + H + q\frac{\partial H}{\partial q} - \frac{\partial F_2}{\partial q}\right) dy \\
&\qquad\qquad + \left(\frac{\partial F_4}{\partial p} - \frac{\partial F_3}{\partial q}\right) dp + \left(\frac{\partial F_4}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial q}\right) dz = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{dH}{dx} - \frac{\partial F_1}{\partial z}\right) dx + \left(\frac{dH}{dy} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right) dy \\
&\qquad\qquad + \left(\frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial F_3}{\partial z}\right) dp + \left(\frac{\partial H}{\partial q} - \frac{\partial F_4}{\partial z}\right) dq = 0;
\end{aligned}$$

ce système peut encore s'écrire, en ajoutant à la première équation la dernière

multipliée par p, et à la seconde équation la dernière multipliée par q,

$$(38)\quad \begin{cases} \left(\frac{dF_1}{dy} - \frac{dF_2}{dx}\right) dy + \left(\frac{\partial F_1}{\partial p} - H - \frac{dF_3}{dx}\right) dp \\ \qquad + \left(\frac{\partial F_1}{\partial q} - \frac{dF_4}{dx}\right) dq + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{dH}{dx}\right)(dz - p\,dx - q\,dy) = 0, \\ \left(\frac{dF_2}{dx} - \frac{dF_1}{dy}\right) dx + \left(\frac{\partial F_2}{\partial p} - \frac{dF_3}{dy}\right) dp \\ \qquad + \left(\frac{\partial F_2}{\partial q} - H - \frac{dF_4}{dy}\right) dq + \left(\frac{\partial F_2}{\partial z} - \frac{dH}{dy}\right)(dz - p\,dx - q\,dy) = 0, \\ \left(\frac{dF_3}{dx} + H - \frac{\partial F_1}{\partial p}\right) dx + \left(\frac{dF_3}{dy} - \frac{\partial F_2}{\partial p}\right) dy \\ \qquad + \left(\frac{\partial F_3}{\partial q} - \frac{\partial F_4}{\partial p}\right) dq + \left(\frac{\partial F_3}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial p}\right)(dz - p\,dx - q\,dy) = 0, \\ \left(\frac{dF_4}{dx} - \frac{\partial F_1}{\partial q}\right) dx + \left(\frac{dF_4}{dy} + H - \frac{\partial F_2}{\partial q}\right) dy \\ \qquad + \left(\frac{\partial F_4}{\partial p} - \frac{\partial F_3}{\partial q}\right) dp + \left(\frac{\partial F_4}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial q}\right)(dz - p\,dx - q\,dy) = 0, \\ \left(\frac{dH}{dx} - \frac{\partial F_1}{\partial z}\right) dx + \left(\frac{dH}{dy} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right) dy \\ \qquad + \left(\frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial F_3}{\partial z}\right) dp + \left(\frac{\partial H}{\partial q} - \frac{\partial F_4}{\partial z}\right) dq = 0. \end{cases}$$

Rappelons encore les propriétés suivantes des transformations de Bäcklund [1] : Si les formules (35) définissent une transformation de Bäcklund, elle peut être une transformation B_2 ou une transformation B_3. Elle sera une transformation B_2 si à un élément (x', y', z', p', q') correspondent ∞^1 éléments unis (x, y, z, p, q), c'est-à-dire si le déterminant

$$\begin{vmatrix} \frac{dX}{dx} & \frac{dX}{dy} & \frac{\partial X}{\partial p} & \frac{\partial X}{\partial q} \\ \frac{dY}{dx} & \frac{dY}{dy} & \frac{\partial Y}{\partial p} & \frac{\partial Y}{\partial q} \\ \frac{dP}{dx} & \frac{dP}{dy} & \frac{\partial P}{\partial p} & \frac{\partial P}{\partial q} \\ \frac{dQ}{dx} & \frac{dQ}{dy} & \frac{\partial Q}{\partial p} & \frac{\partial Q}{\partial q} \end{vmatrix}$$

est nul. Cette égalité exprime que X, Y, P, Q sont des intégrales d'une équation

(1) *Voir* la Thèse de M. Clairin; Ire Partie.

linéaire de la forme

$$A\frac{dV}{dx} + B\frac{dV}{dy} + C\frac{\partial V}{\partial p} + D\frac{\partial V}{\partial q} = 0,$$

A, B, C, D étant des fonctions de x, y, z, p, q. Les caractéristiques de cette équation sont données par le système d'équations différentielles

$$\frac{dx}{A} = \frac{dy}{B} = \frac{dz}{Ap + Bq} = \frac{dp}{C} = \frac{dq}{D},$$

et l'on voit que ces caractéristiques doivent satisfaire à la relation

$$dz - p\,dx - q\,dy = 0,$$

c'est-à-dire qu'elles forment des multiplicités M_2 d'éléments unis. Or, si X, Y, P, Q sont les fonctions qui figurent dans la forme réduite correspondant à l'équation (34), les équations

$$X = C_1, \qquad Y = C_2, \qquad P = C_3, \qquad Q = C_4$$

représentent l'intégrale générale du système (38). Il faudra donc que les équations (38) entraînent la relation $dz - p\,dx - q\,dy = 0$, et cette condition est suffisante. Si l'on remplace dz par $p\,dx + q\,dy$ dans ces équations, elles devront se réduire à trois relations distinctes entre dx, dy, dp, dq. Pour cela, il faut d'abord que l'on ait

$$(39)\quad \begin{vmatrix} 0 & \frac{dF_1}{dy} - \frac{dF_2}{dx} & \frac{\partial F_1}{\partial p} - \frac{dF_3}{dx} - H & \frac{\partial F_1}{\partial q} - \frac{dF_4}{dx} \\ \frac{dF_2}{dx} - \frac{dF_1}{dy} & 0 & \frac{\partial F_2}{\partial p} - \frac{dF_3}{dy} & \frac{\partial F_2}{\partial q} - \frac{dF_4}{dy} - H \\ \frac{dF_3}{dx} + H - \frac{\partial F_1}{\partial p} & \frac{dF_3}{dy} - \frac{\partial F_2}{\partial p} & 0 & \frac{\partial F_3}{\partial q} - \frac{\partial F_4}{\partial p} \\ \frac{dF_4}{dx} - \frac{\partial F_1}{\partial p} & \frac{dF_4}{dy} + H - \frac{\partial F_2}{\partial q} & \frac{\partial F_4}{\partial p} - \frac{\partial F_3}{\partial q} & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Nous avons là un déterminant de Pfaff d'ordre pair, et par conséquent un carré parfait. En l'égalant à zéro, nous obtenons, pour déterminer H, une équation du second degré

$$(40)\quad \left(\frac{dF_1}{dy} - \frac{dF_2}{dx}\right)\left(\frac{\partial F_3}{\partial q} - \frac{\partial F_4}{\partial p}\right) + \left(\frac{\partial F_2}{\partial p} - \frac{dF_3}{dy}\right)\left(\frac{\partial F_1}{\partial q} - \frac{dF_4}{dx}\right) = \left(\frac{\partial F_1}{\partial p} - \frac{dF_3}{dx} - H\right)\left(\frac{\partial F_2}{\partial q} - \frac{dF_4}{dy} - H\right);$$

cette condition est suffisante, car tous les mineurs du premier ordre du déterminant précédent seront nuls aussi, et les quatre premières des équations (38) se réduiront à deux seulement.

En résumé, pour que la forme de Pfaff (34) conduise à une transformation de Bäcklund B_2, il faut et il suffit que H soit racine de l'équation (40).

8. Cherchons maintenant à quelles conditions les formules (1) définissent une transformation de Bäcklund B_3. De ces équations on déduit, en différentiant, les relations

$$\begin{aligned} dx' &= \frac{dX}{dx}dx + \frac{dX}{dy}dy + \frac{\partial X}{\partial p}dp + \frac{\partial X}{\partial q}dq, \\ dy' &= \frac{dY}{dx}dx + \frac{dY}{dy}dy + \frac{\partial Y}{\partial p}dp + \frac{\partial Y}{\partial q}dq, \\ r'\,dx' + s'\,dy' &= \frac{dP}{dx}dx + \frac{dP}{dy}dy + \frac{\partial P}{\partial p}dp + \frac{\partial P}{\partial q}dq, \\ s'\,dx' + t'\,dy' &= \frac{dQ}{dx}dx + \frac{dQ}{dy}dy + \frac{\partial Q}{\partial p}dp + \frac{\partial Q}{\partial q}dq, \end{aligned}$$

qui permettent d'exprimer dx, dy, dp, dq en fonction de dx', dy', ou encore dx', dy', dp, dq en fonction de dx et de dy. En écrivant que le coefficient de dy dans dp est égal au coefficient de dx dans dq, on est conduit à la condition suivante, donnée par Bäcklund sous la forme la plus générale [1] :

$$(41)\quad [X, Y](r't' - s'^2) - [X, Q]r' + [Y, P]t' + [P, Q] + \{[X, P] - [Y, Q]\}s' = 0,$$

$[u, v]$ désignant le crochet jacobien

$$\begin{aligned}[u, v] = &\frac{\partial u}{\partial p}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + p\frac{\partial v}{\partial z}\right) + \frac{\partial u}{\partial q}\left(\frac{\partial v}{\partial y} + q\frac{\partial v}{\partial z}\right) \\ &- \frac{\partial v}{\partial p}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + p\frac{\partial u}{\partial z}\right) - \frac{\partial v}{\partial q}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + q\frac{\partial u}{\partial z}\right).\end{aligned}$$

Pour que les formules (1) définissent une transformation de Bäcklund B_3, il faut et il suffit que les rapports des coefficients de l'équation (41) ne dépendent que de X, Y, P, Q, ce qui fournit quatre conditions auxquelles doivent satisfaire les fonctions X, Y, P, Q.

Si ces fonctions étaient connues, il serait toujours facile de s'assurer si ces conditions sont vérifiées. Mais, dans le problème qui nous occupe, X, Y, P, Q ne peuvent pas être considérées comme des fonctions connues de x, y, z, p, q;

---

[1] *Voir* Darboux, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, t. III, p. 440.

nous savons seulement que ce sont les fonctions qui figurent dans la forme réduite de l'expression de Pfaff (34), où le coefficient H de dz est lui-même indéterminé.

Pour lever la difficulté, on peut employer l'artifice suivant, qui n'exige pas de trop longs calculs. Supposons que l'expression de Pfaff (34) soit du type indéterminé, de façon que la forme réduite soit

$$dZ + P\,dX + Q\,dY,$$

X, Y, P, Q, Z étant cinq fonctions indépendantes de x, y, z, p, q; nous poserons

$$U(f) = \frac{\partial f}{\partial Z}, \tag{42}$$

$$V(\varphi, \psi) = \frac{D(\varphi, \psi)}{D(X, Y)}[X, Y] + \frac{D(\varphi, \psi)}{D(X, Q)}[X, Q] + \frac{D(\varphi, \psi)}{D(Y, P)}[Y, P] + \frac{D(\varphi, \psi)}{D(P, Q)}[P, Q] + \frac{1}{2}\left\{\frac{D(\varphi, \psi)}{D(X, P)} - \frac{D(\varphi, \psi)}{D(Y, Q)}\right\}\{[X, P] - [Y, Q]\}, \tag{43}$$

f, φ, ψ étant des fonctions quelconques de X, Y, Z, P, Q. Si les rapports des cinq expressions

$$[X, Y], \quad [X, Q], \quad [Y, P], \quad [P, Q], \quad [X, P] - [Y, Q] \tag{44}$$

ne dépendent que de X, Y, P, Q, les deux équations où l'on regarde φ comme inconnue :

$$U(\varphi) = 0, \qquad V(\varphi, \psi) = 0, \tag{45}$$

formeront toujours un système complet, pourvu que l'on prenne pour ψ une intégrale quelconque de l'équation

$$U(\psi) = 0;$$

en effet, dans l'équation $V(\varphi, \psi) = 0$, les rapports des coefficients de $\frac{\partial \varphi}{\partial X}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial Y}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial P}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial Q}$ seront indépendants de Z, pourvu que la fonction ψ soit elle-même indépendante de Z. Réciproquement, si les équations (45) forment un système complet toutes les fois que ψ est indépendant de Z, les rapports des cinq expressions (44) doivent être indépendants de Z. On s'en assure aisément en faisant, par exemple, successivement $\psi = X$, $\psi = Y$, $\psi = P$, $\psi = Q$. La condition précédente est donc nécessaire et suffisante pour que les formules (1) définissent une transformation de Bäcklund.

Le principe de la méthode étant expliqué, nous allons chercher ce que devient

le système (45) quand on passe des variables X, Y, Z, P, Q aux variables x, y, z, p, q. Les intégrales de l'équation $U(f) = 0$ sont précisément X, Y, P, Q, de sorte que les équations différentielles des caractéristiques doivent être identiques aux équations (38). Si f est une intégrale de $U(f) = 0$, la relation $df = 0$, ou

$$\frac{df}{dx}dx + \frac{df}{dy}dy + \frac{\partial f}{\partial p}dp + \frac{\partial f}{\partial q}dq + \frac{\partial f}{\partial z}(dz - p\,dx - q\,dy) = 0,$$

doit être une conséquence des relations (38). Les quatre premières de ces relations sont distinctes si H n'est pas racine de l'équation (40) et, par suite, l'équation $\frac{\partial f}{\partial Z} = 0$ devient, avec les variables x, y, z, p, q,

$$(46)\quad \begin{vmatrix} 0 & \frac{dF_1}{dy} - \frac{dF_2}{dx} & \frac{\partial F_1}{\partial p} - H - \frac{dF_3}{dx} & \frac{\partial F_1}{\partial q} - \frac{dF_4}{dx} & \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{dH}{dx} \\ \frac{dF_2}{dx} - \frac{dF_1}{dy} & 0 & \frac{\partial F_2}{\partial p} - \frac{dF_3}{dy} & \frac{\partial F_2}{\partial q} - H - \frac{dF_4}{dy} & \frac{\partial F_2}{\partial z} - \frac{dH}{dy} \\ \frac{dF_3}{dx} + H - \frac{\partial F_1}{\partial p} & \frac{dF_3}{dy} - \frac{\partial F_2}{\partial p} & 0 & \frac{\partial F_3}{\partial q} - \frac{\partial F_4}{\partial p} & \frac{\partial F_3}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial p} \\ \frac{dF_4}{dx} - \frac{\partial F_1}{\partial q} & \frac{dF_4}{dy} + H - \frac{\partial F_2}{\partial q} & \frac{\partial F_4}{\partial p} - \frac{\partial F_3}{\partial q} & 0 & \frac{\partial F_4}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial q} \\ \frac{df}{dx} & \frac{df}{dy} & \frac{\partial f}{\partial p} & \frac{\partial f}{\partial q} & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

9. Avant de nous occuper de l'équation $V(\varphi, \psi) = 0$, nous établirons d'abord quelques relations auxiliaires. Nous poserons, pour abréger,

$$(47)\quad \begin{cases} \frac{dX}{dx} = a_0, \quad \frac{dX}{dy} = b_0, \quad \frac{\partial X}{\partial p} = d_0, \quad \frac{\partial X}{\partial q} = c_0, \quad \frac{dY}{dx} = a_1, \quad \frac{dY}{dy} = b_1, \quad \frac{\partial Y}{\partial p} = d_1, \quad \frac{\partial Y}{\partial q} = c_1, \\ \frac{dP}{dx} = a_3, \quad \frac{dP}{dy} = b_3, \quad \frac{\partial P}{\partial p} = d_3, \quad \frac{\partial P}{\partial q} = c_3, \quad \frac{dQ}{dx} = a_2, \quad \frac{dQ}{dy} = b_2, \quad \frac{\partial Q}{\partial p} = d_2, \quad \frac{\partial Q}{\partial q} = c_2, \\ (ad)_{ij} = a_i d_j - a_j d_i, \qquad (ab)_{ij} = a_i b_j - a_j b_i, \qquad \ldots \qquad (i, j = 0, 1, 2, 3). \end{cases}$$

Les expressions telles que $(ad)_{ij}$ sont liées par un certain nombre de relations dont nous aurons besoin; on les obtient facilement comme il suit. Désignons par u_1, u_2, u_3, u_4 quatre indéterminées, et posons

$$(48)\quad \begin{cases} v_1 = a_0 u_1 + b_0 u_2 + c_0 u_3 + d_0 u_4, \\ v_2 = a_1 u_1 + b_1 u_2 + c_1 u_3 + d_1 u_4, \\ v_3 = a_2 u_1 + b_2 u_2 + c_2 u_3 + d_2 u_4, \\ v_4 = a_3 u_1 + b_3 u_2 + c_3 u_3 + d_3 u_4; \end{cases}$$

on tire de ces formules

$$d_3 v_1 + d_2 v_2 - d_1 v_3 - d_0 v_4 = [(ad)_{03} + (ad)_{12}]\, u_1 + [(bd)_{03} + (bd)_{12}]\, u_2 + [(cd)_{03} + (cd)_{12}]\, u_3,$$
$$c_3 v_1 + c_2 v_2 - c_1 v_3 - c_0 v_4 = [(ac)_{03} + (ac)_{12}]\, u_1 + [(bc)_{03} + (bc)_{12}]\, u_2 + [(dc)_{03} + (dc)_{12}]\, u_4,$$
$$b_3 v_1 + b_2 v_2 - b_1 v_3 - b_0 v_4 = [(ab)_{03} + (ab)_{12}]\, u_1 + [(cb)_{03} + (cb)_{12}]\, u_3 + [(db)_{03} + (db)_{12}]\, u_4,$$
$$a_3 v_1 + a_2 v_2 - a_1 v_3 - a_0 v_4 = [(ba)_{03} + (ba)_{12}]\, u_2 + [(ca)_{03} + (ca)_{12}]\, u_3 + [(da)_{03} + (da)_{12}]\, u_4.$$

En multipliant respectivement ces dernières formules par a_i, b_i, $-c_i$, $-d_i$, on obtient quatre nouvelles formules, dont nous n'écrirons que la première

$$(49) \quad [(ad)_{03} + (bc)_{03}]v_1 + [(ad)_{02} + (bc)_{02}]v_2 - [(ad)_{01} + (bc)_{01}]v_3$$
$$= [(ad)_{03} + (ad)_{12}](a_0 u_1 + d_0 u_4) + [(bd)_{03} + (bd)_{12}](a_0 u_2 + c_0 u_4]$$
$$+ [(cd)_{03} + (cd)_{12}](a_0 u_3 - b_0 u_4) + [(ac)_{03} + (ac)_{12}](b_0 u_1 + d_0 u_3]$$
$$+ [(bc)_{03} + (bc)_{12}](b_0 u_2 + c_0 u_4) + [(ab)_{03} + (ab)_{12}](d_0 u_2 - c_0 u_2].$$

En donnant aux indéterminées u_1, u_2, u_3, u_4 des valeurs particulières, on peut obtenir des relations qui nous seront utiles. Si, par exemple, nous prenons $u_1 = d_1$, $u_2 = c_1$, $u_3 = -b_1$, $u_4 = -a_1$, on a

$$v_1 = (ad)_{01} + (bc)_{01}, \qquad v_2 = 0, \qquad v_3 = (ad)_{21} + (bc)_{21},$$

et la relation (49) devient

$$(50) \quad [(ad)_{01} + (bc)_{01}][(ad)_{03} + (bc)_{03} + (ad)_{12} + (bc)_{12}]$$
$$= [(cd)_{03} + (cd)_{12}](ba)_{01} + [(bd)_{03} + (bd)_{12}](ac)_{01} + [(ac)_{03} + (ac)_{12}](bd)_{01}$$
$$+ [(ab)_{03} + (ab)_{12}](dc)_{01} + [(ad)_{03} + (ad)_{12}](ad)_{01} + [(bc)_{03} + (bc)_{12}](bc)_{01}.$$

Si nous faisons de même dans l'identité (49)

$$u_1 = d_3, \qquad u_2 = c_3, \qquad u_3 = -b_3, \qquad u_4 = -a_3,$$

il vient

$$v_1 = (ad)_{03} + (bc)_{03}, \qquad v_2 = (ad)_{13} + (bc)_{13}, \qquad v_3 = (ad)_{23} + (bc)_{23}, \qquad v_4 = 0,$$

et l'on a une nouvelle relation

$$(51) \quad [(ad)_{03} + (bc)_{03}]^2 + [(ad)_{02} + (bc)_{02}][(ad)_{13} + (bc)_{13}]$$
$$- [(ad)_{01} + (bc)_{01}][(ad)_{23} + (bc)_{23}]$$
$$= [(cd)_{03} + (cd)_{12}](ba)_{03} + [(bd)_{03} + (bd)_{12}](ac)_{03}$$
$$+ [(ac)_{03} + (ac)_{12}](bd)_{03} + [(ab)_{03} + (ab)_{12}](dc)_{03}$$
$$+ [(ad)_{03} + (ad)_{12}](ad)_{03} + [(bc)_{03} + (bc)_{12}](bc)_{03}.$$

De ces relations (50) et (51), il serait facile d'en déduire d'autres par des permutations de lettres ou d'indices.

10. Cela posé, considérons l'équation

$$(52)\quad \begin{aligned} W(\varphi,\psi) = {} & [(cd)_{30}+(cd)_{21}]\,\Delta_{xy}(\varphi,\psi)+[(bd)_{30}+(bd)_{21}]\,\Delta_{xq}(\varphi,\psi) \\ & +[(ac)_{03}+(ac)_{12}]\,\Delta_{yp}(\varphi,\psi)+[(ab)_{03}+(ab)_{12}]\,\Delta_{pq}(\varphi,\psi) \\ & +\tfrac{1}{2}[(ad)_{03}+(ad)_{12}-(bc)_{03}-(bc)_{12}]\,\{\Delta_{xp}(\varphi,\psi)-\Delta_{yq}(\varphi,\psi)\}=0, \end{aligned}$$

où l'on a posé

$$\Delta_{xy}(\varphi,\psi)=\frac{d\varphi}{dx}\frac{d\psi}{dy}-\frac{d\varphi}{dy}\frac{d\psi}{dx},\quad \Delta_{xq}(\varphi,\psi)=\frac{d\psi}{dx}\frac{\partial\varphi}{\partial q}-\frac{d\varphi}{dx}\frac{\partial\psi}{\partial q},\quad \Delta_{yp}(\varphi,\psi)=\frac{d\varphi}{dy}\frac{\partial\psi}{\partial p}-\frac{d\psi}{dy}\frac{\partial\varphi}{\partial p},$$

$$\Delta_{pq}(\varphi,\psi)=\frac{\partial\varphi}{\partial p}\frac{\partial\psi}{\partial q}-\frac{\partial\varphi}{\partial q}\frac{\partial\psi}{\partial p},\quad \Delta_{xp}(\varphi,\psi)=\frac{d\varphi}{dx}\frac{\partial\psi}{\partial p}-\frac{d\psi}{dx}\frac{\partial\varphi}{\partial p},\quad \Delta_{yq}(\varphi,\psi)=\frac{d\varphi}{dy}\frac{\partial\psi}{\partial q}-\frac{d\psi}{dy}\frac{\partial\varphi}{\partial q}.$$

Cherchons ce que devient cette équation quand on prend pour variables X, Y, P, Q; nous supposerons que les fonctions φ et ψ sont des intégrales de l'équation (46) ou, ce qui revient au même, de l'équation $U(f)=0$. Ces fonctions sont, par conséquent, indépendantes de Z. On a

$$\begin{aligned} \frac{D(\varphi,\psi)}{D(x,y)} = {} & \frac{D(\varphi,\psi)}{D(X,Y)}\frac{D(X,Y)}{D(x,y)}+\frac{D(\varphi,\psi)}{D(X,P)}\frac{D(X,P)}{D(x,y)}+\frac{D(\varphi,\psi)}{D(X,Q)}\frac{D(X,Q)}{D(x,y)} \\ & +\frac{D(\varphi,\psi)}{D(Y,P)}\frac{D(Y,P)}{D(x,y)}+\frac{D(\varphi,\psi)}{D(Y,Q)}\frac{D(Y,Q)}{D(x,y)}+\frac{D(\varphi,\psi)}{D(P,Q)}\frac{D(P,Q)}{D(x,y)}, \end{aligned}$$

et de même pour $\frac{D(\varphi,\psi)}{D(x,p)}$, ... Le coefficient de $\frac{D(\varphi,\psi)}{D(X,Y)}$ dans $W(\varphi,\psi)$ est donc

$$\begin{aligned} & [(cd)_{30}+(cd)_{21}]\left\{\frac{D(X,Y)}{D(x,y)}+\frac{D(X,Y)}{D(z,x)}p+\frac{D(X,Y)}{D(y,z)}q\right\} \\ & +[(bd)_{03}+(bd)_{12}]\left\{\frac{D(X,Y)}{D(x,q)}+p\frac{D(X,Y)}{D(z,q)}\right\} \\ & +[(ac)_{03}+(ac)_{12}]\left\{\frac{D(X,Y)}{D(y,p)}+q\frac{D(X,Y)}{D(z,p)}\right\}+[(ab)_{03}+(ab)_{12}]\frac{D(X,Y)}{D(p,q)} \\ & +\tfrac{1}{2}[(ad)_{03}+(ad)_{12}-(bc)_{03}-(bc)_{12}]\left\{\frac{D(X,Y)}{D(x,p)}+p\frac{D(X,Y)}{D(z,p)}-\frac{D(X,Y)}{D(y,q)}-q\frac{D(X,Y)}{D(z,q)}\right\}, \end{aligned}$$

c'est-à-dire, d'après les notations (47),

$$\begin{aligned} & [(cd)_{03}+(cd)_{12}](ba)_{01}+[(bd)_{03}+(bd)_{12}](ac)_{01} \\ & \qquad +[(ac)_{03}+(ac)_{12}](bd)_{01}+[(ab_{03})+(ab)_{12}](dc)_{01} \\ & \qquad +\tfrac{1}{2}[(ad)_{03}+(ad)_{12}-(bc)_{03}-(bc)_{12}][(ad)_{01}-(bc)_{01}]. \end{aligned}$$

En tenant compte de la relation (50), on voit aisément que ce coefficient est égal à

$$\tfrac{1}{2}[(ad)_{03}+(bc)_{03}+(ad)_{12}+(bc)_{12}]\{(ad)_{01}+(bc)_{01}\}.$$

On verrait de même que les coefficients de $\frac{D(\varphi,\psi)}{D(X,Q)}$, $\frac{D(\varphi,\psi)}{D(Y,P)}$, $\frac{D(\varphi,\psi)}{D(P,Q)}$ dans $W(\varphi,\psi)$ sont respectivement

$$\text{Pour } \frac{D(\varphi,\psi)}{D(X,Q)}\cdots \quad \tfrac{1}{2}[(ad)_{03}+(bc)_{03}+(ad)_{12}+(bc)_{12}]\{(ad)_{02}+(bc)_{02}\},$$

$$\text{Pour } \frac{D(\varphi,\psi)}{D(Y,P)}\cdots \quad \tfrac{1}{2}[(ad)_{03}+(bc)_{03}+(ad)_{12}+(bc)_{12}]\{(ad)_{13}+(bc)_{13}\},$$

$$\text{Pour } \frac{D(\varphi,\psi)}{D(P,Q)}\cdots \quad \tfrac{1}{2}[(ad)_{03}+(bc)_{03}+(ad)_{12}+(bc)_{12}]\{(ad)_{32}+(bc)_{32}\}.$$

Quant aux coefficients de $\frac{D(\varphi,\psi)}{D(X,P)}$ et de $\frac{D(\varphi,\psi)}{D(Y,P)}$, on vérifie aisément, au moyen de l'identité (51) et de celle que l'on en déduit en permutant les indices 0 et 3, 1 et 2, que la différence de ces coefficients est

$$\tfrac{1}{2}[(ad)_{03}+(bc)_{03}+(ad)_{12}+(bc)_{12}][(ad)_{03}+(bc)_{03}-(ad)_{12}-(bc)_{12}],$$

tandis que la somme de ces coefficients est égale à δ :

$$\begin{aligned}\delta = {} & \tfrac{1}{2}[(ad)_{03}+(bc)_{03}-(ad)_{12}-(bc)_{12}]^2 \\ & +2[(ad)_{02}+(bc)_{02}]\;[(ad)_{13}+(bd)_{13}] \\ & -2[(ad)_{01}+(bc)_{01}]\;[(ad)_{23}+(bc)_{23}].\end{aligned} \tag{53}$$

Posons encore

$$h=(ad)_{03}+(bc)_{03}+(ad)_{12}+(bc)_{12}=-[X,P]-[Y,Q], \tag{54}$$

et observons que l'on a

$$(ad)_{01}+(bc)_{01}=-[X,Y],\qquad (ad)_{02}+(bc)_{02}=-[X,Q],$$
$$(ad)_{13}+(bc)_{13}=-[Y,P],\qquad (ad)_{32}+(bc)_{32}=-[P,Q],$$
$$(ad)_{03}+(bc)_{03}-(ad)_{12}-(bc)_{12}=[Y,Q]-[X,P];$$

d'après les calculs que nous venons de faire, nous avons l'identité

$$W(\varphi,\psi)=\frac{-h}{2}V(\varphi,\psi)+\frac{\delta}{2}\left\{\frac{D(\varphi,\psi)}{D(X,P)}+\frac{D(\varphi,\psi)}{D(Y,Q)}\right\}. \tag{55}$$

D'autre part, on a identiquement

$$[\varphi, \psi] = \frac{D(\varphi, \psi)}{D(X, Y)}[X, Y] + \frac{D(\varphi, \psi)}{D(X, Q)}[X, Q] + \frac{D(\varphi, \psi)}{D(Y, P)}[Y, P]$$
$$+ \frac{D(\varphi, \psi)}{D(P, Q)}[P, Q] + \frac{D(\varphi, \psi)}{D(X, P)}[X, P] + \frac{D(\varphi, \psi)}{D(Y, Q)}[Y, Q],$$

ce qui peut encore s'écrire

$$(56) \qquad [\varphi, \psi] = V(\varphi, \psi) - \frac{h}{2}\left\{\frac{D(\varphi, \psi)}{D(X, P)} + \frac{D(\varphi, \psi)}{D(Y, Q)}\right\}.$$

Des deux équations (55) et (56) on tire

$$(57) \qquad \left(\delta - \frac{h^2}{2}\right)V(\varphi, \psi) = \delta[\varphi, \psi] + hW(\varphi, \psi),$$

et il ne nous reste plus qu'à montrer que tous les coefficients du second membre de la formule (57) s'expriment au moyen des coefficients de la forme de Pfaff (34). On a d'abord, en se reportant aux formules (7),

$$(cd)_{30} + (cd)_{21} = \frac{D(X, P)}{D(p, q)} + \frac{D(Y, Q)}{D(p, q)} = R_{pq},$$

$$(bd)_{30} + (bd)_{21} = -\frac{dX}{dy}\frac{\partial P}{\partial p} + \frac{dP}{dy}\frac{\partial X}{\partial p} - \frac{dY}{dy}\frac{\partial Q}{\partial p} + \frac{dQ}{dy}\frac{\partial Y}{\partial p} = R_{yp},$$

$$(ac)_{03} + (ac)_{12} = \frac{dX}{dx}\frac{\partial P}{\partial q} - \frac{dP}{dx}\frac{\partial X}{\partial q} + \frac{dY}{dx}\frac{\partial Q}{\partial q} - \frac{dQ}{dx}\frac{\partial Y}{\partial q} = R_{xq},$$

$$(ab)_{03} + (ab)_{12} = \frac{dX}{dx}\frac{dP}{dy} - \frac{dX}{dy}\frac{dP}{dx} + \frac{dY}{dx}\frac{dQ}{dy} - \frac{dY}{dy}\frac{dQ}{dx} = R_{xy},$$

$$(ab)_{03} + (ad)_{12} - (bc)_{03} - (bc)_{12} = \frac{dX}{dx}\frac{\partial P}{\partial p} - \frac{dP}{dx}\frac{\partial X}{\partial p} + \dots\dots\dots\dots = S,$$

de sorte que l'on peut encore écrire

$$(58) \qquad W(\varphi, \psi) = R_{pq}\Delta_{xy}(\varphi, \psi) + R_{yp}\Delta_{xq}(\varphi, \psi)$$
$$+ R_{xq}\Delta_{yp}(\varphi, \psi) + R_{xy}\Delta_{pq}(\varphi, \psi) + \frac{S}{2}\left\{\Delta_{xp}(\varphi, \psi) - \Delta_{yq}(\varphi, \psi)\right\}.$$

D'autre part, de l'identité

$$dZ + P\,dX + Q\,dY = F_1\,dx + F_2\,dy + F_3\,dp + F_4\,dq + H(dz - p\,dx - q\,dy),$$

on tire facilement

$$(59) \qquad h = [P, X] + [Q, Y] = \frac{\partial F_1}{\partial p} - \frac{\partial F_3}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial q} - \frac{dF_4}{dy} - 2H.$$

Pour calculer δ, observons que si l'on permute les indices 0 et 1, 2 et 3 dans la formule (51), et si l'on ajoute les deux formules, l'égalité obtenue peut s'écrire

$$\begin{aligned}
&[(ad)_{03}+(bc)_{03}-(ad)_{12}-(bc)_{12}]^2+4[(ad)_{02}+(bc)_{02}][(ad)_{13}+(bc)_{13}] \\
&\qquad\qquad -4[(ad)_{01}+(bc)_{01}][(ad)_{23}+(bc)_{23}] \\
&=[(ad)_{03}+(ad)_{12}-(bc)_{03}-(bc)_{12}]^2+4[(ab)_{03}+(ab)_{12}][(dc)_{03}+(dc)_{12}] \\
&\qquad\qquad +4[(bd)_{03}+(bd)_{12}][(ac)_{03}+(ac)_{12}],
\end{aligned}$$

et l'on en tire

$$\delta=\tfrac{1}{2}\{S^2+4R_{xy}R_{pq}-4R_{yp}R_{xq}\}. \tag{60}$$

Quant au coefficient $\delta-\dfrac{h^2}{2}$ de $V(\varphi,\psi)$ dans la formule (57), on vérifie sans peine qu'il est égal au déterminant des seize quantités a_i, b_i, c_i, d_i.

L'équation $V(\varphi,\psi)=0$, où l'on suppose que φ et ψ ne dépendent que de X, Y, P, Q, est donc remplacée par l'équation

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{2}\{S^2+4R_{xy}R_{pq}-4R_{yp}R_{xq}\}[\varphi,\psi] \\
&\quad+\left\{\frac{\partial F_1}{\partial p}-\frac{dF_3}{dx}+\frac{\partial F_2}{\partial q}-\frac{dF_4}{dy}-2H\right\}W(\varphi,\psi)=0,
\end{aligned} \tag{61}$$

où entrent seulement les variables x, y, z, p, q et les coefficients F_1, F_2, F_3, F_4, H de la forme de Pfaff (34); R_{pq}, R_{xy}, R_{yp}, R_{xq}, S sont données par les formules (7). L'équation $U(f)=0$ est de même remplacée par l'équation (46).

Remarques. — Le résultat précédent donne lieu à quelques remarques. Si $h=0$, l'équation (61) se réduit à $[\varphi,\psi]=0$; ce résultat pouvait être prévu, car on a alors $[X,P]+[Y,Q]=0$, et $V(\varphi,\psi)$ est identique à $[\varphi,\psi]$. Pour que l'équation (61) se réduise de même à $W(\varphi,\psi)=0$, il faut et il suffit que le coefficient de $[\varphi,\psi]$ soit nul, c'est-à-dire que l'équation de Monge-Ampère (6) ait ses deux systèmes de caractéristiques confondus.

On peut observer encore que le coefficient de $[\varphi,\psi]$ est un invariant de l'équation (6) relativement à une transformation de contact quelconque, tandis que $W(\varphi,\psi)$ est un covariant de la même équation relativement à ces transformations. Les deux relations

$$[\varphi,\psi]=0, \qquad W(\varphi,\psi)=0$$

expriment les conditions nécessaires et suffisantes pour que les deux équations

$$\varphi=C, \qquad \psi=C'$$

forment un système complètement intégrable, dont toutes les intégrales appartiennent à l'équation (6).

11. L'équation (46) développée donne de même, après suppression d'un facteur commun différent de zéro, et en remplaçant f par φ,

$$
\begin{aligned}
(62) \qquad & R_{pq}\left\{\frac{d\varphi}{dx}\left[\frac{\partial F_2}{\partial z}-\frac{dH}{dy}\right]-\frac{d\varphi}{dy}\left[\frac{\partial F_1}{\partial z}-\frac{dH}{dx}\right]\right\} \\
& + S_{yq}\left\{\frac{d\varphi}{dx}\left[\frac{\partial F_3}{\partial z}-\frac{\partial H}{\partial p}\right]-\frac{\partial\varphi}{\partial p}\left[\frac{\partial F_1}{\partial z}-\frac{dH}{dx}\right]\right\} \\
& + R_{yp}\left\{\frac{\partial\varphi}{\partial q}\left[\frac{\partial F_1}{\partial z}-\frac{dH}{dx}\right]-\frac{d\varphi}{dx}\left[\frac{\partial F_4}{\partial z}-\frac{\partial H}{\partial q}\right]\right\} \\
& + R_{xq}\left\{\frac{\partial\varphi}{\partial y}\left[\frac{dF_3}{dz}-\frac{\partial H}{\partial q}\right]-\frac{\partial\varphi}{\partial p}\left[\frac{\partial F_2}{\partial z}-\frac{dH}{dy}\right]\right\} \\
& + S_{xp}\left\{\frac{d\varphi}{dy}\left[\frac{\partial F_4}{\partial z}-\frac{\partial H}{\partial q}\right]-\frac{\partial\varphi}{\partial q}\left[\frac{\partial F_2}{\partial z}-\frac{dH}{dy}\right]\right\} \\
& + R_{xy}\left\{\frac{\partial\varphi}{\partial p}\left[\frac{\partial F_4}{\partial z}-\frac{\partial H}{\partial q}\right]-\frac{\partial\varphi}{\partial q}\left[\frac{\partial F_3}{\partial z}-\frac{\partial H}{\partial p}\right]\right\} \\
& + [R_{xy}R_{pq}-R_{xq}R_{yp}-S_{xp}S_{yq}]\frac{\partial\varphi}{\partial z}=0;
\end{aligned}
$$

on a posé

$$S_{xp}=\frac{\partial F_1}{\partial p}-\frac{dF_3}{dz}-H, \qquad S_{yq}=\frac{\partial F_2}{\partial q}-\frac{dF_4}{dy}-H,$$

de façon que l'on a encore

$$
\begin{aligned}
& S_{xp}-S_{yq}=S, \\
& S_{xp}+S_{yq}=\frac{\partial F_1}{\partial p}-\frac{dF_3}{dx}+\frac{\partial F_2}{\partial q}-\frac{dF_4}{dy}-2H.
\end{aligned}
$$

Nous sommes maintenant en mesure de résoudre la question proposée, qui se ramène en définitive à celle-ci : *Trouver les conditions pour que les deux équations* (61) et (62), *où φ est la fonction inconnue, forment un système complet toutes les fois que ψ est une intégrale de l'équation* (62).

C'est un cas particulier d'un problème plus général dont la solution est bien aisée. Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$ un système de n variables indépendantes et un système de deux équations linéaires

$$(63) \qquad M(\varphi)=X_1\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}+X_2\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}+\ldots+X_n\frac{\partial\varphi}{\partial x_n}=0,$$

$$(64) \qquad L(\varphi)=l_1(\psi)\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}+l_2(\psi)\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}+\ldots+l_n(\psi)\frac{\partial\varphi}{\partial x_n}=0,$$

$$l_i(\psi)=\alpha_{i1}\frac{\partial\psi}{\partial x_1}+\alpha_{i2}\frac{\partial\psi}{\partial x_2}+\ldots+\alpha_{in}\frac{\partial\psi}{\partial x_n},$$

où les coefficients X_i et α_{ik} sont des fonctions des n variables indépendantes x_1, $x_2, \ldots, x_n$, vérifiant les relations

$$(65)\qquad \alpha_{ii}=0, \qquad \alpha_{ik}+\alpha_{ki}=0.$$

Cherchons à quelles conditions les deux équations $L(\varphi)=0$, $M(\varphi)=0$ forment un système complet toutes les fois que l'on a $M(\psi)=0$. Formons l'équation

$$L(M(\varphi))-M(L(\varphi))=0;$$

le coefficient de $\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}$ dans cette équation est

$$L(X_i)-M(l_i(\psi))$$

ou, puisqu'on suppose que ψ est une intégrale de $M(\psi)=0$,

$$L(X_i)+l_i(M(\psi))-M(l_i(\psi)),$$

c'est-à-dire

$$l_1(\psi)\frac{\partial X_i}{\partial x_1}+l_2(\psi)\frac{\partial X_i}{\partial x_2}+\ldots+l_n(\psi)\frac{\partial X_i}{\partial x_n}+\sum_{k=1}^{k=n}\{l_i(X_k)-M(\alpha_{ik})\}\frac{\partial\psi}{\partial x_k}.$$

C'est encore une forme linéaire $m_i(\psi)$, et le coefficient de $\frac{\partial\psi}{\partial x_k}$ dans cette expression est

$$\alpha_{1k}\frac{\partial X_i}{\partial x_1}+\alpha_{2k}\frac{\partial X_i}{\partial x_2}+\ldots+\alpha_{nk}\frac{\partial X_i}{\partial x_n}+l_i(X_k)-M(\alpha_{ik})$$

ou, d'après les relations (65),

$$l_i(X_k)-l_k(X_i)-M(\alpha_{ik}).$$

Nous poserons donc

$$(66)\qquad m_i(\psi)=\sum_{k=1}^{n}\{l_i(X_k)-l_k(X_i)-M(\alpha_{ik})\}\frac{\partial\psi}{\partial x_k},$$

$$(67)\qquad N(\varphi)=m_1(\psi)\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}+m_2(\psi)\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}+\ldots+m_n(\psi)\frac{\partial\varphi}{\partial x_n};$$

l'équation $N(\varphi)=0$ doit être une combinaison linéaire des équations (63) et (64), pour que celles-ci forment un système complet. Il faut, pour cela, que tous les déterminants du troisième ordre déduits du Tableau

$$\begin{vmatrix} l_1(\psi) & l_2(\psi) & \ldots & l_n(\psi) \\ m_1(\psi) & m_2(\psi) & \ldots & m_n(\psi) \\ X_1 & X_2 & \ldots & X_n \end{vmatrix}$$

soient nuls lorsque ψ est une intégrale de l'équation $M(\psi)=0$.

12. En appliquant cette méthode au système formé par les équations (62) et (61), on sera conduit à un certain nombre de conditions auxquelles devra satisfaire la fonction inconnue $H(x, y, z, p, q)$; ces conditions renfermeront, en général, les dérivées partielles du second ordre de H. Je laisse de côté dans ce travail l'étude de ce système dans le cas général, et je me bornerai à quelques cas particuliers.

En premier lieu, remarquons que lorsque les coefficients de l'équation de Monge-Ampère proposée (6) ne renferment pas l'inconnue z, si les conditions (25) sont satisfaites, on peut obtenir pour F_1, F_2, F_3, F_4 des fonctions indépendantes de z. En prenant pour H une constante $H = A$, l'expression de Pfaff

$$F_1\, dx + F_2\, dy + F_3\, dp + F_4\, dq + A(dz - p\, dx - q\, dy)$$

admettra pour forme réduite une expression de la forme

$$d(Az) + P\, dX + Q\, dY,$$

X, Y, P, Q ne dépendant que de x, y, p, q. On aura donc une infinité de transformations B_3, dépendant d'une constante arbitraire A et conduisant à l'équation proposée. Les formules qui définissent la transformation ne renferment ni z, ni z'.

Considérons encore des formules de la forme (15) :

$$(15) \qquad x' = x, \qquad y' = y; \qquad p' = f(x, y, z, p), \qquad q' = \varphi(x, y, z, q);$$

pour qu'elles définissent une transformation B_2, il faut que x, y, f, φ soient des intégrales d'une équation de la forme

$$A\left(\frac{\partial V}{\partial x} + p\frac{\partial V}{\partial z}\right) + B\left(\frac{\partial V}{\partial y} + q\frac{\partial V}{\partial z}\right) + C\frac{\partial V}{\partial p} + D\frac{\partial V}{\partial q} = 0.$$

Il est clair que l'on doit avoir

$$A = B = 0$$

et, par suite,

$$C\frac{\partial f}{\partial p} = 0, \qquad D\frac{\partial \varphi}{\partial q} = 0.$$

Comme C et D ne peuvent être nuls à la fois, f doit être indépendant de p ou φ indépendant de q. La réciproque est évidente, pourvu que celle des fonctions f, φ qui ne contient pas les dérivées de z contienne z.

Il est facile de trouver directement à quelle condition les formules (15) définissent une transformation B_3; en effet, on tire de ces formules

$$s' = \frac{df}{dy} + \frac{\partial f}{\partial p}s = \frac{d\varphi}{dx} + \frac{\partial \varphi}{\partial q}s$$

et, par suite,

$$s'\left(\frac{\partial f}{\partial p} - \frac{\partial \varphi}{\partial q}\right) = \frac{\partial f}{\partial p}\frac{d\varphi}{dx} - \frac{\partial \varphi}{\partial q}\frac{df}{dy} = [f, \varphi].$$

Il faudra donc que le rapport

$$\frac{[f, \varphi]}{\dfrac{\partial f}{\partial p} - \dfrac{\partial \varphi}{\partial q}}$$

soit une fonction des quatre quantités x, y, f, φ seulement, ce qui résulte aussi de la formule générale (41) du n° 8.

III.

13. Nous allons appliquer la méthode générale à l'équation linéaire

$$s + ap + bq + cz = 0, \tag{68}$$

où a, b, c sont des fonctions des variables indépendantes x et y, et chercher les transformations de Bäcklund de la forme (15) qui conduisent à cette équation. Le premier problème à résoudre est de déterminer un multiplicateur λ tel que, en multipliant l'équation par λ, les coefficients de la nouvelle équation vérifient les conditions (18), où

$$R = \lambda(ap + bq + cz), \qquad S = \lambda.$$

Elles donnent d'abord

$$\frac{\partial^2 \lambda}{\partial p\, \partial q} = 0,$$

de sorte que λ doit être de la forme

$$\lambda = P + Q,$$

P étant une fonction de x, y, z, p, et Q une fonction de x, y, z, q. La relation $\dfrac{\partial^2 R}{\partial p\, \partial q} = \dfrac{\partial S}{\partial z}$ donne ensuite

$$\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\partial Q}{\partial z} = a\frac{\partial Q}{\partial q} + b\frac{\partial P}{\partial p},$$

ou

$$\frac{\partial P}{\partial z} - b\frac{\partial P}{\partial p} = a\frac{\partial Q}{\partial q} - \frac{\partial Q}{\partial z};$$

le premier membre de cette égalité étant indépendant de q, et le second membre indépendant de p, il s'ensuit que cette expression est une fonction $\mu(x, y, z)$

pour qu'elles soient compatibles, il faut et il suffit que l'on ait

$$2h - 2k = \frac{\partial^2 \log h}{\partial x \, \partial y}. \tag{75}$$

Cette condition exprime que les invariants de l'équation adjointe de l'équation linéaire (68) sont identiques à ceux de l'équation obtenue par une des transformations de Laplace [1]. On peut alors, en changeant z en ρz, ramener l'équation à la forme

$$s - \frac{1}{2}\frac{\partial \log \nu}{\partial x} q - \nu z = 0, \tag{76}$$

ν étant une fonction de x, y, qui peut être quelconque. Les équations qui déterminent v sont alors

$$\frac{\partial \log v}{\partial x} = -\frac{\partial \log \nu}{\partial x}, \qquad \frac{\partial \log v}{\partial y} = -\frac{\partial \log \nu}{\partial y}$$

et l'équation (68) admet le multiplicateur

$$\lambda = \frac{C}{\nu} q + \mu(x, y), \tag{77}$$

C étant un facteur constant et $\mu(x, y)$ une solution de l'équation adjointe.

Examinons maintenant le cas où les deux fonctions u et v sont différentes de zéro. Si l'on change z en $\rho z'$, l'équation linéaire proposée (68) est remplacée par l'équation

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z'}{\partial x \, \partial y} &+ \left(a + \frac{\partial \log \rho}{\partial y}\right)\frac{\partial z'}{\partial x} \\ &+ \left(b + \frac{\partial \log \rho}{\partial x}\right)\frac{\partial z'}{\partial y} + \frac{z'}{\rho}\left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial x \, \partial y} + a\frac{\partial \rho}{\partial x} + b\frac{\partial \rho}{\partial y} + c\rho\right) = 0, \end{aligned} \tag{78}$$

tandis que le multiplicateur $up + vq + (av + bu)z$ est remplacé par le nouveau multiplicateur

$$u\frac{\partial z'}{\partial x} + v\frac{\partial z'}{\partial y} + \left(a + \frac{\partial \log \rho}{\partial y}\right) v z' + \left(b + \frac{\partial \log \rho}{\partial x}\right) u z';$$

on voit que u et v n'ont pas changé, tandis que a et b sont remplacés par $a + \frac{\partial \log \rho}{\partial y}$ et $b + \frac{\partial \log \rho}{\partial x}$. On peut donc choisir ρ de telle façon que l'on ait

$$\left(a + \frac{\partial \log \rho}{\partial y}\right) v + \left(b + \frac{\partial \log \rho}{\partial x}\right) u = 0;$$

[1] Voir *Bulletin de la Société mathématique*, t. XXV, 1897, p. 36.

afin de ne pas multiplier les notations, nous supposerons qu'on a effectué cette transformation au préalable, de façon que les équations (70) et (71) admettent un système de solutions pour lequel on a

$$av + bu = 0. \tag{79}$$

La première équation (71) se réduit alors à

$$\frac{\partial(cu)}{\partial x} + \frac{\partial(cv)}{\partial y} = 0, \tag{80}$$

et ne renferme plus que c. Supposons que a et b ne soient pas nuls à la fois; on peut poser, d'après la formule (79),

$$u = a\xi, \qquad v = -b\xi;$$

les relations (70) deviennent alors

$$\frac{\partial \log\xi}{\partial y} = 2a - \frac{\partial \log a}{\partial y}, \qquad \frac{\partial \log\xi}{\partial x} = 2b - \frac{\partial \log b}{\partial x}, \tag{81}$$

et la condition d'intégrabilité est

$$2\frac{\partial a}{\partial x} - \frac{\partial^2 \log a}{\partial x\,\partial y} = 2\frac{\partial b}{\partial y} - \frac{\partial^2 \log b}{\partial x\,\partial y}. \tag{82}$$

Pour avoir les expressions générales des fonctions a et b satisfaisant à cette condition, posons

$$\xi a = \alpha, \qquad \xi b = \beta;$$

les formules (81) peuvent s'écrire

$$2a = \frac{\partial \log\alpha}{\partial y}, \qquad 2b = \frac{\partial \log\beta}{\partial x},$$

et l'on en tire, en divisant membre à membre,

$$\frac{\frac{\partial\alpha}{\partial y}}{\alpha^2} = \frac{\frac{\partial\beta}{\partial x}}{\beta^2};$$

$\frac{1}{\alpha}$ et $\frac{1}{\beta}$ sont donc les dérivées partielles d'une fonction $\nu(x,y)$,

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{\partial\nu}{\partial x}, \qquad \frac{1}{\beta} = \frac{\partial\nu}{\partial y},$$

et l'on a, par conséquent,

$$(83) \qquad a = -\frac{1}{2}\,\frac{\dfrac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}}{\dfrac{\partial v}{\partial x}}, \qquad b = -\frac{1}{2}\,\frac{\dfrac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}}{\dfrac{\partial v}{\partial y}}.$$

On a ensuite, à un facteur constant près,

$$\xi = \frac{1}{\dfrac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}}, \qquad u = -\frac{1}{2}\,\frac{1}{\dfrac{\partial v}{\partial x}}, \qquad v = \frac{1}{2}\,\frac{1}{\dfrac{\partial v}{\partial y}},$$

et l'équation qui détermine c est de la forme

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{c}{\dfrac{\partial v}{\partial x}}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{c}{\dfrac{\partial v}{\partial y}}\right) = 0.$$

Cette relation exprime que c est un facteur intégrant pour l'équation différentielle

$$\frac{dx}{\dfrac{\partial v}{\partial y}} + \frac{dy}{\dfrac{\partial v}{\partial x}} = 0;$$

on a donc

$$c = \frac{\partial v}{\partial x}\,\frac{\partial v}{\partial y}\,\psi(v),$$

et l'équation linéaire proposée (68) est de la forme

$$(84) \qquad s - \frac{1}{2}\,\frac{\dfrac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}}{\dfrac{\partial v}{\partial x}}\,p - \frac{1}{2}\,\frac{\dfrac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}}{\dfrac{\partial v}{\partial y}}\,q + \psi(v)\,\frac{\partial v}{\partial x}\,\frac{\partial v}{\partial y}\,z = 0.$$

D'après le calcul qui vient d'être fait, cette équation admet le multiplicateur

$$(85) \qquad \lambda = C\left(\frac{p}{\dfrac{\partial v}{\partial x}} - \frac{q}{\dfrac{\partial v}{\partial y}}\right) + \mu(x,y),$$

C étant un facteur constant et $\mu(x,y)$ une intégrale de l'équation adjointe [1].

14. En définitive, si nous laissons de côté les équations admettant un invariant nul, les seules équations linéaires pour lesquelles il existe un multiplicateur autre

[1] Ce résultat s'applique encore lorsque a et b sont nuls. Il suffit de prendre pour $v(x,y)$ une fonction de la forme $v = f(x) + \varphi(y)$.

qu'une solution de l'équation adjointe peuvent être ramenées à l'une des deux formes (76) ou (84).

Dans le cas général, l'application de la méthode précédente conduit tout naturellement à des transformations connues, comme nous l'indiquerons rapidement. Soit $\mu(x,y)$ une solution de l'équation adjointe; l'équation

$$\mu(s + ap + bq + cz) = 0$$

provient des deux équations

$$\left\{\begin{array}{l} p' = f(x, y, z, p), \\ q' = \varphi(x, y, z, q), \end{array}\right. \tag{86}$$

pourvu que l'on ait

$$\frac{\partial f}{\partial p} - \frac{\partial \varphi}{\partial q} = \mu, \qquad \frac{df}{dy} - \frac{d\varphi}{dx} = \mu(ap + bq + cz).$$

La solution générale de ces deux équations est donnée par les formules (*voir* n° 3)

$$\left\{\begin{array}{l} p' = f = \frac{\mu}{2} p + \left(\mu b - \frac{1}{2}\frac{\partial \mu}{\partial x}\right) z + \frac{\partial H}{\partial z} p + \frac{\partial H}{\partial x}, \\ q' = \varphi = -\frac{\mu}{2} q + \left(\frac{1}{2}\frac{\partial \mu}{\partial y} - \mu a\right) z + \frac{\partial H}{\partial z} q + \frac{\partial H}{\partial y}, \end{array}\right. \tag{86 bis}$$

H étant une fonction arbitraire de x, y, z.

Les formules (80) définissent une transformation de Bäcklund B_2, pourvu que la fonction f soit indépendante de p, ou la fonction φ indépendante de q (n° 12). Il faut et il suffit pour cela que H soit de la forme $\frac{\mu}{2} z + \nu(x, y)$, ou de la forme $-\frac{\mu}{2} z + \nu(x, y)$.

On obtient ainsi deux classes de transformations B_2, conduisant à l'équation linéaire considérée; les formules qui les définissent peuvent s'écrire, en négligeant une transformation de contact,

$$\left\{\begin{array}{l} p' = \left(\mu b - \frac{\partial \mu}{\partial x}\right) z, \\ q' = -\mu q - \mu a z \end{array}\right. \quad \text{ou} \quad \left\{\begin{array}{l} p' = -\mu p - \mu b z, \\ q' = \left(a\mu - \frac{\partial \mu}{\partial y}\right) z; \end{array}\right.$$

l'élimination de z conduit aussi à une équation linéaire en z' [1].

Pour que les formules (86 *bis*) définissent une transformation B_3, la fonc-

[1] *Voir* les *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, de M. Darboux (t. II), ou mes *Leçons sur les équations aux dérivées partielles du second ordre*, t. II, p. 271 et suivantes.

tion $H(x, y, z)$ doit satisfaire à une équation de condition (n° 12), qui doit être compatible avec les relations

$$\frac{\partial H}{\partial p} = 0, \qquad \frac{\partial H}{\partial q} = 0;$$

on aperçoit facilement un cas où ces trois équations se réduisent à une seule : c'est celui où H est de la forme $K(x, y)z$. Les formules (82) deviennent alors

$$(87) \qquad \begin{cases} p' = \left(\frac{\mu}{2} + K\right)p + \left(\mu b - \frac{1}{2}\frac{\partial \mu}{\partial x} + \frac{\partial K}{\partial x}\right)z, \\ q' = \left(-\frac{\mu}{2} + K\right)q + \left(\frac{1}{2}\frac{\partial \mu}{\partial y} - \mu a + \frac{\partial K}{\partial y}\right)z. \end{cases}$$

D'une manière générale, si l'on a

$$f = ap + bz, \qquad \varphi = a_1 q + b_1 z,$$

a, b, a_1, b_1 étant des fonctions de x, y, la condition pour que le crochet $[f, \varphi]$ soit une fonction de x, y, f, φ est exprimée, comme on le voit aisément, par la relation

$$(88) \qquad \frac{\partial\left(\frac{b}{a}\right)}{\partial y} = \frac{\partial\left(\frac{b_1}{a_1}\right)}{\partial x}.$$

En appliquant cette condition aux formules (82), on obtient une équation du second ordre pour déterminer $K(x, y)$. L'intégration de cette équation du second ordre se ramène à celle de l'équation linéaire proposée. En effet, la relation (83) exprime précisément que les équations

$$ap + bz = 0, \qquad a_1 q + b_1 z = 0$$

sont compatibles. Si z_1 est une intégrale commune, il est clair que les formules (87) peuvent s'écrire

$$p' = \left(\frac{\mu}{2} + K\right)z_1 \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{z}{z_1}\right),$$

$$q' = \left(K - \frac{\mu}{2}\right)z_1 \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{z}{z_1}\right),$$

et $z = z_1$ doit être une intégrale de l'équation correspondante en z.

Connaissant z_1, on obtiendra K au moyen des deux relations

$$\left(\frac{\mu}{2} + K\right)p_1 + \left(\mu b - \frac{1}{2}\frac{\partial \mu}{\partial x} + \frac{\partial K}{\partial x}\right)z_1 = 0,$$

$$\left(K - \frac{\mu}{2}\right)q_1 + \left(\frac{1}{2}\frac{\partial \mu}{\partial y} - \mu a + \frac{\partial K}{\partial y}\right)z_1 = 0,$$

qui donneront K par une quadrature. On retrouve ainsi des transformations bien connues [1].

15. Considérons maintenant une équation de la forme

$$s-\frac{1}{2}\frac{\partial \log \nu}{\partial x}q-\nu z=0, \tag{89}$$

qui admet le multiplicateur

$$\lambda=\frac{-2q}{\nu}+\mu(x,y),$$

$\mu(x,y)$ étant une solution de l'équation adjointe. On satisfait aux équations

$$\frac{\partial f}{\partial p}-\frac{\partial \varphi}{\partial q}=-\frac{2q}{\nu}+\mu(x,y),$$

$$\frac{df}{dy}-\frac{d\varphi}{dx}=\left\{-\frac{2q}{\nu}+\mu(x,y)\right\}\left\{-\frac{1}{2}\frac{\partial \log \nu}{\partial x}q-\nu z\right\}$$

en posant (n° 3)

$$\left\{\begin{aligned} p'&=f=\frac{\mu}{2}p-\frac{1}{2}\left\{\mu\frac{\partial \log \nu}{\partial x}+\frac{\partial \mu}{\partial x}\right\}z+\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial z}p+\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial x}+z^2,\\ q'&=\varphi=-\frac{\mu}{2}q+\frac{1}{2}\frac{\partial \mu}{\partial y}z+\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial z}q+\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial y}+\frac{q^2}{\nu}. \end{aligned}\right. \tag{90}$$

Ces formules définissent une transformation B_2 si H est égal à $\pm\frac{\mu}{2}z$.

Prenons, par exemple, $\mathrm{H}=-\frac{\mu z}{2}$; elles deviennent

$$p'=-\left(\frac{1}{2}\mu\frac{\partial \log \nu}{\partial x}+\frac{\partial \mu}{\partial x}\right)z+z^2,$$

$$q'=-\mu q+\frac{q^2}{\nu},$$

ce que l'on peut encore écrire :

$$\left\{\begin{aligned} p'&=\left[z-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mu}{\partial x}+\frac{1}{2}\mu\frac{\partial \log \nu}{\partial x}\right)\right]^2-\frac{1}{4}\left(\frac{\partial \mu}{\partial x}+\frac{1}{2}\mu\frac{\partial \log \nu}{\partial x}\right)^2,\\ q'&=\frac{1}{\nu}\left(q-\frac{\mu\nu}{2}\right)^2-\frac{\mu^2\nu}{4}. \end{aligned}\right. \tag{91}$$

---

[1] *Équations du second ordre*, t. II, p. 274-280. On s'assure aisément qu'il n'y a pas d'autres transformations B_3 de la forme (15) conduisant à l'équation (68).

Remarquons maintenant qu'en tenant compte de l'équation adjointe

$$\frac{\partial^2 \mu}{\partial x \, \partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial \mu}{\partial y} \frac{\partial \log \nu}{\partial x} + \frac{1}{2} \mu \frac{\partial^2 \log \nu}{\partial x \, \partial y} = \nu \mu,$$

on peut poser

$$\frac{1}{4} \int \left(\frac{\partial \mu}{\partial x} + \frac{1}{2} \mu \frac{\partial \log \nu}{\partial x} \right)^2 dx + \mu^2 \nu \, dy = du,$$

et, en changeant $z' + u$ en z', les formules (91) deviennent

$$(92) \qquad \begin{cases} p' = \left[z - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mu}{\partial x} + \frac{1}{2} \mu \frac{\partial \log \nu}{\partial x} \right) \right]^2, \\ q' = \frac{1}{\nu} \left(q - \frac{\mu \nu}{2} \right)^2. \end{cases}$$

On a aussi, d'après l'équation adjointe,

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \mu}{\partial x} + \frac{1}{2} \mu \frac{\partial \log \nu}{\partial x} \right) = \mu \nu,$$

et, en posant

$$z - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mu}{\partial x} + \frac{1}{2} \mu \frac{\partial \log \nu}{\partial x} \right) = Z,$$

les formules (92) peuvent encore s'écrire

$$(93) \qquad p' = Z^2, \qquad q' = \frac{1}{\nu} \left(\frac{\partial Z}{\partial y} \right)^2.$$

L'élimination de Z conduit à l'équation

$$(94) \qquad \left(\frac{\partial^2 z'}{\partial x \, \partial y} \right)^2 = 4 \nu \frac{\partial z'}{\partial x} \frac{\partial z'}{\partial y};$$

on voit donc que, quelle que soit la solution μ de l'équation adjointe que l'on adopte, l'élimination de z entre les deux équations (91) conduit à une équation du second ordre, que l'on ramène à l'équation (94) par un simple changement de la fonction inconnue. C'est une transformation que j'avais déjà étudiée en supposant $\mu = 0$ (1).

On pourrait aussi chercher si, en choisissant convenablement la fonction $H(x, y, z)$, les formules (90) peuvent définir une transformation B_3; en faisant le calcul, on arrive à des équations incompatibles.

---

(1) *Bulletin de la Société mathématique*, t. XXV, 1897, p. 36.

16. Il nous reste à étudier les équations de la forme (84) :

$$s - \frac{1}{2}\,\frac{\dfrac{\partial^2 \nu}{\partial x\,\partial y}}{\dfrac{\partial \nu}{\partial x}}\,p - \frac{1}{2}\,\frac{\dfrac{\partial^2 \nu}{\partial x\,\partial y}}{\dfrac{\partial \nu}{\partial y}}\,q + \psi(\nu)\,\frac{\partial \nu}{\partial x}\,\frac{\partial \nu}{\partial y}\,z = 0. \tag{84}$$

Cette équation peut encore être simplifiée; en effet, si l'on pose

$$z = f(\nu)\,Z,$$

elle se change en une équation de même forme :

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x\,\partial y} - \frac{1}{2}\,\frac{\dfrac{\partial^2 \sigma}{\partial x\,\partial y}}{\dfrac{\partial \sigma}{\partial x}}\,\frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{1}{2}\,\frac{\dfrac{\partial^2 \sigma}{\partial x\,\partial y}}{\dfrac{\partial \sigma}{\partial y}}\,\frac{\partial Z}{\partial y} + \{f(\nu)\,\psi(\nu) + f''(\nu)\}\,\frac{\partial \nu}{\partial x}\,\frac{\partial \nu}{\partial y}\,Z = 0,$$

où l'on a posé

$$\sigma(\nu) = \int \frac{d\nu}{[f(\nu)]^2}.$$

Si l'on a pris pour la fonction $f(\nu)$ une intégrale de l'équation

$$f''(\nu) + f(\nu)\,\psi(\nu) = 0,$$

l'équation (84) prend la forme réduite

$$s - \frac{1}{2}\,\frac{\dfrac{\partial^2 \sigma}{\partial x\,\partial y}}{\dfrac{\partial \sigma}{\partial x}}\,p - \frac{1}{2}\,\frac{\dfrac{\partial^2 \sigma}{\partial x\,\partial y}}{\dfrac{\partial \sigma}{\partial y}}\,q = 0. \tag{95}$$

Elle admet le multiplicateur

$$\lambda = \frac{2p}{\dfrac{\partial \sigma}{\partial x}} - \frac{2q}{\dfrac{\partial \sigma}{\partial y}} + \mu(x, y),$$

$\mu(x, y)$ étant une solution de l'équation adjointe, et les valeurs correspondantes des fonctions $f(x, y, z, p)$, $\varphi(x, y, z, q)$ sont

$$\left\{\begin{aligned} p' = f &= -\frac{p^2}{\dfrac{\partial \sigma}{\partial x}} + \frac{\mu}{2}\,p - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mu}{\partial x} + \mu\,\frac{\dfrac{\partial^2 \sigma}{\partial x\,\partial y}}{\dfrac{\partial \sigma}{\partial y}}\right) z + \frac{\partial H}{\partial z}\,p + \frac{\partial H}{\partial x},\\ q' = \varphi &= -\frac{q^2}{\dfrac{\partial \sigma}{\partial y}} - \frac{\mu}{2}\,q + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mu}{\partial y} + \mu\,\frac{\dfrac{\partial^2 \sigma}{\partial x\,\partial y}}{\dfrac{\partial \sigma}{\partial x}}\right) z + \frac{\partial H}{\partial z}\,q + \frac{\partial H}{\partial y}. \end{aligned}\right. \tag{96}$$

Il est clair que, quelle que soit la fonction $H(x, y, z)$, les formules (96) ne peuvent définir une transformation B_2. Pour avoir une transformation B_3, il suffit de prendre $\mu = 0$, $H = 0$; les formules (96) deviennent alors

$$(96\ bis) \qquad p' = \frac{p^2}{\frac{\partial\sigma}{\partial x}}, \qquad q' = \frac{q^2}{\frac{\partial\sigma}{\partial y}},$$

et, en égalant les deux valeurs de s, on est conduit à l'équation

$$(97) \qquad \mathcal{G}(z') = \mathcal{G}(\sigma),$$

où

$$\mathcal{G}(\ ) = \frac{\left(\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\right)^2}{\frac{\partial}{\partial x}\,\frac{\partial}{\partial y}}.$$

Cette équation est encore de la forme (94), et l'on voit que l'intégration de cette équation est ramenée à celle de l'équation linéaire (95).

Il est facile de déduire de là une propriété intéressante de l'équation (97). En effet, si dans l'équation (95) on remplace z par σz, on est conduit à une équation de même forme, où σ est remplacé par $\frac{1}{\sigma}$; on en conclut que l'intégration de l'équation

$$\mathcal{G}(z') = \mathcal{G}(\sigma)$$

et celle de l'équation

$$\mathcal{G}(z') = \mathcal{G}\left(\frac{1}{\sigma}\right)$$

sont deux problèmes équivalents : résultat que j'ai déjà établi par une autre méthode [1].

---

[1] *Bulletin de la Société mathématique*, t. XXVIII, p. 1.

DÉTERMINATION DES SURFACES (W)

A LIGNES DE COURBURE ISOTHERMES,

PAR M. G. DEMARTRES,

Professeur à l'Université de Lille.

1. Nous nous proposons de trouver toutes les surfaces dont les courbures principales sont fonction l'une de l'autre et qui sont divisées en carrés infiniment petits par leurs lignes de courbure. Les cônes et les surfaces de révolution satisfont évidemment à cette double condition; on sait qu'il en est de même des surfaces minima, et, plus généralement, de toute surface à courbure moyenne constante; nous laisserons de côté ces solutions déjà connues et nous démontrerons que toute surface répondant à la question, en dehors de celles que nous venons de rappeler, est nécessairement un hélicoïde.

On démontre bien aisément que toute surface canal dont les lignes de courbure sont isothermes ne peut être qu'un tore ou un cylindre; nous n'aurons donc pas à tenir compte des surfaces canaux. (*Voir* la Note II.)

Imaginons la surface rapportée à ses lignes de courbure $v = \text{const.}$, $u = \text{const.}$ Si l'élément linéaire est donné par la formule

$$ds^2 = f^2\,du^2 + g^2\,dv^2, \tag{1}$$

les courbures principales satisfont aux deux relations

$$\left\{\begin{aligned} \frac{2}{f}\frac{\partial f}{\partial v} &= \frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial v} - \frac{\partial Q}{\partial v}\right),\\ \frac{2}{g}\frac{\partial g}{\partial u} &= -\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial u} + \frac{\partial Q}{\partial u}\right),\end{aligned}\right. \tag{2}$$

en posant

$$\frac{1}{R_1} = P - Q, \qquad \frac{1}{R_2} = P + Q. \tag{3}$$

La condition pour que les lignes coordonnées forment un système isotherme

est alors

$$(4) \qquad 2Q\frac{\partial^2 P}{\partial u\,\partial v} = \frac{\partial P}{\partial u}\frac{\partial Q}{\partial v} + \frac{\partial Q}{\partial u}\frac{\partial P}{\partial v}$$

et les deux fonctions P, Q devront satisfaire à une relation constante.

2. L'équation (4) est évidemment vérifiée si $dP = 0$, c'est-à-dire dans le cas des surfaces à courbure moyenne constante; laissant de côté cette solution, nous supposerons d'abord que P ne dépende que d'une seule des deux variables, de v, par exemple.

On aura alors, d'après l'équation (4),

$$P = \varphi(v), \qquad Q = \psi(v).$$

Les équations (3), (2) nous donneront alors pour $\frac{1}{R_1}$ et g des fonctions de cette même variable v; donc la surface cherchée sera une enveloppe de sphères et aura pour lignes de courbure non circulaires une famille de géodésiques. Il est à peu près évident, et d'ailleurs très facile à établir, que ces deux conditions ne se vérifient que pour les surfaces de révolution; nous devrons donc supposer que P est effectivement une fonction des *deux* variables u, v.

Nous pouvons exprimer la dépendance entre les courbures principales en posant

$$(5) \qquad Q = \frac{1}{H'(P)},$$

H étant une fonction qu'il s'agit de déterminer de manière à satisfaire à la condition (4). Or, si nous considérons H comme une fonction de u, v et si nous substituons dans cette équation (4), il vient immédiatement

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u\,\partial v} = 0, \qquad H = U + V,$$

U étant fonction de u, V fonction de v; comme rien ne nous empêche de prendre U et V comme variables indépendantes, nous supposerons $H = u + v$.

P sera alors une fonction de $(u + v)$. Si nous désignons par φ cette fonction, l'équation (5) nous donne $Q = \varphi'(u + v)$. On aura donc en définitive

$$(6) \qquad P = \varphi(u + v), \qquad Q = \varphi'(u + v).$$

Donc, enfin, les surfaces cherchées sont caractérisées analytiquement par la propriété suivante :

On peut choisir les variables u, v de telle sorte que la somme et la différence des courbures principales soient représentées par les équations (6).

3. Si l'on porte les valeurs de P, Q dans les équations (2), il vient

$$\frac{2}{f}\frac{\partial f}{\partial v} = 1 - \frac{\varphi''}{\varphi'}, \qquad \frac{2}{g}\frac{\partial g}{\partial u} = -1 - \frac{\varphi''}{\varphi'}.$$

D'où, en intégrant,

$$f^2 = \frac{U^2}{\varphi'} e^{u+v}, \qquad g^2 = \frac{V^2}{\varphi'} e^{-u-v}, \tag{7}$$

U étant une fonction de u, V une fonction de v. On a alors l'expression du ds^2 :

$$ds^2 = \frac{e^{v-u}}{\varphi'(u+v)}(U^2 e^{2u}\, du^2 + V^2 e^{-2v}\, dv^2).$$

Mais ces deux fonctions, U, V, ne peuvent pas être choisies arbitrairement; si, en effet, nous calculons la courbure totale à l'aide des formules (7) et que nous l'égalions à $\varphi^2 - \varphi'^2$, nous aurons une équation de condition qu'on peut écrire sous la forme

$$\gamma = 2p\alpha' + p'\alpha + 2q\beta' + q'\beta \tag{8}$$

en posant, pour abréger,

$$2p = \frac{1}{U^2}, \qquad 2q = \frac{1}{V^2}, \tag{9}$$

$$\gamma = \varphi' - \frac{\varphi^2}{\varphi'}, \qquad \alpha = -\tfrac{1}{2}e^{-u-v}\left(1 + \frac{\varphi''}{\varphi'}\right), \qquad \beta = \tfrac{1}{2}e^{u+v}\left(1 - \frac{\varphi''}{\varphi'}\right). \tag{10}$$

Cette équation (8) contient en réalité la solution de la question; elle relie entre elles les trois fonctions p, q, φ, qui dépendent respectivement des trois variables différentes u, v, $u+v$; nous verrons tout à l'heure, par une discussion complète de cette équation, que p et q doivent se réduire à de simples constantes, toujours en admettant qu'on laisse de côté les solutions, évidentes *a priori*, dont nous avons parlé; on voit alors que la fonction φ est complètement déterminée par la condition de satisfaire à une certaine équation différentielle du troisième ordre (l'équation 8).

Remarque. — Les courbures principales et les courbures géodésiques des

lignes de courbure sont données par les formules

$$(11)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{R_1} = \varphi - \varphi', & \dfrac{1}{R_2} = \varphi + \varphi', \\ \dfrac{1}{\rho_1} = -\beta\sqrt{2q\varphi'}\,e^{-\frac{l}{2}}, & \dfrac{1}{\rho_2} = \alpha\sqrt{2p\varphi'}\,e^{\frac{l}{2}}, \end{cases}$$

les indices 1, 2 correspondant respectivement à $v = \text{const.}$, $u = \text{const.}$, et nous supposons $u + v = l$.

4. *Discussion de l'équation* (8). — 1° Supposons d'abord qu'on ait, à la fois,

$$\alpha''\alpha = \alpha'^2, \qquad \beta\beta'' = \beta'^2.$$

On en déduira sans peine, en tenant compte des expressions de α, β,

$$\varphi = ce^{-(a+b)l} + c',$$
$$\alpha = ae^{-l}, \qquad \beta = be^{l},$$

a, b, c, c' étant quatre constantes dont les deux premières vérifient l'égalité $a - b + 1 = 0$. Mais on tire de l'équation (8)

$$(8')\qquad 2p'v' + p''\alpha = 2q'\beta' + q''\beta$$

ou

$$ae^{-2u}(p'' - 2p') = be^{2v}(q'' + 2q'),$$

les deux membres dépendant, l'un de u, l'autre de v, doivent être égaux à une même constante h et l'on doit avoir

$$p'' - 2p' = \frac{h}{a}e^{2u}, \qquad q'' + 2q' = \frac{h}{b}e^{-2v},$$

d'où, en intégrant et désignant par k, k', r, s de nouvelles constantes,

$$p = \left(\frac{h}{2a}u + \varepsilon\right)e^{2u} - \frac{k}{2}, \qquad q = \left(s - \frac{h}{2b}v\right)e^{-2v} + \frac{k'}{2}.$$

Portons ces valeurs de p, q, α, β dans l'équation (8), nous aurons enfin

$$2p\alpha' + p'\alpha = \quad he^{u-v} - k\,ae^{-l},$$
$$2q\alpha' + q'\alpha = -he^{u-v} + k'\,be^{l},$$

$$-(a+b)Ce^{-(a+b)l} + \frac{[Ce^{-(a+b)l} + c']^2}{(a+b)Ce^{-(a+b)l}} = k'\,be^{l} - kae^{-l}.$$

Si C était nul, φ serait constant; nous devons donc supposer $C \neq 0$; mais alors l'identité qui précède ne peut avoir lieu, à moins qu'on n'ait $a + b = \pm 1$, et, comme on a déjà $a - b = -1$, il faut que a ou b soit nul.

Mais, dans ce cas, α ou β sera nul, ce qui ne peut avoir lieu que pour une surface canal. Nous rentrons donc alors dans le cas des surfaces de révolution. On aura, par exemple,

$$a = 0, \qquad b = 1, \qquad k' = 0, \qquad c' = 0, \qquad \varphi = Ce^{-t}.$$

2° Revenons à l'équation (8) et dérivons-la par rapport à u, ce qui donne

$$\gamma = 2p\alpha' + p'\alpha + 2q\beta' + q'\beta, \tag{8}$$

$$\gamma' = 2p\alpha'' + 3p'\alpha' + p''\alpha + 2q\beta'' + q'\beta'. \tag{12}$$

Nous pouvons supposer $\beta'^2 - \beta\beta'' \neq 0$, car, si cette expression était nulle, comme il n'en serait pas de même de $\alpha'^2 - \alpha'\alpha''$, nous pourrions raisonner sur la fonction q comme nous le faisons actuellement sur p; cette inégalité permet de résoudre les deux équations précédentes par rapport aux fonctions q et q'.

Supposons qu'on ait trouvé $p = f(u)$; si nous faisons $u = -v$ dans l'équation précédente, nous aurons

$$q = a + bf(-v) + cf'(-v) + df''(-v), \tag{13}$$

a, b, c, d étant des constantes.

Or, si l'on différentie une fois de plus l'équation (8) par rapport à u, ce qui donne

$$\gamma'' = 2p\alpha''' + 5p'\alpha'' + 4p''\alpha' + p'''\alpha + 2q\beta''' + q'\beta'', \tag{14}$$

on pourra éliminer q et q' entre les équations (8), (12), (14), et l'on trouvera ainsi une équation linéaire pour déterminer p; cette équation sera de la forme

$$(p'''\alpha + p''\alpha')(\beta'^2 - \beta\beta'') + Mp' + Np + T = 0,$$

M, N, T étant des fonctions de t; on voit que le coefficient de p''' ne peut disparaître que dans le cas d'une surface canal; donc, si nous faisons $u = -v$, nous aurons, pour déterminer p, une équation linéaire à coefficients constants qui sera toujours du troisième ordre.

Supposons qu'il y ait, dans cette valeur de p, un terme de la forme ae^{mu}, q contiendra, d'après l'équation (13), un terme correspondant et de la forme $a'e^{-mv}$; si l'on substitue les valeurs de p et q dans l'équation (8), on aura une identité de la forme

$$\gamma = (2\alpha' + m\alpha)ae^{mu} + (2\beta' - m\beta)a'e^{-mv} + \ldots.$$

Faisons $u = h - v$, h étant une constante quelconque, nous aurons, en désignant par l'indice v le résultat de la substitution de h à l,

$$\gamma_0 = (2\alpha'_0 + m\alpha_0) a e^{mh - mv} + (2\beta'_0 - m\beta_0) a' e^{-mv} + \ldots;$$

cette identité ne peut avoir lieu, quel que soit v, que si l'on a

$$a'(2\beta'_0 - m\beta_0) e^{-mh} + a(2\alpha'_0 + m\alpha_0) = 0,$$

et, comme h doit avoir une valeur quelconque, on devra avoir

$$a(2\alpha' + m\alpha) e^{\frac{mh}{2}} + a'(2\beta' - m\beta) e^{-\frac{mh}{2}} = 0,$$

équation qui s'intègre immédiatement et donne

$$a\alpha e^{\frac{mh}{2}} + a'\beta e^{-\frac{mh}{2}} = \mathrm{C},$$

C étant une constante arbitraire. On en déduirait $\frac{\varphi''}{\varphi'}$ et, par suite, φ' par une simple quadrature :

$$\varphi' = e^{-\int \frac{\mathrm{C} e^{\frac{m-1}{2} l} + a e^{(m-1)l} - a'}{a e^{(m-1)l} + a'}}.$$

D'autre part, si l'on désigne par h, h' les deux constantes qui figurent dans p et q, l'identité générale donne évidemment

$$\gamma = 2h\alpha' + 2h'\beta',$$

équation qui, comme nous le verrons, s'intègre (§ 5) et donne

$$2(h\alpha + h'\beta)^2 + \frac{1}{\varphi'}[h' e^{l}(\varphi - \varphi')^2 + h e^{-l}(\varphi + \varphi')^2] = \mathrm{C}',$$

C′ étant une nouvelle constante.

Or, on démontrera aisément que les deux intégrales auxquelles nous venons d'arriver et qui déterminent, l'une et l'autre, la fonction φ, ne peuvent être compatibles que si m est nul ou si l'on a, à la fois, $a = 0$, $b = 0$. Dans les deux cas, p, q ne contiennent aucun terme exponentiel.

On démontrerait de la même manière que p et, par suite, q ne peuvent contenir aucun terme tel que ue^{mu}, $u^2 e^{mu}$, ve^{-mv}, ... Donc, enfin, p, q doivent *l'une et l'autre se réduire à des constantes,* en écartant, bien entendu, comme nous l'avons fait jusqu'ici, les surfaces de révolution et les cônes.

5. *Intégration de l'équation* (8). — L'équation (8) se réduit, d'après ce qui

précède, à

$$(8) \qquad \gamma = 2p\alpha' + 2q\beta',$$

p et q étant maintenant deux constantes. Cette équation est du troisième ordre; si l'on parvenait à l'intégrer, la fonction φ serait connue, et, par suite, sa dérivée, et contiendrait en tout *cinq* constantes. La relation (W) qui doit régner entre les courbures principales serait alors connue; tout ce que l'on peut dire, c'est que cette relation est purement paramétrique et ne contient aucune fonction arbitraire.

Il paraît d'ailleurs assez difficile d'intégrer complètement cette équation (8); nous n'essaierons pas de faire cette intégration, mais nous pouvons donner dès à présent une intégrale première de l'équation (8), dont nous avons fait usage dans le paragraphe précédent.

Posons pour cela

$$M = \frac{1}{\varphi'}[qe^{t}(\varphi - \varphi')^2 + pe^{-t}(\varphi + \varphi')^2],$$

nous en déduirons en différentiant

$$\frac{dM}{dt} = -2\gamma(p\alpha + q\beta).$$

Multiplions alors l'équation (8) par $2p\alpha + 2q\beta$, ce qui donne

$$M' + 4(p\alpha + q\beta)(p\alpha' + q\beta') = 0,$$

d'où, en intégrant,

$$(15) \qquad 2(p\alpha + q\beta)^2 + \frac{1}{\varphi'}[qe^{t}(\varphi - \varphi')^2 + pe^{-t}(\varphi + \varphi')^2] = C.$$

Cette équation, qui n'est plus que du second ordre, admet bien une solution particulière de la forme $\varphi = a(pe^{-t} - qe^{t})$; mais cette solution est à rejeter; on s'assurera aisément qu'elle ne vérifie pas l'équation (8) et qu'elle est due au facteur $p\alpha + q\beta$ par lequel nous avons multiplié celle-ci.

Quant à l'intégrale (15) elle-même, elle se présente peu naturellement au point de vue analytique, mais on y est conduit très simplement, comme nous allons le voir, par des considérations géométriques.

6. *La surface cherchée est un hélicoïde.* — Les quantités p, q étant des constantes, il est naturel d'étudier sur la surface les lignes le long desquelles $u + v$ reste constant. Soit i l'inclinaison d'une de ces lignes (L) sur les lignes de

courbure $v = \text{const.}$ Nous aurons d'abord

$$\operatorname{tang} i = -\frac{g}{f} = -\sqrt{\frac{p}{q}}\, e^{-2(u+v)}.$$

L'angle i reste donc constant le long de la ligne (L).

La courbure géodésique de L est alors donnée par la formule

$$\frac{1}{\rho} = \frac{di}{ds} + \frac{\cos i}{\rho_1} + \frac{\sin i}{\rho_2};$$

di étant nul, et les quantités ρ_1, ρ_2, i étant des fonctions de $u+v$, il en est de même de $\frac{1}{\rho}$; donc *les lignes* L *forment une famille de cercles géodésiques.*

De ces deux propriétés, on peut déduire que la surface cherchée est un hélicoïde (Raffy, *Bulletin de la Société mathématique,* t. XXV, p. 120); mais on peut aussi, bien aisément, le démontrer à l'aide des formules (11). Si l'on remarque que la courbure normale est donnée par la formule de Dupin

$$\frac{\cos^2 i}{R_1} + \frac{\sin^2 i}{R_2} = \varphi - \varphi' \cos 2i,$$

on voit que cette courbure reste elle-même constante le long de (L). Si donc on désigne par θ l'angle que fait la normale principale de cette ligne avec la normale à la surface, par R, T ses rayons de courbure et de torsion, on voit d'abord que $\frac{\cos\theta}{R}$ et $\frac{\sin\theta}{R}$ sont des fonctions de $u+v$; donc θ et R restent constants le long de (L); d'ailleurs, on a, d'après une formule connue,

$$\frac{d\theta}{ds} = \pm\frac{1}{T} \pm \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right)\sin i \cos i$$

et, $d\theta$ étant nul le long de (4), T sera aussi une fonction de $u+v$.

Ainsi, *la surface cherchée est engendrée par des hélices circulaires, et le long de chacune de ces hélices le plan osculateur fait un angle constant avec le plan tangent à la surface.*

Cette dernière condition ne peut d'ailleurs être remplie, ainsi que nous le démontrons en Note, que si l'axe de l'hélice variable est fixe et son pas constant; la surface est donc bien un hélicoïde [1]; cette démonstration constitue évidemment une première intégration de l'équation (8) et va nous permettre de la remplacer par une équation du second ordre.

---

(1) Note I, p. 353.

7. *Formules générales des hélicoïdes.* — Prenons les équations de l'hélicoïde sous la forme

$$
(16) \qquad \begin{cases} x = \rho\cos(\omega + t), \\ y = \rho\ \sin(\omega + t), \\ z = kt, \end{cases}
$$

ρ étant le rayon de l'hélice génératrice, k son pas qui est constant, ω une fonction de ρ, t un angle qui fixe la position de chaque point sur la génératrice. ρ et t seront nos coordonnées. Les équations qui donnent l'élément linéaire et les lignes de courbure sont

$$
(17) \qquad ds^2 = \mathrm{E}\,d\rho^2 + 2\mathrm{F}\,d\rho\,dt + \mathrm{G}\,dt^2,
$$

$$
(18) \qquad (\rho m m' - 1 - m^2)\,d\rho^2 + \left[m'(\rho^2 + k^2) + \frac{k^2}{\rho} m(1 + m^2)\right] d\rho\,dt + [\rho^2 + k^2(1 + m^2)]\,dt^2 = 0
$$

en posant

$$
(19) \qquad m = \rho\frac{d\omega}{d\rho}, \qquad \mathrm{E} = 1 + m^2, \qquad \mathrm{F} = m\rho, \qquad \mathrm{G} = \rho^2 + k^2,
$$

$$
\mathrm{H}^2 = \mathrm{EG} - \mathrm{F}^2 = \rho^2 + k^2(1 + m^2).
$$

Les courbures principales se calculent par les procédés ordinaires; supposons l'équation (13) des lignes de courbure scindée dans les deux suivantes :

$$
dt + \varpi_1\,d\rho = 0, \qquad dt + \varpi_2\,d\rho = 0,
$$

ϖ_1, ϖ_2 étant évidemment des fonctions de ρ; le théorème de Rodrigues nous donnera pour les courbures principales correspondantes :

$$
(20) \qquad \frac{1}{\mathrm{R}_1} = k\frac{\varpi_2}{\mathrm{H}}, \qquad \frac{1}{\mathrm{R}_2} = k\frac{\varpi_1}{\mathrm{H}}.
$$

On peut vérifier les identités suivantes :

$$
(21) \qquad \mathrm{G}\varpi_1\varpi_2 - \mathrm{F}(\varpi_1 + \varpi_2) + \mathrm{E} = 0,
$$

$$
(22) \qquad \frac{1}{\mathrm{R}_1\mathrm{R}_2} = -\frac{1}{2\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\frac{\rho^2}{\mathrm{H}^2}\right), \qquad \frac{1}{\mathrm{R}_1} + \frac{1}{\mathrm{R}_2} = \frac{k}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\frac{m\rho}{\mathrm{H}}\right).
$$

La première (16) exprime simplement l'orthogonalité des lignes de courbure; les deux dernières (17) permettent, ainsi que l'a fait voir M. Raffy (*loc. cit.*, t. XIX, p. 169), d'obtenir par des quadratures les hélicoïdes dont la courbure totale et la courbure moyenne vérifient une relation linéaire.

8. *Hélicoïdes isothermiques.* — Tous les hélicoïdes étant des surfaces W, il nous reste à déterminer ω en fonction de ρ par la condition que les lignes de courbure soient isothermes; nous devons d'ailleurs écarter le cas où la courbure moyenne est constante et où le problème a d'ailleurs été résolu, ainsi que nous venons de le rappeler; il s'agit donc de former une équation différentielle à laquelle satisfasse tout hélicoïde isothermique, *à courbure moyenne variable;* pour cela, nous reviendrons aux coordonnées u, v qui conviennent aux lignes de courbure.

Si l'on désigne par λ_1 et λ_2 des facteurs d'intégrabilité, on aura

$$dv = \lambda_1(dt + \varpi_1\, d\rho), \qquad du = \lambda_2(dt + \varpi_2\, d\rho);$$

comme les deux parenthèses sont des différentielles exactes, puisque ϖ_1 et ϖ_2 ne dépendent que de ρ, λ_1 sera une fonction de v, λ_2 une fonction de u.

On aura d'ailleurs

$$d(u+v) = (\lambda_1 + \lambda_2)\,dt + (\lambda_1\varpi_1 + \lambda_2\varpi_2)\,d\rho.$$

Mais les hélices ayant pour équation $\rho = \text{const.}$, aussi bien que $u + v = \text{const.}$, ρ est une fonction de $u + v$ et, par suite, $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$; et comme λ_1, $-\lambda_2$ dépendent chacune d'une variable différente, elles sont égales à une même constante a; on a donc, en posant $l = u + v$,

$$dl = a(\varpi_1 - \varpi_2)\,d\rho. \tag{23}$$

Cette équation fera connaître l en fonction de ρ par une quadrature; on peut lui donner une autre forme; on déduit, en effet, des formules (15),

$$\varpi_1 - \varpi_2 = \frac{H}{k}\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right),$$

ou, en revenant aux notations du n° 1,

$$\varpi_1 - \varpi_2 = \frac{2H}{k}\varphi'(l).$$

L'équation (18) peut donc s'écrire

$$\frac{dl}{d\rho} = \frac{2aH}{k}\varphi'(l). \tag{24}$$

Si, maintenant, on identifie les deux expressions du ds^2 pour les deux systèmes de variables (u, v), (ρ, t), on obtient immédiatement

$$G\varpi_1 - F = \frac{a^2H}{kp}e^l, \qquad -G\varpi_2 + F = \frac{a^2H}{kq}e^{-l},$$

et l'équation d'orthogonalité (16) donne alors entre les constantes la relation

$$a^4 = pqk^2. \tag{25}$$

Si enfin nous posons

$$\lambda = \frac{m\rho}{H}, \qquad \mu = \frac{\rho}{H}, \tag{26}$$

les formules qui permettront de passer d'un système de variables à l'autre seront les suivantes :

$$2G\varphi(l) - 2k\lambda = \frac{k^2}{a^2}(qe^l - pe^{-l}), \tag{27}$$

$$2G\varphi'(l) = \frac{k^2}{a^2}(qe^l + pe^{-l}), \tag{28}$$

$$2G\varphi''(l) + \frac{2k}{a}\mu = \frac{k^2}{a^2}(qe^l - pe^{-l}). \tag{29}$$

9. 1° Cherchons d'abord l'équation différentielle qui convient à nos hélicoïdes dans le système de coordonnées (ρ, t). On doit avoir

$$\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} = \frac{d}{dl}\left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1}\right)$$

ou

$$Q = \frac{dP}{dl} = \frac{dP}{d\rho}\frac{d\rho}{dl},$$

ou, à cause de l'équation (19),

$$aHQ^2 = k\frac{dP}{d\rho}. \tag{30}$$

Telle est l'équation différentielle cherchée; si nous tenons compte des équations (17), qui donnent la courbure totale et la courbure moyenne, cette équation peut être remplacée par les deux suivantes qui font connaître λ et μ, définis par les formules (26)

$$\left\{\begin{aligned} &\rho^2 - k^2\lambda^2 = \mu^2(\rho^2 + k^2), \\ &k^2 a\rho\lambda'^2 + 4a\rho^2 p\mu' = k^2 p(\lambda''\rho - \lambda'). \end{aligned}\right. \tag{31}$$

Les accents désignent ici des dérivées prises par rapport à ρ; λ, μ une fois connus, on aurait les deux courbures principales [équation (24)].

2° *Variable l.* — L'équation différentielle, dans le système de variables (u, v), s'obtient aussi sans difficulté. Il suffit d'éliminer λ, μ, ρ entre les équations (27), (28), (29) et la première des équations (31), en tenant compte de ce que

$G = \rho^2 + k^2$. On trouve ainsi

$$(32) \qquad \varphi'^2(A' - k^2\varphi') = \varphi'(A\varphi' - \varphi A')^2 + \frac{a^2}{k^2}A'(A'\varphi'' - A\varphi')^2$$

en posant

$$A = \frac{k^2}{2a^2}(qe^l - pe^{-l})$$

et en désignant toujours par des accents les dérivées prises par rapport à l. Cette équation (32) peut être légèrement simplifiée; si l'on tient compte de la relation évidente

$$A'^2 - A^2 = k^2 = \frac{k^4 pq}{a^4},$$

on peut tout diviser par A' et l'on obtient enfin

$$(33) \qquad \frac{a^2}{k^2}(A'\varphi'' - A\varphi')^2 + \varphi'(A'\varphi^2 + A'\varphi'^2 - 2A\varphi\varphi' + \varphi') = 0.$$

On constate aisément que $\varphi = \frac{A}{k^2}$ est une solution. Ce fait est d'ailleurs évident pour l'équation sous la forme (32); mais cette solution est à rejeter, car elle correspond au cas où les équations (27), (28), ... admettraient la solution commune $\rho = 0$, $\lambda = 0$, $\mu = 0$, qui n'a évidemment aucun sens.

Si l'on résout l'équation (33) par rapport à $\frac{k^2}{a^2}$, on peut vérifier qu'elle se réduit à

$$2(p\alpha + q\beta)^2 + \frac{1}{\varphi'}[qe^l(\varphi - \varphi')^2 + pe^{-l}(\varphi + \varphi')^2] = \frac{2a^2}{k^2}.$$

On retombe donc sur l'équation (15). L'existence d'une solution étrangère $\varphi = \frac{A}{k^2}$ s'explique d'ailleurs aussi bien pour cette dernière équation, car elle correspond, comme on peut le voir, au facteur $p\alpha + q\beta$ que nous avons dû introduire pour les besoins de l'intégration (n° 5).

NOTES.

I. — Surfaces engendrées par des hélices.

Théorème. — *Lorsqu'une surface admet une famille d'hélices circulaires telles que, le long de chacune d'elles, le plan osculateur soit incliné d'un angle constant sur le plan tangent à la surface, celle-ci est un hélicoïde.*

En d'autres termes, l'hélice génératrice conserve un axe invariable et un pas constant.

Attachons à l'hélice mobile un trièdre trirectangle OX, OY, OZ dont la troisième arête soit dirigée suivant l'axe. Soient l le paramètre dont dépendent la grandeur et la position de l'hélice; $a\,dl$, $b\,dl$, $c\,dl$, $p\,dl$, $q\,dl$, $r\,dl$ les composantes, suivant les axes, des vitesses de translation et de rotation; désignons par ρ, k le rayon et le pas de l'hélice, par t une seconde coordonnée déterminant la position d'un point M sur cette hélice.

Nous aurons, pour le déplacement absolu de ce point,

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} \delta x &= -\rho\sin t\,dt + (a + qkt - r\rho\sin t + \rho'\cos t)\,dl,\\ \delta y &= \rho\cos t\,dt + (b + pkt + r\rho\cos t + \rho'\sin t)\,dl,\\ \delta z &= k\,dt + (c + k't + p\rho\sin t - q\rho\cos t)\,dl,\end{aligned}\right.$$

les accents désignant des dérivées prises par rapport à l. Soit $f(l)$ le cosinus de l'angle θ que fait la normale avec le rayon de courbure; nous aurons une équation de la forme

$$M^2 = N^2 f^2(l),$$

M, N étant des fonctions entières de $t, \sin t, \cos t$; cette relation doit être une identité; elle est du second degré en t, et, si l'on égale à zéro le coefficient de t^2, on obtient d'abord la condition

$$\begin{aligned}[][k'\rho + k^2(p\cos t + q\sin t)^2] - f^2(l)[k^2\rho^2(q\cos t - p\sin t)^2\\ + k'^2\rho^2 + k^4(p^2+q^2) + 2k'k^2\rho(p\cos t + q\sin t)] \equiv 0,\end{aligned}$$

qui doit être elle-même vérifiée quel que soit t; en écrivant qu'il en est ainsi, on obtient immédiatement

$$p = 0,\qquad q = 0,\qquad k' = 0,\qquad a = 0,\qquad b = 0,$$

ce qui démontre le théorème énoncé. Ces conditions sont d'ailleurs suffisantes et conduisent à la formule

$$\tang \theta = \frac{\rho' \sqrt{k^4 \rho^2}}{\rho(c - kr)}.$$

II. — Sur les surfaces canaux.

Théorème. — *Toute surface canal isothermique est un tore ou un cylindre.*

Les formules (1) de la Note précédente s'appliquent au cas actuel en supposant ρ constant et en faisant $k = 0$, $a = 0$, $b = 0$. On peut d'ailleurs supposer $q = 0$, ce qui revient à compter l'angle t à partir d'une parallèle à la caractéristique du plan du cercle.

Ces équations (1) deviennent alors

$$\begin{aligned} \delta x &= -\rho \sin t\, dt - r\rho \sin t\, dl, \\ \delta y &= \rho \cos t\, dt + r\rho \cos t\, dl, \\ \delta z &= (c + p\rho \sin t)\, dl, \end{aligned}$$

d'où

$$ds^2 = \rho^2 (dt + r\, dl)^2 + (c + p\rho \sin t)^2\, dl^2.$$

Les lignes de courbure non circulaires ont alors pour équation

$$dt + r\, dl = 0.$$

Si l'on pose $r\, dl = d\tau$, $t + \tau = \varphi$, le ds^2 sera mis sous la forme

$$ds^2 = \rho^2\, d\varphi^2 + [c + p\rho \sin(\varphi - \tau)]^2\, dl^2.$$

La courbure géodésique de la ligne $\varphi = \text{const.}$ aura donc pour expression

$$\frac{1}{\rho} \frac{p\rho \cos(\varphi - \tau)}{c + p\rho \sin(\varphi - \tau)}.$$

Si nous voulons que les lignes soient isothermes, nous devons exprimer que

$$\frac{c + p\rho \sin(\varphi - \tau)}{p \cos(\varphi - \tau)}$$

est une fonction de φ. Or, cela a lieu évidemment si $p = 0$, ce qui donne évidemment pour notre surface un cylindre de révolution.

Si, maintenant, on suppose $p \neq 0$ et que l'on exprime que le rapport ci-dessus

ne dépend que de φ, on devra avoir

$$r = 0, \qquad cp' - pc' = 0.$$

D'après la première condition, le plan du cercle tourne autour de sa caractéristique.

Pour interpréter la seconde, $p' = 0$, il suffit d'observer que l'équation de la caractéristique du plan du cercle est

$$c + py = 0,$$

et l'on voit sans peine que si $pc' = cp'$ cette droite doit être immobile.

La surface est donc engendrée par un cercle de rayon constant tournant autour d'une droite fixe de son plan. C'est donc bien un tore.



SUR LES

COURBES DE DÉFORMATION DES FILS,

PAR M. H. BOUASSE,

Professeur à l'Université de Toulouse.

DEUXIÈME PARTIE.

CHAPITRE IX.

TRACTION ET ALLONGEMENT D'UN FIL PRÉALABLEMENT TORDU.

Nous avons indiqué au Chapitre IV, nos **11**, **12**, **18**, deux ordres de phénomènes dont nous allons reprendre l'étude détaillée : effet sur le couple d'une surcharge à azimut constant (nos **11**, **12**), effet sur l'azimut d'une surcharge à couple constant et en particulier à couple nul (n° **18**). Voici d'abord la description très abrégée des appareils utilisés pour ces recherches.

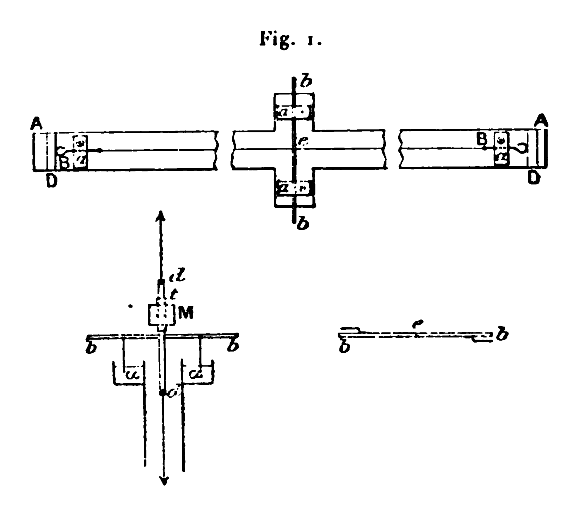
Disposition du fil en expérience. — Le fil vertical est tordu d'un angle connu suivant une loi connue; une de ses extrémités est fixe, l'autre doit être parfaitement mobile sous quelque charge variable ou constante que l'on opère. Le problème ne comporte qu'une solution : le fil doit être tordu par son milieu. Il a généralement 2^m de long; son extrémité supérieure est fixée à une poutre solide; l'inférieure, invariable en azimut, peut se déplacer suivant la verticale. Un tube mince horizontal est soudé au milieu du fil et sert à le tordre : on en peut repérer les positions azimutales. Tel est le schéma de l'appareil.

Mode de fixation du fil. — Il est toujours soudé. Pour le transporter et l'installer sans le ployer, on procède comme il est dit Chapitre III, page 335. L'appareil est représenté (*fig.* 1). C'est une planche de $2^m,50$, portant en son milieu une courte planche transversale : deux arrêts en bois D sont fixés vers les extrémités. Enfin, quatre plaques de laiton *a* peuvent être serrées contre la planche à l'aide d'écrous dont la figure montre les têtes. On applique contre les arrêts D

des tiges de cuivre B de longueur convenable et l'on serre contre elles le fil à étudier à l'aide des plaques extrêmes *a*. Le léger tube de laiton *bb* (2^{mm},5 de diamètre) est convenablement fixé à l'aide des plaques médianes *a*; le fil passe sur une encoche creusée au milieu du tube. Il ne reste plus qu'à souder.

La soudure faite, on transporte l'appareil, on l'accroche à la poutre qui doit supporter le fil; on desserre les plaques et l'on met le fil en position, sans qu'il ait

Fig. 1.



pu se plier, se tordre ou s'abîmer dans les manipulations. Il y a juste 2^m entre les extrémités des tiges B : des repères permettent de placer le tube *bb* exactement au milieu de cet intervalle.

On soude même les fils raides; il faut éviter de prendre de la soudure fondant à trop haute température et ne chauffer le fer que juste assez.

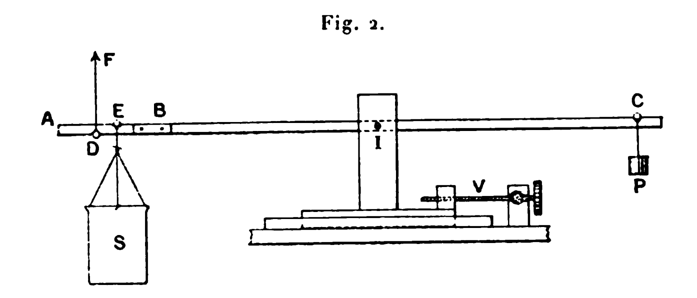
Quelquefois le fil doit porter un miroir en son milieu. Le miroir ($2^{cm} \times 2^{cm}$) est fixé à un cadre soudé à un petit bout de tube *t* dans lequel passe à frottement doux le tube *dd*. Ce dernier est taillé en sifflet à ses extrémités, il est soudé au tube *bb*. Le fil en expérience passe dans *dd* et est soudé aux points *d*. Le tube *dd* ayant 20^{cm}, l'expérience porte alors sur deux fils de 90^{cm} de longueur. La figure représente, en *aa*, un godet annulaire rempli d'huile et deux fils soudés à *bb* servant d'amortisseur.

Quelquefois le tube *bb* porte à ses extrémités deux bouts de fil repliés dans le plan horizontal comme l'indique la figure. Le fil se projetterait en *e*, où est figurée l'encoche.

Enfin, on peut être forcé d'installer le fil en deux morceaux. On imaginera alors que le tube *dd* est fait de deux pièces pouvant se raccorder par une pince à serrage. On a recours à cette disposition pour employer le dynamomètre qui sera décrit un peu plus loin.

Établissement d'une charge qui varie proportionnellement au temps. — L'appareil (*fig.* 2) se compose d'une tige de bois de $2^{m},50$ pouvant tourner autour de l'axe I. Deux plaques de laiton AB sont fixées à l'une de ses extrémités;

Fig. 2.



elles se projettent l'une sur l'autre dans la figure. Elles sont parallèlement entre elles, de part et d'autre de la tige BC, à 3^{cm} de distance. Elles sont entaillées en D et E de quatre encoches en forme de V, où reposent deux courts cylindres. Le cylindre D est fileté et porte deux écrous entre lesquels on serre la crosse de la tige de cuivre à laquelle est soudée l'extrémité inférieure du fil, qui se trouve ainsi fixée en azimut. Le cylindre E porte le seau S dans lequel se fait un écoulement à débit constant (*voir* Chapitre III). Le contrepoids P permet de partir d'une charge nulle.

Lors de l'allongement du fil, le point D décrit une circonférence de $1^{m},25$ de rayon. Supposons qu'on veuille allonger de 40^{cm} (soit 20 pour 100) et que D soit dans la verticale du point d'attache supérieure du fil pour l'allongement moyen 10 pour 100. Pour les allongements 0 et 20 pour 100, il se trouverait à $1^{cm},6$ de cette verticale. Un tel écart est inadmissible; aussi l'axe I peut-il se déplacer horizontalement grâce à une glissière et une vis de rappel. L'allongement étant toujours lent, on maintient aisément le point D, à 1^{mm} ou 2^{mm} près, sur la verticale du point d'attache, en alignant le fil sur des repères et en agissant à la main sur la vis V.

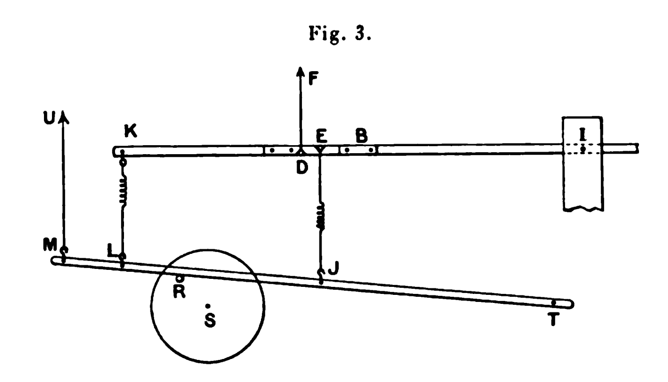
Charge variant suivant la loi $P = \Pi \sin \omega t$ (*fig.* 3). — On ajoute au levier DI de la figure 2 un prolongement DK. Dans le plan vertical de KI, se trouve une tige tournant autour de l'axe T et reposant sur l'excentrique R monté sur la roue S. Des ressorts à boudin relient les deux tiges, soit entre les points K et L, soit entre les points E et J. La tige MT est alourdie par des poids de manière à reposer toujours sur l'excentrique. Il est clair que, si le fil a une longueur à peu près invariable, et que si le mouvement de S est uniforme, la surcharge a bien la forme $P = \Pi \sin \omega t$.

La roue S est reliée à notre moteur (*voir* Chapitre VI) par un train d'engre-

nages et des systèmes de poulies; on peut faire varier la vitesse de deux tours par seconde à un tour en 250 secondes, soit de 1 à 500.

L'excentrique R est formé d'une tige cylindrique filetée à un bout, qui peut se visser dans une série de trous percés dans un rayon de la roue S à des distances

Fig. 3.



connues de l'axe S. On peut ainsi faire varier l'amplitude Π du cycle. On fait varier la charge moyenne, en disposant des poids sur DI de part ou d'autre de l'axe I.

On étalonne des ressorts en place à l'aide d'une romaine. Ils sont faits avec du fil d'acier recouvert de cuivre : on les obtient très réguliers en se servant d'un tour. Si l'on veut des cycles d'amplitude Π très petite, on fixe un ressort faible en EJ; on supprime le levier KI comme trop lourd, et on le remplace par un levier très léger dont l'axe est proche des points D et E. Ces précautions sont surtout nécessaires, si l'on veut que la période soit courte (*voir* plus loin n° 7).

Si Π doit être grand, on est forcé d'employer des systèmes de ressorts parallèles, fixés à deux pièces rigides, fixées elles-mêmes en K et L. On s'est souvent servi d'un ensemble de cinq ressorts donnant une tension de 1500^{g} pour 25^{cm} d'allongement; parfois on a employé simultanément deux de ces systèmes.

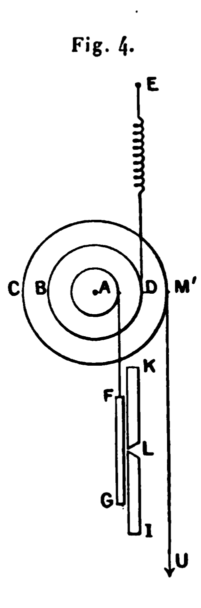
Enregistrement photographique. — On veut que le cliché se déplace verticalement, proportionnellement à la variation de charge : il suffit qu'il se déplace proportionnellement au déplacement d'un point quelconque de la barre MT, par exemple du point M.

L'appareil est représenté schématiquement (*fig.* 4). Le fil d'acier très fin MU (*fig.* 3), UM' (*fig.* 4) passe sur une poulie C. Montés sur le même axe se trouvent : 1° une seconde poulie BD sur laquelle passe un fil attaché au ressort à boudin tendu DE, qui maintiendra toujours tendu le fil MUM'; 2° un rouleau de bois qui porte, par le moyen de deux gances AF, un porte-cliché (13×18) FG. Le cliché est dans une boîte plate étanche à la lumière, percée d'une fente horizontale L. Sa grande dimension (18^{cm}) est horizontale; la petite (13^{cm}) est verticale; donc le

mouvement alternatif ne doit pas avoir plus de 12^{cm} d'amplitude totale. Le treuil CA permet de réduire dans un rapport convenable le mouvement du point M (*fig.* 3).

La fente L est à la hauteur du miroir, c'est-à-dire sensiblement au milieu du fil. La distance du miroir au cliché est $1^{m},20$; le degré de rotation du miroir

Fig. 4.



vaut 4^{cm} sur le cliché. On imaginera aisément une fente éclairée à l'acétylène, un objectif achromatique, le tout perché à 2^{m} au-dessus du sol. Il est clair que de telles expériences demandent des installations spéciales. Je serai enchanté qu'on recommence mes expériences, mais je conseille d'y regarder à deux fois avant d'entreprendre ce travail.

Appareil de torsion (*fig.* 5). — Sur une table massive TT dont le plan supérieur est à $1^{m},40$ au-dessus du sol, est posé un cercle de $1^{m},10$ de diamètre (ancien cercle de lunette méridienne). Le degré est divisé en douzièmes dont la longueur vaut environ $0^{mm},8$. Le cercle BB est monté dessus à billes; il a 35^{cm} de diamètre et sert de support au trépied SS à vis calantes dont le plan supérieur est à 24^{cm} au-dessus de BB. Ses vis calantes entrent dans des crapaudines soudées à BB.

Sur le support SS tourne à billes le disque DD, mis en mouvement à l'aide des poulies P et du cylindre de friction p; il est divisé en degrés.

Enfin, sur DD repose une pièce IEJ qui est entraînée par DD, grâce au frottement qui résulte de son poids. Il suffit d'ailleurs de soulever le levier LM pour l'arrêter instantanément. La pièce IEJ porte deux bras verticaux EI de 45^{cm} de hauteur et qu'on peut fixer dans des azimuts relatifs quelconques (grâce à des

Suivant les cas, on utilise simplement la lunette décrite plus haut avec laquelle on regarde l'index *ef*; ou bien on utilise le miroir M et la méthode de Poggendorff.

On remarquera que la hauteur des points de contact des tiges *eg* (*fig.* 6) et de la tige *bb* (*fig.* 1) n'influe en aucune manière sur l'indication du dynamomètre. *L'appareil indique donc les couples pendant l'allongement.* D'autre part, grâce aux pièces D, qui permettent des changements d'azimut rapide et lent, l'appareil peut servir à partir d'un azimut initial quelconque. Enfin le réglage du fil dans l'axe des tubes DC, ou, si l'on veut, le réglage initial du dynamomètre dans son plan horizontal, n'a qu'une influence négligeable. Si le ressort employé ne peut supporter le poids de la pièce inférieure sans s'allonger démesurément et généralement pour éviter des oscillations verticales gênantes, on relie les pièces D et C par deux fils, ce qui ajoute un bifilaire *aaaa* au ressort à boudin et ne présente aucun inconvénient. Le ressort à boudin peut avoir jusqu'à 100 spires de fil de 1^{mm} de diamètre.

Il est parfois avantageux d'employer un dynamomètre très sensible, même pour mesurer des couples assez grands. Supposons qu'au début de l'opération le fil soit buté contre la dynamomètre, grâce à la tige horizontale transversale *bb* (*fig.* 1). Pendant l'opération qui amène une variation du couple, le dynamomètre et le fil se tordent de α. Quelle serait, dans les mêmes conditions, l'indication du dynamomètre, à supposer l'azimut rigoureusement constant et la torsion α du fil transformée en couple?

Soit A le nombre par lequel il faut multiplier la torsion du dynamomètre pour obtenir la torsion correspondante du fil supposé parfaitement élastique. Dans les conditions précédentes, la torsion du dynamomètre est α; donc le fil, tordu apparemment de α, s'est tordu d'un angle au moins égal à $\alpha + A\alpha = \alpha(1 + A)$. Si le dynamomètre n'est pas sensible, A est grand devant 1. L'opération peut être considérée comme à peu près effectuée à azimut constant.

Mais, si le dynamomètre est très sensible, A est de l'ordre de l'unité : l'opération n'est plus du tout effectuée à azimut constant. Aucune correction n'est d'ailleurs directement possible, car rien ne prouve (et le contraire est même le plus souvent vrai) que l'on obtiendrait à azimut rigoureusement constant le couple $\alpha\left(\frac{1}{A} + 1\right)$.

Il existe un moyen très simple de tourner la difficulté. On utilise la vis tangente, qui permet de faire tourner le dynamomètre de U degrés par tour. Supposons que, pour un certain azimut, il y ait équilibre entre le fil et le dynamomètre. Faisons tourner (*fig.* 5) le plan des tiges EI jusqu'à un degré environ du plan vertical passant par le fil et la tige horizontale *bb* (*fig.* 1); tordons le dynamomètre de 1 tour par exemple, soit U degrés.

La tige *bb* bute sur les tiges verticales EI : nous attendons ensuite que le dyna-

momètre revienne à son azimut initial; le gain de couple, *à azimut rigoureusement constant en moyenne*, est alors de U degrés.

Grâce à l'artifice qui vient d'être indiqué, on peut utiliser un dynamomètre très sensible, sans s'éloigner des conditions d'azimut constant : si l'azimut du fil n'est pas *toujours* rigoureusement constant, il l'est rigoureusement en moyenne. La sensibilité du dynamomètre permet alors d'utiliser la méthode de lecture directe sur l'index *ef* (*fig.* 6).

Encore faut-il que le couple produit par le dynamomètre soit proportionnel au déplacement azimutal du plan des tiges *eg*; nous reviendrons plus tard sur la théorie générale des ressorts à boudin. On trouvera dans l'Appendice des remarques sur le rôle des fils *aa* (¹).

Légitimité de l'emploi simultané de deux fils. — Tordre un fil par son milieu, c'est employer simultanément deux fils de longueur moitié moindre. Les deux fils présentent toujours des phénomènes concordants, dont l'expérience donne la moyenne. Il faut qu'ils soient de même longueur, condition qu'on réalise aisément à 1^{mm}, soit à $\frac{1}{1000}$ près. Il est souhaitable qu'ils soient identiques, mais la condition est aussi difficile à réaliser, que le fil ait 1^{m} ou qu'il en ait 2.

FIL ÉTIRÉ DE 21,3 POUR 100 A LA FILIÈRE.

DÉTORSIONS PRODUITES PAR LES SURCHARGES.

1. *Réactivité au couple nul, les expériences étant faites sous des charges variables de l'une à l'autre.* — Le nombre de tours α_0, dont on peut tordre le fil sans le casser, diminue avec la charge P_0 sous laquelle se fait la torsion; le produit $P_0\alpha_0$ ne peut dépasser une certaine valeur; le champ d'expérience est donc restreint. Soit $T_0 = 0$ (temps d'arrêt au bout de la torsion), $\alpha_0 = 10$ tours effectués avec une vitesse de $21^s,7$ par tour. On donne les réactivités Δp dans les périodes 5^m-10^m, 10^m-20^m, 20^m-40^m, 40^m-80^m, les temps étant comptés à partir du retour au couple nul; α_1 est la détorsion en degrés; elle est comptée depuis le changement de sens de rotation jusque 5 minutes après le retour au couple nul. Les Δp sont donnés en douzièmes de degré :

$P_0 =$ 500.........	$\alpha_1 = 1219^\circ$	$\Delta p =$ 95, 94, 86, 83	$p =$ 358
2000.........	1215	94, 91, 89, 80	354
2300.........	1200	89, 91, 84, 84	348

(¹) Tous les appareils ont été construits, comme de coutume, par M. Pellin.

Dans les deux premières expériences, on tordait quelques minutes après la mise sous charge; dans la troisième, la charge a été maintenue 16 heures avant que l'on tordît.

La réactivité est donc certainement à peu près indépendante de la charge P_0. — On peut distinguer trois manières distinctes de faire agir la charge : 1° les fils, pris dans le même état initial, sont expérimentés sous charge variable P_0 (deux premières expériences); 2° les fils ont subi, *avant l'expérience,* des charges P variables de l'un à l'autre pendant un certain temps; puis on les essaie sous une charge, la même pour tous, P_0; 3° enfin les expériences peuvent différer par la durée et la grandeur de la charge antérieure P et aussi par la valeur de la charge P_0.

Nous avons réalisé la deuxième technique avec des fils conservés 17 mois dans une cave, les uns sous $P = 100^g$ (fils I), les autres sous $P = 5200^g$ (fils II). Leur diamètre est $0^{mm},545$; leur section $0^{mm^2},233$. Les charges P équivalent à $0^{kg},430$ et $22^{kg},320$ par millimètre carré. On monte les fils de la cave et l'essai se fait sous la charge $P_0 = 500^g$ un quart d'heure après.

Expérience : $\alpha_0 = 10^t$, $T_0 = 0$. — Intervalles pour lesquels sont données les réactivités : 5^m-10^m, 10^m-20^m, 20^m-40^m. Détorsion comme ci-dessus.

Fil I................	$\alpha_1 = 1257$	$\Delta p = 62, 57, 55$	$p = 174$
Fil II................	1256	62, 58, 55	175

L'identité est absolue. L'effet des charges antérieures P *sur la réactivité* est nulle; il est aussi nul *sur la courbe de torsion,* comme le montre l'identité des α_1.

Cette expérience ne prouve pas qu'il ne se produit aucune modification sous l'influence d'une charge forte persistante. Suivant une technique expliquée plus loin (n° 8), après 40 minutes au couple nul sous $P_0 = 500^g$, chargeons le fil à raison de 123^g par minute. Il continue à se détordre; voici les détorsions pour des intervalles de 5 minutes, soit des surcharges de 615^g (en douzièmes de degré).

Fil I...	32, 60, 71, 80, 93, 101, 119, 132, 153, 183	total...	1024
Fil II...	30, 55, 67, 83, 85, 98, 110, 128, 138, 184	»	978

Le fil qui a supporté longtemps une lourde charge semble devenu moins impressionnable à l'accroissement de charge. Les fils cassent pour 7^{kg} à 8^{kg}; la charge finale, dans les expériences précédentes, était $123 \times 50 + 500 = 6650^g$. Une charge de 7^{kg} correspond à peu près à 30^{kg} par millimètre carré : la rupture se fait toujours aux points de soudure.

De nombreuses expériences analogues ont toujours donné les mêmes résultats. La réactivité est indépendante, dans de larges limites, des charges P et P_0.

2. *Toutes choses égales, dans une première expérience (III), on tord sous* $P_0 = 100^g$, *on détord; après* 1 *minute au couple nul, on impose rapidement* $P_1 = 2100^g$; *dans une seconde expérience (IV), on tord sous* $P_0 = 2100^g$; *après* 1 *minute au couple nul, on ramène à* $P_1 = 100^g$. *On donne en I et II les résultats des expériences faites sous les charges constantes* 100^g *et* 2100^g ($\alpha_0 = 10^t$).

Les réactivités Δp sont données entre les intervalles 1-2,5, 2,5-5, 5-10, ... minutes, le temps 0 étant celui du retour au couple nul. Les Δp sont donnés en dixièmes de degré :

I..........	$\Delta p =$ 110, 85, 75, 75, 65	$p_5 = 410$	$\alpha_1 = 1279$
II..........	105, 80, 75, 75, 70	405	1265
III..........	255, 85, 70, 65, 70	545	1274
IV..........	240, 70, 65, 60, 60	495	1257

D'après les notations du Chapitre précédent, $\Delta p_1 = 110$, $\Delta p_2 = 85$, ..., pour le fil I; de plus, on pose

$$\Delta p_1 + \ldots + \Delta p_n = p_n, \qquad \Delta p_1 = p_1.$$

Les détorsions sont un peu *plus grandes* quand la torsion et la détorsion se font sous 100^g que quand elles se font sous 2100^g : la différence est inférieure à 1 pour 100.

1° Il y a accroissement de p_5 quand on tord et détord sous une charge et qu'on étudie la réactivité sous une autre plus grande ou plus petite.

2° L'accroissement est plus grand si la préparation se fait sous petite charge (100^g) et si l'on étudie la réactivité sous grande charge (2100^g) :

$$p_5 \text{ pour III} > p_5 \text{ pour IV}.$$

On ne prenait aucune précaution pour imposer ou supprimer la charge en un temps bien déterminé; on employait quelques secondes. Dans ces limites, ce temps n'influe pas sur les phénomènes.

Calculons $p_5 - p_1$ pour les expériences précédentes (en dixièmes de degré) :

I..... 300 II..... 300 III..... 290 IV..... 255

Ainsi l'accroissement de p_5 dans les dernières expériences ne porte que sur p_1, c'est-à-dire sur les premiers instants. Pour le reste, il y a diminution.

Autre expérience, $\alpha_0 = 50^t$:

$$P_0 = 100^g,\quad P_1 = 100^g,\quad p_1 = 115,\quad p_6 = 525,\quad p_6 - p_1 = 410,$$

$$P_0 = 100^g,\quad P_1 = 2100^g,\quad p_1 = 295,\quad p_6 = 670,\quad p_6 - p_1 = 375.$$

Autre expérience un peu plus compliquée faisant suite à la précédente, $\alpha_0 = 50^t$:

$$P_0 = 100^g,\quad P_1 = 2100^g \quad \text{entre } 1^m \text{ et } 2^m,5;$$

mesurons p_1 sous cette charge. A partir de $2^m,5$,

$$P'_1 = 100^g;$$

on trouve

$$p_1 = 285,\quad p_6 = 615,\quad p_6 - p_1 = 330.$$

La différence entre les p_1, pour les deux dernières expériences citées, tient à ce que les changements de charge, de P_0 à P_1, n'ont probablement pas eu lieu à des instants identiques; cependant la conclusion à tirer est nette.

$p_6 - p_1$ passe de 410.......	P_0 invariable	$= 100^g$	
à 375.......	$P_0 = 100$	$P_1 = 2100$	
à 330.......	$P_0 = 100$	$P_1 = 2100$	$P'_1 = 100$

Il y aurait donc eu avantage, pour augmenter p_6, à maintenir P_1 et à ne pas ramener à 100^g.

3. *On impose à P un seul changement d'amplitude donnée; on en fait varier la durée.* — Les fils sont préparés d'une manière uniforme sous P_0, T_1; après le retour au couple nul, on impose la surcharge variable

$$P = H \sin^2 \omega t,$$

accomplie une fois; H restant constant, on fait varier ω, c'est-à-dire la période. On détermine la réactivité. La charge maxima est $P_0 + H$.

Exemple I : $\alpha_0 = 10^t$, $T_0 = 0$, $P_0 = 150^g$, $T_1 = 5^m$. — Aussitôt la première lecture faite, 5 minutes après le retour au couple nul, on impose la variation $H = 1950^g$. On appelle p_1 la réactivité entre 5 et 10 minutes, Δp_2 entre 10 et 20 minutes. Les p sont donnés en douzièmes de degré.

Si la charge restait constante et égale à 150^g, on aurait

$$p_1 = 60,\quad \Delta p_2 = 57,\quad p_2 = 117.$$

Période.	α_1.	p_1.	$p_1 - 60$.	Δp_2.	p_2.
1s	1283	167	107	50	217
4	1273	184	124	45	229
42	1271	221	161	40	261
125	1271	247	187	43	290
250	1278	255	195	46	301

Puisque la période est inférieure à $300^s = 5^{min}$, les p_1 sont mesurés entre deux temps qui comprennent la variation entière de charge. Dans ces conditions $p_1 - 60$ mesure l'effet propre de la variation de charge : cet effet croît d'abord énormément quand la période croît, pour ne plus varier que très peu quand la période remplit à peu près tout l'intervalle auquel p_1 correspond.

Δp_2 présente un minimum dont voici l'explication. On peut poser la règle générale suivante : *quand une charge a agi longtemps, toute variation entraîne une augmentation de réactivité pour les instants qui suivent la variation*. Donc, quand la période a été longue (42^s, 125^s, 250^s), après le retour à 100^g, il y aura accroissement de Δp_2 et d'autant plus fort que la période a plus duré. Nous trouvons, en effet,

$$\Delta p_2 = 40,\ 43,\ 46.$$

Pour les courtes périodes, au contraire, la règle précédente n'a plus qu'un effet petit; c'est alors l'accroissement de p_1 qui intervient pour diminuer Δp_2; aussi voyons-nous

$$\Delta p_2 = 50,\ 45,\ 40.$$

De toute manière Δp_2 est plus petit qu'il ne serait si la charge était restée invariablement 150^g.

Exemple II. — Mêmes conditions que précédemment, excepté la charge $P_0 = 1100$; H est encore égal à 1950.

Période =	p_1 =	Δp_2 =	p_2 =
1s	163	49	212
42	221	44	265
250	254	45	299

Mêmes résultats que plus haut; valeurs numériques sensiblement identiques.

Exemple III. — *Même résultat pour une décharge*. Soient

$$P_0 = 3050, \qquad P = -H\sin^2\omega t, \qquad H = 1950.$$

La variation est la même, mais c'est une diminution.

Période =	α_1	p_1	Δp_2	p_2
1^s...	1215°	159^d	49	208
42...	1211	206	45	251
125...	1220	219	46	265

Les détorsions presque égales montrent que les fils sont sensiblement identiques. En les comparant aux détorsions de l'exemple I on constate que α_1 diminue à mesure que P_0 augmente, ce que nous avons déjà dit au n° 1. Les p actuels, peu différents des p de l'exemple I, sont un peu plus petits, ce qui confirme ce que nous avons dit au n° 2 (règle 2°).

Il est donc maintenant impossible de soutenir que c'est la variation de charge, considérée seulement en tant que variation, qui produit le phénomène; sa période intervient, et généralement toutes les conditions de l'expérience.

4. *Tractions rythmées. Influence du nombre des périodes.* — Nous savons produire des tractions rythmées suivant une fonction à peu près sinusoïdale du temps. Dans les expériences qui suivent, $P_0 = 100^g$, $\Pi = 2000^g$; la charge passe de 100^g à 2100^g. On donne le nombre m de périodes entre 1^m et 40^m : $\alpha_0 = 10^t$, $T_0 = 0$, la vitesse de torsion et de détorsion est 1 tour en $17^s,4$. Les intervalles pour lesquels on donne les Δp sont les mêmes qu'au n° 2; les Δp sont évalués en dixièmes de degré :

m.............	19	57	164	1212
Δp_1.............	235^d	245^d	255^d	240^d
p_5.............	600	590	575	545

En maintenant tout le temps $P_0 = 100^g$, on a (*voir* I, n° 2)

$$\Delta p_1 = 110, \qquad p_5 = 410.$$

Si, au lieu d'une traction rythmée, on impose 2100^g entre 1^m et 40^m, on obtient (n° 2, III)

$$\Delta p_1 = 255, \qquad p_5 = 545.$$

Ainsi tant s'en faut que l'accroissement de réactivité soit proportionnel au nombre des périodes; c'est, au moins pour les périodes choisies, tout le contraire qu'on observe. Si des variations de charge augmentent le phénomène, l'accroissement maximum est dû à un petit nombre de variations dans un temps donné. Rien ne dit que le nombre optimum soit le même aux diverses phases du phénomène, et qu'il n'y ait pas, à chaque instant, une correspondance à établir entre l'état du fil et la période, pour obtenir la détorsion maxima.

Autre expérience. — Préparons comme plus haut sous $P_0 = 100^g$; après 1^m à partir du retour au couple nul, c'est-à-dire après la première lecture d'azimut, imposons 2100^g. Après la seconde lecture (soit au temps $2^m,5$), imposons 100^g. Après la troisième (soit au temps 5^m), imposons 2100^g, et ainsi de suite. Les changements de charge se font à la main en 5^s environ. La variation n'est naturellement plus sinusoïdale.

Entre 1^m et 40^m, nous avons $m = 2,5$. Nous obtenons $p_5 = 610$, c'est-à-dire une détorsion plus grande que pour tout autre nombre plus grand de périodes.

Autre série d'expériences : $\alpha_0 = 10^t$, $T_0 = 0$, $P_0 = 1500^g$, $P = \Pi \sin \omega t$, $\Pi = 1000^g$. — La charge passe ici de 500^g à 2500^g. $T_1 = 150^s$. On commence alors les tractions rythmées jusqu'à 40^m. On donne ci-dessous les périodes en secondes, le nombre m de périodes entre 150^s et 40^m et la détorsion en douzièmes de degré :

Période........	125^s	125^s	42^s	$14^s,3$	$1^s,93$	$1^s,93$
m..............	18	18	54	157	1166	1166
p..............	420^d	417^d	418^d	408^d	387^d	386^d

Nous verrons plus loin qu'il y a toujours une oscillation pendant la traction; dans les cycles lents le calcul de p se fait en prenant le maximum; dans les cycles rapides, en prenant la moyenne. Mais cette oscillation ne dépassait pas 4^d à 5^d; ce ne serait donc que 2^d à retrancher des nombres correspondant aux cycles lents; les conclusions restent les mêmes.

5. *Tractions rythmées. Influence de l'amplitude.* — Nous désignerons, comme précédemment, par P_0 la charge de préparation; nous lui adjoignons une charge supplémentaire

$$P = P_1 + \Pi \sin \omega t.$$

Pendant les tractions rythmées, la charge moyenne est donc $P_0 + P_1$, la charge oscille entre $P_0 + P_1 \pm \Pi$.

Dans toutes les expériences de ce numéro, on a $\alpha_0 = 10^t$; vitesse de torsion et de détorsion, un tour en $21^s,7$; $T_0 = 0$. La première lecture se fait 150^s après le retour au couple nul. On établit alors les tractions rythmées; leur période est $14^s,5$; il y en a 155 entre les temps 150^s et 40^m.

Remarque essentielle. — On ne doit jamais, *à moins d'indication spéciale,* comparer les résultats numériques de numéros différents, Les expériences ont été faites sur trois paquets de fil ne présentant pas numériquement les mêmes phénomènes; *aussi les conclusions sont-elles toujours tirées de la comparaison de bouts de fils se suivant sur chaque paquet.* On s'exposerait à des erreurs

considérables en procédant autrement; car on ignore encore les conditions qui peuvent modifier, et quelquefois profondément, l'état initial de la matière formant les fils et, par conséquent, la partie quantitative des phénomènes.

Premier cas, $P_1 = 0$. — Supposons tracées dans le plan, avec Π comme abscisses et p comme ordonnées, les courbes correspondant à la détorsion entre 150^s et 5^m (p_1), 150^s et 10^m (p_2), 150^s et 20^m (p_3), et ainsi de suite.

1° Ces courbes sont nettement paraboliques et tournent leur convexité vers l'axe des abscisses.

Voici, pour $P_0 = 1500$, les ordonnées des courbes p_1 et p_4 en douzièmes de degré :

Π........	1000		775		550		325		100	0
p_1........	222		159		117		90		73	67
Diff......		63		42		27		17		
p_4........	413		355		307		270		245	237
Diff......		58		48		37		25		

2° A mesure que le numéro d'ordre de la courbe augmente, la parabolisme s'atténue. Il ne faudrait cependant pas conclure que, pour un numéro d'ordre assez grand, les courbes dussent être indiscernables expérimentalement de la forme rectiligne. L'expérience montre, au contraire, qu'à partir d'un numéro d'ordre relativement peu élevé, la différence des ordonnées de deux courbes j et $j+1$ tend rapidement vers une constante. De sorte que la courbe asymptote n'est pas une droite, mais une certaine parabole.

Ainsi, que l'amplitude Π soit 0 (pas de traction rythmée) ou 1000^g, les ordonnées des courbes p_3 et p_4 diffèrent exactement de 54 douzièmes.

On se demandera pourquoi nous déterminons avec tant de soin la forme de ces courbes. Le voici : on attache beaucoup trop d'importance aux petites oscillations. Qu'elles agissent sur certains phénomènes, nous n'y contredisons pas; ce n'est pas une raison pour qu'elles interviennent partout. Si les courbes étudiées ci-dessus tournaient leur convexité vers le haut, on serait tenté de supposer qu'elles ont une partie descendante presque verticale correspondant aux valeurs très petites de Π. Voici la suite des raisonnements que certains ne manqueraient pas de faire : « Ce qu'on appelle $\Pi = 0$ est une traction rythmée non pas nulle en réalité, mais seulement nulle *en apparence*. Déplaçons donc très légèrement l'axe des ordonnées vers la gauche; modifions donc ainsi très légèrement la position de l'origine, nous aurons une détorsion p nulle pour une oscillation de traction réellement nulle ». La forme de la courbe coupe court à tout ce raisonnement; elle tourne sa concavité vers le haut; on aurait beau repousser l'origine vers la gauche, nul n'admettra que les oscillations hypothétiques de traction puissent

atteindre une amplitude capable d'expliquer les phénomènes de réactivité, c'est-à-dire permettant aux courbes p de passer par l'origine.

Cas plus général : P_0 *est quelconque par rapport à* P_1. — Dans les expériences suivantes, la charge moyenne pendant l'oscillation $P_0 + P_1 = 1500$; Π varie entre 0 et 1000; la charge maxima est donc 2500, la charge minima est 500^g.

Nous vérifions d'abord que les valeurs de α_1 diminuent quand croît P_0. C'est un résultat que nous avons déjà énoncé deux fois. Voici les détorsions comptées à partir du commencement de la détorsion jusqu'au moment où l'on commence les tractions rythmées, soit 150^s après le retour au couple nul :

P_0.............	400^g	1500^g	2600^g
α_1.............	$1291°$	$1259°$	$1240°$

Les courbes obtenues quand $P_1 \gtrless 0$ ont les mêmes caractères que quand $P_1 = 0$. Elles sont seulement au-dessus des précédentes et ont un caractère parabolique moins marqué. Voici les courbes p_1 et p_4 pour $P_0 = 400^g$:

Π.............	1000		775		550		325		100
p_1.............	270		233		206		183		164
Diff...........		37		27		23		19	
p_4.............	453		414		381		353		332
Diff...........		39		33		28		21	

Enfin pour des charges préparatoires P'_0 et P''_0 également distantes en plus et en moins de la charge moyenne pendant la traction rythmée, c'est-à-dire ici telles que $P'_0 + P''_0 = 3000$, on obtient très sensiblement les mêmes courbes. Toutefois la courbe obtenue pour $P'_0 > 1500$, est légèrement au-dessous de celle obtenue pour $P''_0 > 1500$: ce qui est conforme à ce qui est dit au n° **2** (règle 2°).

Le faisceau des courbes de même numéro d'ordre, où l'on prend pour paramètre la charge préparatoire P_0, tout le reste étant maintenu invariable, est limité en bas par la courbe qui correspond à $P_1 = 0$ (ici par la courbe $P_0 = 1500$).

6. ***Influence d'un nombre limité de tractions rythmées, différemment réparties.***

A. ***Torsion, détorsion invariables. Arrêt*** T'_1 ***sans traction,*** T''_1 ***avec tractions,*** T'''_1 ***sans traction, de manière que*** T''_1 ***et*** $T'_1 + T'''_1$ ***soient constants.***

Exemple : $\alpha_0 = 10^t$, $T_0 = 0$, $P_0 = 1500^g$, α_1 (jusqu'au temps 150^s) $= 1282°$. — Expérience de comparaison; réactivité dans les intervalles formés par 150^s, 5^m, 10^m, 20^m, 40^m en douzièmes de degré :

$$\Delta p = 60,\ 58,\ 57,\ 54, \qquad p_4 = 239.$$

Dans les expériences suivantes, on conserve $T'_1 + T''_1 + T'''_1 = 40^m$. Après T'_1 variable, on produit 20 tractions rythmées avec $\Pi = 1000$, $P_1 = 0$; période $= 14^s,3$. On revient à P_0 et l'on attend jusqu'à 40^m. On donne la détorsion totale entre 140^s et 40^m :

T'_1..........	0^m	10^m	35^m
p..........	344	337	331

Ainsi les 20 tractions produisent à peu près le même effet à quelque moment qu'on les fasse; cependant p diminue légèrement quand T'_1 croît.

B. *Même nombre de tractions rythmées, mais avec des périodes différentes.* Si l'on peut répartir à volonté le même nombre de tractions, *de même période,* sans changer sensiblement le résultat, il ne revient pas au même de mettre dans le même intervalle le même nombre de tractions d'une autre période.

Remplissons le même intervalle (150^s-40^m) avec 20 tractions, tout le reste de l'expérience étant maintenu identique; nous trouvons dans trois expériences $p = 420$, 417, 428; moyenne 422. L'effet de m cycles diminue quand la période diminue : pour une même période, l'effet diminue quand on les impose plus tard à partir du retour au couple nul.

C. Au lieu de produire des variations sinusoïdales, faisons l'expérience comme suit :

Fil I. — Après la lecture faite 150^s à partir du retour au couple nul, imposons d'abord 2500^g (c'est-à-dire la charge maximum pour les expériences A et B) pendant 18^m; puis 500^g (c'est-à-dire la charge minima) pendant 18^m; ramenons à la charge P_0 et faisons la lecture au temps 40^m. Nous trouvons $p = 429$, *c'est-à-dire plus que pour toutes les autres expériences.*

Fil II. — Opérons de même, mais commençons par la charge minima. Commençons par imposer 500^g pendant 18^m, finissons par 2500^g pendant 18^m, ramenons à 1500^g et déterminons p. Nous trouvons $p = 418$, 421 dans deux expériences.

En définitive, ce n'est pas tant la variation de charge qui intervient que le temps passé sous des charges différentes.

7. *Nombre de périodes très grand et amplitude très petite.* — Quelques physiciens ont admis que le phénomène de réactivité était dû *en entier* à de petits cycles de torsion, de température ou de traction, bref à des ébranlements. En particulier, si Π est l'amplitude des cycles, m le nombre des cycles dans un temps donné, cette opinion revient à admettre que le phénomène dépend de $m\Pi$, quand m tend vers ∞ et Π vers 0, le produit restant fini.

Nous avons déjà opposé à cette théorie des objections de principe (Chap. IV). Nous sommes amené à en formuler d'autres, en cherchant quelles conditions expérimentales il faut satisfaire pour être sûr d'imposer au fil des cycles nombreux d'amplitude donnée.

S'il est facile d'exercer, *sur la pièce qui fixe l'extrémité du fil,* une force de la forme $f = f_0 \sin \omega t$, ω pouvant être aussi grand qu'on veut, ce n'est pas une raison pour que le fil subisse cette force.

Soient M une masse terminant le fil, l son déplacement à partir de la position d'équilibre pour une surcharge nulle, Φ la constante de traction du fil. Admettons, ce qui est faux, que la force se transmette instantanément d'un bout à l'autre du fil. L'équation est

$$\mathrm{M}\frac{d^2 l}{dt^2} = f_0 \sin \omega t - \Phi l.$$

Aucun entretien régulier n'est possible dans ces conditions (*voir* HELMHOLTZ, *Acoustique*). Admettons donc un amortissement; on trouve

$$\mathrm{M}\frac{d^2 l}{dt^2} = -\Phi l - b^2 \frac{dl}{dt} + f_0 \sin \omega t,$$

dont l'intégrale est

$$l = \frac{f_0 \sin \varepsilon}{b^2 \omega}(\sin \omega t - \varepsilon), \qquad \operatorname{tang} \varepsilon = \frac{b^2 \omega}{\Phi - \mathrm{M}\omega^2}.$$

Considérons maintenant la période d'oscillation de la masse M attachée au fil, sans aucune force surajoutée. On a

$$\mathrm{T}_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = 2\pi\sqrt{\frac{\mathrm{M}}{\Phi}};$$

d'où

$$\operatorname{tang} \varepsilon = \frac{1}{\mathrm{M}}\,\frac{b^2 \omega}{\omega_1^2 - \omega^2}.$$

Si la période du mouvement imposé est petite par rapport à T_1, si par conséquent ω est grand devant ω_1, ε est petit, $l = 0$. *L'existence de la masse* M *empêche toute transmission jusqu'au fil.* Dans le cas général, la force transmise varie entre les limites $\pm \frac{\Phi f_0 \sin \varepsilon}{b^2 \omega}$; elle n'a aucun rapport nécessaire avec la force imposée $f_0 \sin \omega t$. En résumé, tant que M n'est pas négligeable, il nous est impossible d'imposer à un fil un cycle de traction de période quelconque, si petite que nous en admettions l'amplitude.

Si j'imposais, non plus la force, mais l'allongement, les conclusions seraient identiques. Je peux lier l'extrémité du fil à un excentrique, mais le fil ne suivra

pas les mouvements de l'excentrique, si je ne donne pas le temps à la déformation de se transmettre, si les oscillations longitudinales ne peuvent se propager régulièrement. Il est vrai que, s'il y a synchronisme, on retombe sur une autre difficulté encore plus grave; l'amplitude de la déformation tend d'elle-même à augmenter, *à moins que tout ne s'arrête*.

Les conclusions précédentes sont absolument générales et s'appliquent à toute déformation; c'est une conséquence nécessaire de l'inertie.

Il en est de même pour les cycles de température. *Des oscillations petites et nombreuses, produites à la surface, n'atteignent pas l'axe du fil.* Produit-on l'échauffement par un courant alternatif? Quand la période diminue, le courant finit par ne plus passer qu'à la surface; les conclusions restent identiques. Nous savons d'ailleurs calculer très exactement, pour une conductibilité donnée, jusqu'à quelle profondeur des oscillations de température superficielles se feront sentir à une fraction donnée de leur intensité.

Il serait donc absurde de chercher à imposer des cycles de traction de l'ordre du centième ou du millième de seconde; l'effet serait nul et l'expérience un trompe-l'œil. Nous ne disons pas seulement que des oscillations très petites et très nombreuses ne produisent aucun effet sur les phénomènes qui nous occupent, *nous disons qu'elles n'existent pas*. Nous connaissons parfaitement la limite inférieure des périodes qui peuvent être réalisées; elles sont liées à des phénomènes sonores généralement perceptibles, et il n'y a aucune bonne raison pour admettre qu'elles échappent à nos méthodes d'observation. Quant à arguer qu'il s'agit de vibrations intramoléculaires, nous n'avons pas l'habitude de discuter l'inconnaissable. Ces considérations feront comprendre le but des expériences suivantes.

La période choisie est $0^s,674$, $\alpha_0 = 10^t$, $P_0 = 450^g$. Les Δp sont observés dans les intervalles compris entre 150^s, 5^m, 10^m, 20^m, 40^m. Les tractions rythmées commencent 150^s après le retour au couple nul : il y en a 3300 environ entre 150^s et 40^m. $P_1 = 0$. On donne les Δp en douzièmes de degré. On a, comme moyenne des détorsions comptées jusqu'au temps 150^s, 1288°.

$H = 0$....	$\Delta p = 64, 124, 183, 239$	$p = 610$	$H = 20$....	$\Delta p = 63, 122, 179, 230$	$p = 594$
	64, 124, 180, 234	602	60. ..	65, 124, 181, 238	608
	64, 125, 184, 239	612	100....	66, 125, 184, 232	607
			100....	65, 126, 182, 235	608
Moyenne.	$\Delta p = 64, 124, 182, 237$	$p = 608$	Moyenne...	$\Delta p = 65, 124, 181, 234$	$p = 604$

L'expérience précédente est faite avec un fil étiré, la filière étant baignée dans de l'eau. L'expérience suivante, au contraire, est faite avec un fil étiré, la filière étant baignée dans de l'huile de pétrole. Notre étonnement a été grand de trouver des

phénomènes quantitativement si différents, *ce qui ne les empêche pas d'obéir aux mêmes lois qualitatives, les seules que nous cherchions.*

$\Pi = 0$...	$\Delta p = 94, 189, 277, 358$	$p = 918$	$\Pi = 20$...	$\Delta p = 97, 189, 278, 366$	$p = 930$
	$94, 186, 277, 366$	923	60...	$98, 197, 284, 367$	946
			100...	$101, 195, 289, 371$	956
			100...	$101, 195, 285, 372$	953
Moyenne	$\Delta p = 94, 187, 277, 362$	$p = 920$	Moyenne..	$\Delta p = 99, 194, 284, 369$	$p = 946$

La détorsion $\alpha_1 = 1291°$.

Tandis que pour le premier fil l'effet des cycles de traction était nul, il est ici à peu près de $\frac{1}{40}$. Même dans ce second cas, même en admettant la proportionnalité de l'effet au produit $m\Pi$ (*voir* n° 5), pour expliquer la réactivité par des cycles petits et nombreux de traction, il faudrait consentir à l'existence de trépidations, irrévélables par l'expérience et équivalant à 40 fois 3300 oscillations ayant 100^g d'amplitude. Ce qui serait de la démence.

Et encore la conclusion précédente serait beaucoup trop favorable. Prenons en effet un fil préparé comme ci-dessus; mais, aussitôt la première lecture, portons la charge de $P_0 = 450^g$ à 550^g, c'est-à-dire au maximum du cycle pour lequel $\Pi = 100$; On trouve alors

$$\Delta p = 101,\ 199,\ 283,\ 267, \qquad p = 950.$$

Ainsi ce n'est pas l'*oscillation* qui agit, c'est l'existence d'une surcharge; on obtient un effet plus grand sans oscillation, en maintenant la charge maxima du cycle de traction.

8. *Fil tordu, maintenu un temps T_0 sous couple, détordu et abandonné au couple nul (préparation commune); maintenu un temps T_1 variable au couple nul sous la charge de préparation P_0; chargé suivant une loi invariable (généralement proportionnellement au temps $P = \Pi t$) d'une surcharge invariable et abandonné indéfiniment sous cette charge.* — Le paramètre variable de la série d'expériences est donc T_1. La figure 7 représente les phénomènes en prenant pour abscisses les temps comptés à partir du retour au couple nul, pour ordonnées les détorsions.

Le temps T_1 est figuré en OA, OA′, ...; la réactivité p pendant ce temps, en Aa, A′a', ...; la détorsion α' pendant la charge, par bd, $b'd'$, . .; la durée invariable de la charge τ, par ab, $a'b'$, ...; enfin les courbes def, $d'e'f'$, ..., sont les courbes de détorsion sous la charge supplémentaire constante.

Voici les résultats de l'expérience :

1° La détorsion α' diminue à mesure que T_1 augmente, c'est-à-dire à mesure

que l'on part d'un point a, a', ... plus vers la droite sur la courbe de réactivité sous P_0. Quand T_1 croît, α' diminue d'abord très vite, puis de plus en plus lentement.

2° Les longueurs bc, $b'c'$, ... représentent les valeurs de Δp pendant le temps τ. Les longueurs dc, $d'c'$, ... sont donc égales à $\alpha' - \Delta p$. L'expérience montre qu'elles sont presque invariables : les courbes $aa'a''$ et $dd'd''$ sont presque identiques. Plus exactement $\alpha' - \Delta p$ diminue lentement quand T_1 croît; les courbes $aa'a''$ et $dd'd''$ se rapprochent quand on les parcourt vers la droite. Deux hypothèses en présence : a. Ou l'effet produit sur la réactivité par l'accroissement de charge est à peu près indépendant de T_1; b. Ou à la réactivité non modifiée se superpose un phénomène dépendant de la charge, les deux phénomènes restant à peu près indépendants l'un de l'autre.

3° Les points d, d', d'' étant sur une courbe ascendante, $aA + bd = p + \alpha'$ croît quand T_1 croît.

4° Les courbes def ont une forme très analogue à la courbe $Oaa'a''$. Elles s'entrecoupent de manière que la première finisse par être au-dessous de toutes les autres.

Obtenir la plus grande détorsion $p + \alpha' + p'$ dans un temps donné t à partir du retour au couple nul. — L'expérience montre qu'il faut généralement répartir le temps t entre les deux charges initiale et finale. En d'autres termes, il doit exister, entre le temps T_1 passé sous P_0 et le temps $t - T_1 - \tau$ passé sous la charge finale, un certain rapport fonction de t (fonction, bien entendu, de toutes les autres circonstances du phénomène, que nous supposons constantes pour toute une série d'expériences).

Exemple. — Voici quelques nombres pour fixer les idées :

$\alpha_0 = 50^t$, $T_0 = 0$, $\tau = 40^m$, $P_0 = 100^g$, $P = \Pi t$, $\Pi = 125^g$ par minute.

La charge supplémentaire

$$P_1 = 125 \times 40 = 5000.$$

Les p sont comptés à partir de 1^m depuis le retour au couple nul :

T_1.	p.	α'.	Δp.	$\alpha' - \Delta p$.	$\alpha' + p$.
1^m	0	118	45	73	118
240^m	61	72	2	70	133

Les angles sont donnés en degrés.

Le fil se rompait pour 7^{kg} ou 8^{kg}; pendant que s'écoulent les 5^{kg}, il s'allonge d'environ $2^{mm},5$. Sa section est $0^{mm^2},233$; la charge est donc alors de 21^{kg} par

millimètre carré environ. On admet généralement qu'il faut $10^{kg},7$ pour allonger d'un millimètre un fil de cuivre écroui d'un mètre de longueur et d'un millimètre carré de section ; 21^{kg} allongeraient de 2^{mm} environ. Mais il est impossible de faire dans l'allongement total la part de la flexion des supports, du redressement du fil et de la déformation purement élastique.

Loi de détorsion le long des courbes ad, a'd', ... pendant la surcharge effectuée proportionnellement au temps. — Nous donnons ci-dessous les $\Delta\alpha'$ dans les intervalles formés par les temps 0^m, 5^m, 10^m, ... jusqu'à $\tau = 40^m$; l'origine des temps est aux points a, a', ...

$T_1 =$			
	2^m..........	$\Delta\alpha' =$ 18, 12, 11, 11, 12, 13, 15, 17	$\alpha' = 109^o$
	5..........	10, 10, 10, 11, 12, 14, 15, 17	99
	900..........	1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15	64

Quand T_1 est grand, la détorsion s'exprime par l'expression $\alpha' = aP^2$. Quand T_1 est petit, $\Delta\alpha'$ commence par décroître pour croître ensuite, ce qui tient à l'influence plus grande de la réactivité.

Remarques. — A. Les phénomènes exposés dans les numéros précédents se retrouvent ici. Supposons qu'après avoir chargé, on décharge; il y aura continuation de détorsion due à la diminution de la charge. Reprenons par exemple l'expérience $T_1 = 5^m$, $\alpha' = 99^o$; pendant les 5^m suivantes, sous la charge constante 5100^g, $p' = 8^o$ le long de la courbe correspondante *def*. On siphonne l'eau du seau; quand la charge redevient 100^g (ce qui arrive au bout de 5^m), il y a eu détorsion de $6^o,5$. Enfin, si l'on abandonne jusqu'au lendemain sous 100^g, nouvelle détorsion de 10°.

B. Voici une expérience dont nous aurons l'explication plus loin.

Soit $T_1 = 40^m$, $p = 43^o$. Chargeons de 4^{kg}; $\alpha' = 52^o$. Déchargeons en 5^m, détorsion 8°. Abandonnons sous 100^g pendant 16 heures; nouvelle détorsion 12°. Tout cela est conforme à ce qui précède. Rechargeons maintenant à grande vitesse (534^g par minute); il y a d'abord *retorsion,* puis ensuite *détorsion* nouvelle quand la charge dépasse 4^{kg}.

Autre série d'expériences: $\alpha_0 = 10^t$, $P_0 = 500^g$, P_1 = charge supplémentaire $= 4^k$. — La charge s'opérait en 4 minutes; on vidait à l'aide d'un siphon un vase contenant 4^{kg} d'eau; l'écoulement, identique pour tous les fils, n'est plus uniforme. On a cherché comment se fait l'entrecoupement des courbes *def*, *d'e'f'*, ...

Les détorsions (en douzièmes de degré) sont comptées à partir de 5^m après le retour au couple nul.

$T_1 = 5^m$	$t = 100^m$	Détorsion...	1063^d	$T_1 = 40^m$	$t = 100^m$	Détorsion....	1076^d
	$t = 210^m$	» ...	1142^d		$t = 210^m$	»	1177^d

Les courbes se sont donc coupées et divergent à mesure que t croît. L'entrecoupement peut se faire extrêmement loin.

$t = 1200^m$: $T_1 = 5^m$ Détorsion... 1314; $T_1 = 840^m$ Détorsion... 1261

Les courbes ne se sont pas encore coupées : mais leur direction indique qu'elles se seraient coupées au bout d'un temps probablement très long.

Forme des courbes de f. — En faisant abstraction de la partie initiale à courbure très prononcée, elles satisfont à la loi générale de première approximation

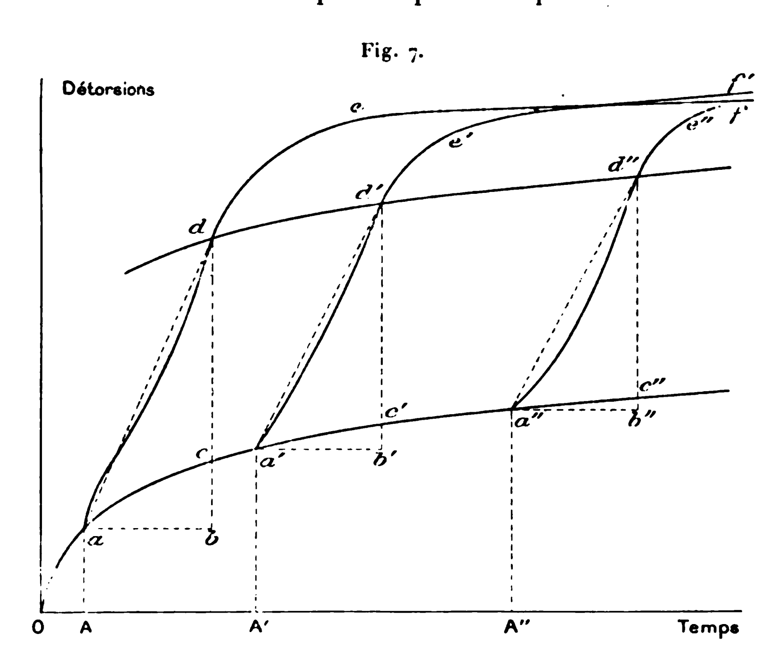
$$p' = \mathrm{A} \log(t + \mathrm{B}),$$

que ses propriétés, déjà étudiées (Chap. VI, p. 459), rendent précieuses pour les interpolations.

La préparation restant la même et aussi le temps T_1, *quelle influence a sur le phénomène la loi suivant laquelle on charge?* On part d'un même point a de la courbe de réactivité. L'expérience montre que, quelle que soit la ligne de charge, on aboutit encore très sensiblement en un point d_1 de la courbe $dd'd''$, parallèle à la courbe de réactivité $aa'a''$, et que les deux courbes def et $d_1e_1f_1$ à charge constante tendent asymptotiquement l'une vers l'autre.

Si donc on veut un schéma un peu simplifié des phénomènes étudiés dans ce

Fig. 7.



paragraphe, on tracera trois courbes; la courbe de réactivité $Oaa'a''$, une courbe parallèle $dd'd''$ et une troisième courbe qui ne s'éloigne pas non plus d'être paral-

lèle à la première. On parcourt un morceau de $aa'a''$, on atteint au bout de la surcharge, effectuée suivant une loi quelconque, un point de la seconde (immédiatement déterminé par la durée de charge); enfin on marche asymptotiquement vers la troisième (*fig.* 7).

9. *Fils tordus, maintenus tordus un temps* T_0 *variable, maintenus au couple nul un temps fixe, puis supportant une charge qui croît proportionnellement au temps.* — $\alpha_0 = 10^t$, vitesse de torsion $21^s,7$; $P_0 = 500$, $T_1 = 15^m$. Les angles sont donnés en douzièmes de degré. Fil de comparaison $T_0 = 16^h$, $\alpha_1 = 839^o$ (compté jusqu'à 5^m après le retour au couple nul). Entre 5^m et 15^m, $\Delta p = 238^d$. L'écoulement donne 123^g par minute; les $\Delta\alpha'$ sont pris dans les intervalles formés par 0^m, 5^m, 10^m, ..., 50^m, comptés à partir du commencement de l'écoulement.

$$\Delta\alpha' = 96,\quad 118,\quad 129,\quad 137,\quad 143,\quad 159,\quad 177,\quad 187,\quad 206,\quad 245.$$

Considérons maintenant les courbes correspondant à des valeurs plus petites de T_0; soit $\Delta_1 p$ et $\Delta_1 \alpha'$ les quantités correspondantes. On a

T_0	0^m	5^m	15^m	60^m
α_1..........	1239	1122	1086	1011
$\dfrac{100\,\Delta p}{\Delta_1 p}$.....	156	131	116	107

Les rapports $\dfrac{\Delta\alpha'}{\Delta_1\alpha'}$ sont, au début de l'écoulement, égaux aux rapports $\dfrac{\Delta p}{\Delta_1 p}$; ils diminuent ensuite très vite, puis lentement, et tendent vers l'unité à mesure que croît la surcharge. Ainsi, pour $T_0 = 0$ et $T_0 = 16^h$, on a, entre 0^m et 5^m, $\dfrac{\Delta\alpha'}{\Delta_1\alpha'} = 1,52$; entre 10^m et 15^m, il est $1,30$; entre 40^m et 45^m, il est $1,14$.

Si T_0 est grand, $\dfrac{\Delta\alpha'}{\Delta_1\alpha'}$ est à peu près constant et voisin de $\dfrac{\Delta p}{\Delta_1 p}$.

Les courbes donnant ces rapports en fonction de la surcharge se placent les unes sous les autres sans se couper.

Puisque l'influence du temps d'arrêt T_0 diminue quand la surcharge augmente, ce ne sont plus que les effets de la torsion qui se font sentir.

Autre expérience : $T_1 = 80^m$, $T_0 = 14^h$ et $T_0 = 0$.

Réactivités dans les intervalles 5^m-10^m, 10^m-20^m, 20^m-40^m, 40^m-80^m et leur rapport :

$T_0 = 14^h$	Δp = 152,	162,	165,	171		$p = 650$
$T_0 = 0$..........	$\Delta_1 p$ = 95,	94,	86,	83		$p_1 = 358$
$\dfrac{100\,\Delta p}{\Delta_1 p}$..........	= 160,	172,	192,	206		

Le résultat est conforme à ce qui est dit au Chapitre VIII, n° 5. Le rapport croît.

On installe l'écoulement : on donne $\Delta\alpha'$ dans les intervalles formés par 0^m, 5^m, 10^m, ... et $\frac{100\,\Delta\alpha'}{\Delta_1\alpha'}$:

$T_0 = 14^h$.... $\Delta\alpha' = 41,\ 68,\ 94,\ 106,\ 115,\ 138,\ 145,\ 162,\ 182,\ 214$ $\qquad p = 1268$

T_0........ $\frac{100\,\Delta\alpha'}{\Delta_1\alpha'} = 178,\ 135,\ 128,\ 124,\ 120,\ 116,\ 114,\ 112,\ 108,\ 106$

Le rapport $\frac{\Delta\alpha'}{\Delta_1\alpha'}$ croît donc pour les faibles surcharges à mesure que T_1 croît; mais il tend alors plus rapidement vers l'unité pour les grandes surcharges. En effet, au début de la surcharge, la réactivité intervient avec un rapport d'autant plus grand que T_1 est plus grand; pour les grandes surcharges, la réactivité, qui est d'autant plus faible en valeur absolue que T_1 est plus grand, intervient de moins en moins : le rapport est voisin de l'unité.

Les expériences actuelles ont permis de contrôler des résultats énoncés au n° 8 sur la forme de la courbe *dd'd''* : p est la réactivité entre 5^m après le retour au couple nul et T_1; α' la détorsion pendant la surcharge effectuée à vitesse constante pendant 50^m ($P_1 = 50 \times 123 = 6150$) :

	$T_0 = 14^h$.			$T_0 = 0^h$.		
T_1.	p.	α'.	$p+\alpha'$.	p.	α'.	$p+\alpha'$.
5^m.........	0	1709	1709	0	1351	1351
15.........	238^d	1584	1822	152^d	1254	1406
80.........	650^d	1268	1918	358^d	1096	1454

TORSIONS ET DÉTORSIONS QUI SONT COMME PREMIÈRE APPROXIMATION DES FONCTIONS DÉTERMINÉES DE LA CHARGE.

10. Dans tous les phénomènes précédents, la détorsion n'est pas, même approximativement, fonction déterminée de la charge. Si, après avoir chargé, on décharge, la détorsion ne se transforme pas en une torsion (*voir* n° 8, A). Il existe une seconde catégorie de phénomènes, souvent noyés dans les précédents, mais que l'on peut mettre en évidence, en attendant que la réactivité se soit suffisamment atténuée. Pour ceux-ci, la torsion est, comme première approximation, fonction de la charge; par la répétition des mêmes cycles de traction, on finit par obtenir un cycle à peu près fermé dans le plan P, α. Le phénomène est doué d'hystérésis.

Pour faire comprendre l'infinie variété des faits, nous allons procéder par approximations successives : je préviens que le sujet est d'une grande difficulté. Nous poserons les règles suivantes :

1° La réactivité à charge constante diminue avec le temps; on a approximativement

$$p = A \log(t + B).$$

2° Si le fil est resté longtemps sous P_0 et que la charge devienne P_1, tant pendant le passage de P_0 à P_1 que dans les instants qui suivent, la détorsion se trouve augmentée. L'augmentation croît avec l'intervalle $P_1 - P_0$.

3° Nous admettons *provisoirement* qu'aux détorsions précédentes se superposent des torsions et des détorsions fonction déterminée de la charge; de sorte que la variation totale d'azimut α sera formée de deux termes : ψ qui englobe les phénomènes des 1° et 2°, φ qui correspond au 3° :

$$\alpha = \psi + \varphi, \qquad \psi = f_0(t, P), \qquad \varphi = f_1(P).$$

P est la charge totale.

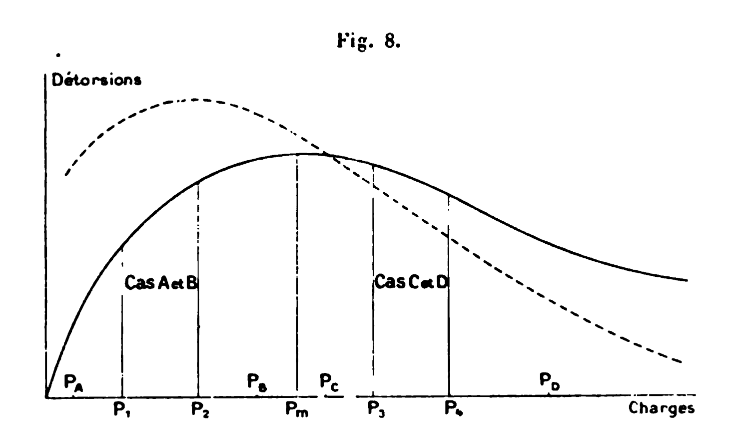
4° La courbe $\varphi = f_1(P)$ a la forme représentée (*fig.* 8).

Ceci posé, nous aurons deux groupes et quatre sous-groupes d'apparences fondamentales.

Premier groupe. — On impose un cycle $P_1 - P_2$ ($P_1 < P_2$) qui se trouve dans la partie ascendante de la courbe :

A. Le fil est resté avant l'expérience longtemps sous une charge... $P_A < P_1$ (*fig.* 9)
B. » ... $P_B > P_2$

Fig. 8.



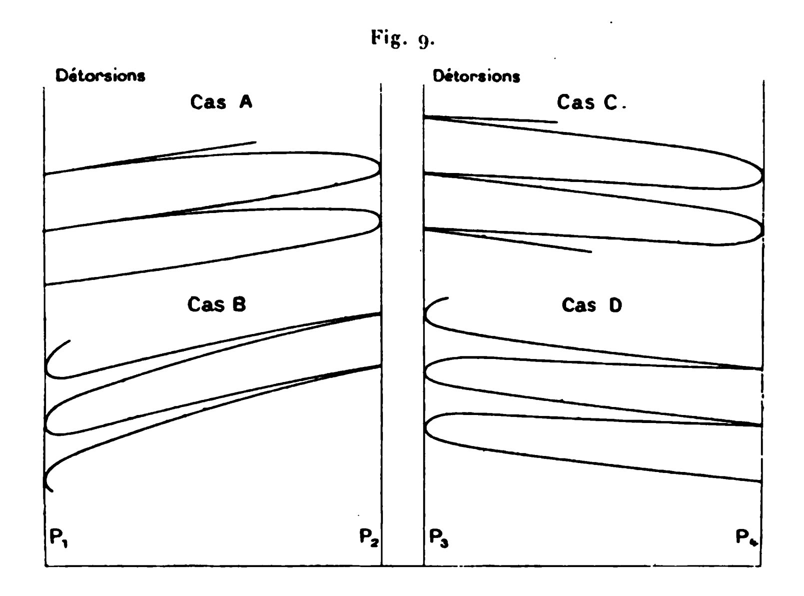
Second groupe. — On impose un cycle $P_3 - P_4$ ($P_3 < P_4$) qui se trouve dans la partie descendante de la courbe :

C. Le fil est resté avant l'expérience longtemps sous la charge...... $P_C < P_3$
D. » ...... $P_D > P_4$

A l'inspection des figures, on comprend immédiatement ce que nous appelons *petit bout* et *gros bout des cycles.*

Il suit de la deuxième règle que le petit bout se trouve toujours du côté de la charge longtemps subie avant l'expérience. N'oublions pas que les phénomènes des 1° et 2° sont toujours des détorsions. Dans ces groupes fondamentaux se rencontrent les apparences les plus diverses, pour des raisons que nous verrons. On peut obtenir successivement, pour un même fil et pour le même intervalle $P_3 - P_4$,

Fig. 9.



les apparences d'un même groupe. Après avoir maintenu, par exemple, longtemps la charge à la valeur P_C et fait une expérience rentrant dans le sous-groupe C, on la maintient à la valeur P_D assez longtemps; on trouve alors l'apparence D. Même remarque pour les apparences A et B.

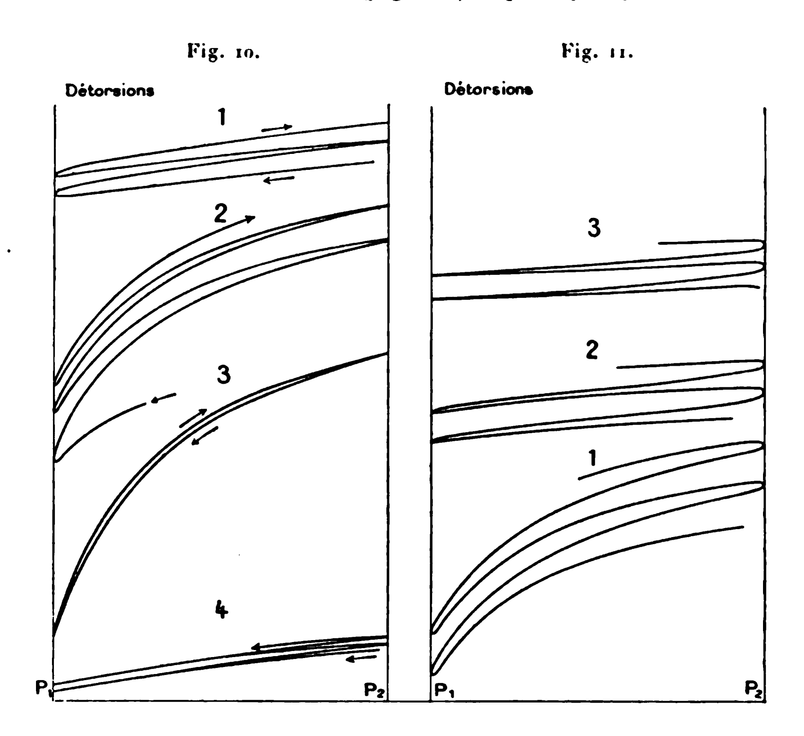
11. *Exemples de courbes réellement obtenues.* — Les phénomènes actuels sont petits, très compliqués, et j'ai dû faire plus de 200 clichés 13×18 représentant plusieurs fois ce nombre de courbes, pour en saisir les allures générales. Je crois donc indispensable de donner, non pas comme dans la figure précédente, des courbes un peu schématiques et ramenées à la même échelle, mais des exemples réels et le calque de quelques clichés.

Premier exemple : Fil de 90^{cm}, $\alpha_0 = 10^t$, $P_0 = 100^g$, abandonné une nuit sous 4125^g.

Cycle : $\Pi = 525^g$, période $= 125^s$. On fixe le cycle (4125-3075), puis on passe au cycle (2275-1225).

Pour ces cycles, et par conséquent pour tous les cycles correspondant à des charges plus petites, on se trouve à gauche de la charge P_m, etpar conséquent dans le cas B. Le cliché obtenu est en 1 (*fig.* 10). Après quelque temps on passe au

Fig. 10. Fig. 11.



cycle (250-1300); on obtient le 2 (*fig.* 10). On passe au cycle plus à gauche (125-1175) et, après l'avoir parcouru plusieurs fois, on abandonne 3^h sous 125^g. On recommence ensuite; *le cycle est à peu près fixé, mais son aire n'est pas nulle*. Il y a hystérésis; nous reviendrons plus loin là-dessus. Il est parcouru dans le sens des aiguilles d'une montre 3 (*fig.* 10). Jusqu'à présent nous sommes restés dans le cas B; mais retournons maintenant au cycle primitif (4125-3075); le cliché 4 prouve que nous avons passé au cas A; le petit bout qui était à gauche est maintenant à droite. La raison de ce changement est évidente : avant les premiers parcours, on a maintenu longtemps une charge plus grande que toutes les charges correspondant à ces parcours; avant le dernier, on a maintenu plusieurs heures une charge plus petite que celles qui correspondent au cycle décrit.

Dans les figures, les charges croissent de gauche à droite et les détorsions sont comptées vers le haut.

Les courbes sont reproduites à moitié grandeur naturelle; 1^{cm} d'ordonnée vaut 25 minutes d'angle environ.

Remarques. — Les courbes sont tirées de clichés différents (la série en comprenait huit). Supposons qu'ils aient été faits sur un plan indéfini; on obtiendrait une courbe continue dont la figure donne quatre fragments. Nous nous proposons d'indiquer comment ces fragments seraient disposés les uns par rapport aux autres sur le plan et quelles seraient les courbes de raccordement. Au moment où commence l'expérience, le fil s'est déjà notablement détordu sous l'influence de la réactivité, la charge étant d'abord 100^g pendant la préparation, puis 4125^g toute la nuit. Du cycle (4125-3075) on est passé à un cycle plus à gauche (2275-1225). Au moment de la décharge, la courbe est descendue, puisque nous nous trouvons à gauche de P_m. Mais, le nouveau cycle n'étant pas fixé, la courbe inscrite maintenant entre les deux verticales 2275 et 1225 remonte. De sorte que le n° 1 se trouverait à gauche et au-dessus de la courbe non représentée correspondant au cycle (4125-3075).

Après avoir fixé le dernier cycle, on passe au cycle plus à gauche (250, 1300). Ici encore, au moment du passage, brusque descente de la courbe vers la gauche; puis remontée entre les verticales 250 et 1300. Ces deux effets inverses amènent le cliché 2 à gauche et à peu près à la même hauteur que celui (non représenté) qui correspondrait au cycle (2275-1225) fixé.

Ces effets résultent immédiatement : 1° de ce qu'on est à gauche de P_m (*fig.* 8); 2° de l'application de la deuxième proposition du n° 10 aux cycles non fixés.

Passons au cas inverse : on remplace un cycle par un cycle plus à droite dans le plan. La courbe doit se relever brusquement vers la droite, puisqu'on est à gauche de P_m, et, inscrit entre les deux nouvelles verticales, le cycle se fixe en rampant vers le haut; les deux effets sont de même sens.

Tout cela est très simple, si l'on veut : j'ai eu beaucoup de peine à le débrouiller.

Deuxième exemple : $\alpha_0 = 10'$, $P_0 = 100^g$. — On fait parcourir des cycles qui sont de plus en plus à droite du plan. Nous sommes encore à gauche de la charge P_m. Comme le fil n'a subi d'abord que de faibles charges, nous sommes dans le cas A. Les clichés correspondent : n° 1 (250-1300); n° 2 (1225-2275); n° 3 (3075-4125). D'après ce qui vient d'être dit, quand on passe de l'un au suivant, le cycle se déplace vers la droite et vers le haut (*fig.* 11).

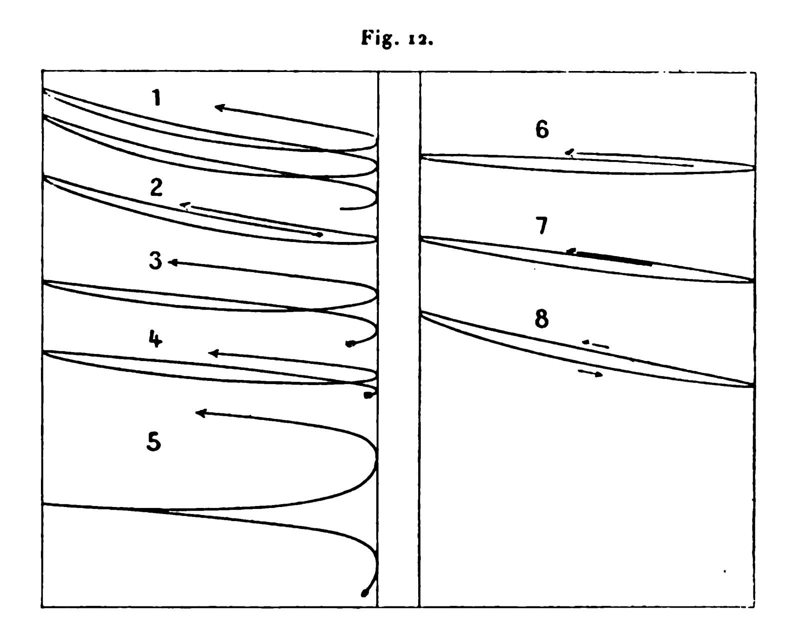
Nous allons trouver des exemples des cas C et D en étudiant de plus près ce qui se passe lorsque l'on ferme les cycles par la répétition.

12. *Modification de la courbe* P, α *quand le cycle est maintenu indéfini-*

ment. — Les hypothèses posées au n° 10 sont trop simplistes pour expliquer la formation de boucles. En effet la réactivité entraîne toujours une détorsion; si le second phénomène est fonction déterminée de la charge, le mouvement du point figuratif, entre deux passages à la même charge, ne peut se faire que vers le haut. Il faut donc invoquer nécessairement une hystérésis.

Troisième exemple : $\alpha_0 = 50^t$, $P_0 = 150^g$. — On maintient 18^h sous 150^g. Le cliché 1 (*fig.* 12) représente le cycle (150-1600) en train de se fixer. Nous sommes à droite de P_m, malgré la petitesse de la charge inférieure du cycle; l'expérience rentre donc dans le cas C. Nous reviendrons au n° 13 sur la position de ces charges P_m, correspondant au changement d'effet des surcharges. Le cliché 2 représente le même cycle à peu près fixé et fermé : les flèches indiquent les sens de parcours. Le cliché 3 représente le cycle (1200, 2650). Au passage de 2 à 3, il y a d'abord brusque torsion (nous sommes à droite de P_m), puis détorsion pendant la fixation. En 4, même cycle plus fixé. L'inclinaison moyenne du 4 est inférieure à celle du 2, comme le veut la forme de la courbe (*fig.* 8)

Fig. 12.



$\varphi = f_1(P)$. En 5, cycle (3050-4500) non encore du tout fixé. La détorsion est si grande d'après la règle 2° du n° 10, que la boucle a disparu; en 6, même cycle à peu près fixé.

On reprend les mêmes parcours en sens inverse; ils sont alors immédiatement presque complètement fixés : les clichés 7 et 4, 8 et 2 se correspondent. On

remarque que l'inclinaison moyenne du cycle 8 est plus grande que l'inclinaison moyenne du 2; nous reviendrons plus loin là-dessus. L'échelle des ordonnées est de 1^{cm} pour 25'. La longueur du fil est 90^{cm}.

Quatrième exemple. — Cet exemple est particulièrement intéressant, parce qu'il nous montre les phénomènes analogues à la réactivité et l'hystérésis tendant à produire des déformations opposées du cycle. $\alpha_0 = 50^t$, $P_0 = 150^g$. Aussitôt la détorsion, on installe 4500^g que l'on maintient 18^h.

Le n° 1 représente le cycle (3050-4500) fixé (*fig.* 13).

Nous installons (1200-2650). Nous sommes manifestement à droite de P_m et par conséquent dans le cas D. Le petit bout du cycle devrait, d'après le n° 10, correspondre à 2650 et être à droite. C'est à gauche que devrait se rencontrer la plus grande vitesse verticale vers le haut (le gros bout avec déplacement vers le haut). Mais l'hystérésis intervient et doit aboutir à produire un cycle fermé parcouru en sens inverse des aiguilles d'une montre, c'est-à-dire avec une vitesse verticale vers le bas à gauche. Si donc la réactivité l'emportait, il y aurait vitesse vers le haut à gauche; c'est ce que nous verrons tout à l'heure au 4. Ici l'hystérésis l'emporte; il y a dès l'abord vitesse vers le bas, à gauche du cycle. C'est ce que l'on voit dans le cliché 2 : mais la première boucle est bien moins épaisse que la seconde.

Le n° 3 représente le cycle (1200-2650) à peu près fermé. On installe alors le cycle (150-1600), n° 4. Même raisonnement que plus haut; ici l'hystérésis a le dessous, la première boucle disparaît. Le n° 5 donne le même cycle fixé.

Revenons maintenant à des cycles de plus en plus à droite. Les deux ordres de phénomènes vont augmenter la vitesse verticale vers le haut, à droite des cycles. Ceux-ci se bouclent donc immédiatement. En 6, cycle (1200-2650); en 7, cycle (3050-4500).

13. *Étude de la courbe* $\varphi = f_1(P)$. — La courbe $\varphi = f_1(P)$ (*fig.* 8) dépend des conditions de la torsion et varie par l'effet des cycles parcourus. Dans nos deux premiers exemples (*fig.* 10 et 11), $\alpha_0 = 10^t$, $P_0 = 100^g$. Pour toutes les charges inférieures à 4125^g, nous sommes à gauche de P_m : un accroissement de charge produit une détorsion. Dans nos deux derniers exemples (*fig.* 12 et 13), $\alpha_0 = 50^t$, $P_0 = 150^g$. Pour toutes les charges comprises entre 150^g et 4500^g, nous sommes à droite de P_m. Toute la partie de la courbe φ à gauche de P_m a pratiquement disparu.

Pour diminuer l'importance de la partie gauche, il faut augmenter α_0 et la charge P_0 sous laquelle on tord le fil. Une faible torsion sous une faible charge en exagère l'importance. On peut placer le cycle à cheval de P_m en modifiant

convenablement α_0 et P_0. Lorsque la charge croît à partir de faibles charges, il y a d'abord détorsion, puis torsion.

Admettons maintenant des conditions déterminées de torsion; si, après avoir fixé un cycle, on en parcourt d'autres et que l'on revienne au premier, l'inclinaison moyenne a changé.

Les grandes charges transportent P_m vers la gauche (*fig.* 8), diminuent l'importance de la partie à gauche de P_m, au point de vue de son amplitude verticale. Les inclinaisons moyennes sont augmentées à droite de P_m, diminuées à gauche. On a marqué en pointillé (*fig.* 8) la déformation de la courbe : on n'oubliera pas en comparant les deux courbes, que leur position absolue dans le plan n'est pas déterminée.

Nous avons rencontré une application de ces règles au n° **12**, Exemple III. Les clichés 2 et 8 représentent le même cycle (150, 1600); mais dans l'intervalle les charges ont cru jusqu'à 4500. La courbe (*fig.* 8) s'est déformée, et, comme nous sommes à droite de P_m, le cycle 8 est plus incliné que le cycle 2. Même conclusion pour les clichés 7 et 4 (1200, 2650).

La partie de la courbe (*fig.* 8) à gauche de P_m semble rattacher son existence à un phénomène bien connu, étudié en particulier par Thomson et Tait dans leur admirable *Traité de Philosophie naturelle*, n° **601** et suiv. Quand une des extrémités d'un fil parfaitement élastique est maintenue fixe, quand on applique un couple à l'autre extrémité, ou quand on lui donne une certaine torsion, l'axe du fil ne reste pas rectiligne : il prend la forme d'une hélice. Si la torsion devient suffisante, il se produit des déformations permanentes et, quand on détord, le fil est transformé en un ressort à boudin, dont le nombre de spires et le rayon dépendent de la torsion et de la charge pendant la torsion.

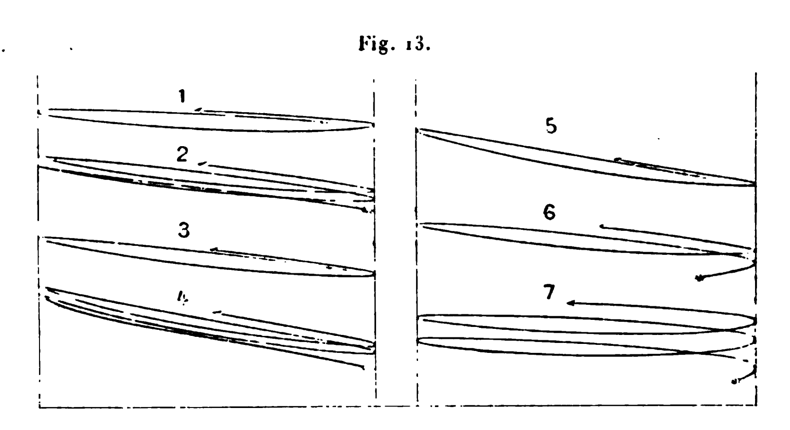
Si donc la torsion a été faite sous charge faible, nous opérons non plus sur un fil rectiligne, mais sur un véritable ressort à boudin, à pas très allongé. Il semblerait qu'il dût être très facile de savoir ce qui doit résulter d'une surcharge à couple constant nul. Les formules du n° **607** du Traité de Thomson et Tait indiquent une *torsion;* il se produit une *détorsion*. Mais rien n'indique que les conditions supposées au n° **607** soient satisfaites : nous reviendrons sur ces phénomènes dans une étude générale que nous préparons sur la déformation des ressorts à boudin.

14. Voici deux exemples qui montrent quelles formes singulières l'hystérésis peut donner aux cycles. Il s'écoulera de longues années avant que nous ne possédions une théorie acceptable de tels phénomènes.

Cinquième exemple (*fig.* 14) : $\alpha_0 = 10^t$, $P_0 = 150^g$. — On maintient une nuit sous cette charge.

On impose (150, 5800) : on obtient la double boucle du 1. On maintient 24^h

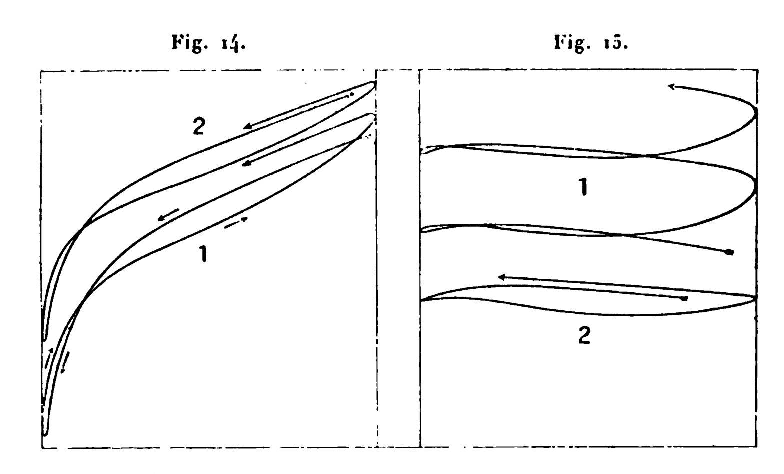
Fig. 13.



sous 5800; on décrit le cycle précédent, la boucle gauche a notablement diminué de longueur (cliché 2).

Sixième exemple (*fig.* 15) : $\alpha_0 = 10^t$, $P_0 = 500^g$, cycle (500, 6150). — Le

Fig. 14. Fig. 15.



cliché 1 non fixé montre deux boucles; le cliché 2 n'en a plus qu'une.

15. ***Hystérésis. Influence de l'amplitude des parcours sur l'aire renfermée dans le cycle fermé.*** — Cette question comporte une infinité de solutions. Nous nous bornerons au cas de cycles assez petits et tels que la portion de la figure 8 utilisée reste à peu près rectiligne. Les parcours ressemblent alors vaguement à des ellipses. De plus, la charge moyenne restera la même. La longueur horizontale du cycle mesure l'amplitude H; si la différence maxima des ordonnées correspondant à la même charge (qui a lieu à peu près pour la charge moyenne) est proportionnelle à H, l'aire est proportionnelle à H^2. Cette hypothèse est très

éloignée de la vérité. Il est plus vrai d'admettre que l'épaisseur est proportionnelle à Π^2 et par conséquent l'aire proportionnelle à Π^3.

Généralement, quelle que soit la forme du cycle, l'aire croît beaucoup plus vite que Π^2.

Influence de la période. — La période du cycle influe nettement. Quand elle augmente, l'épaisseur croît et l'aire par conséquent. Simultanément l'inclinaison moyenne décroît.

Exemple : $\alpha_0 = 100^t$, $P_0 = 150^g$, cycle (750, 2275) :

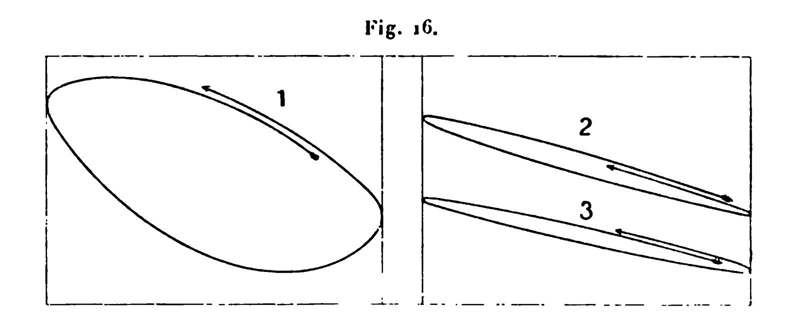
Période	42^s	$42^s \times 3$	$42^s \times 6$
Épaisseur	$6^{mm},8$	$8^{mm},8$	$10^{mm},0$

Le degré de torsion équivaut à 35^{mm} environ sur le cliché.

Sens dans lequel les cycles fermés sont parcourus. — Les résultats ne sont simples que pour des torsions α_0 considérables et où par conséquent elle n'a pu être effectuée que sous faible charge. Nous sommes alors à droite de P_m. C'est à ce cas que se rattachent les Exemples III et IV (*fig.* 12 et 13). Le parcours s'effectue en sens inverse des aiguilles d'une montre.

Septième exemple : $\alpha_0 = 50^t$, $P_0 = 150^g$ (*fig.* 16). — Les trois clichés montrent :

Fig. 16.



le n° 1, le cycle (200, 5800); le n° 2, le cycle (150, 1650); le n° 3, le cycle (2150, 3650). On peut vérifier certaines propositions précédemment énoncées. L'épaisseur croît plus vite que l'amplitude. Quand, l'amplitude restant constante, le cycle se déplace vers la droite, l'inclinaison moyenne diminue (clichés 2 et 3).

Supposons maintenant que P_0 et α_0 soient tous deux petits.

Si le cycle a une petite amplitude, il est impossible d'obtenir une boucle. Si le cycle est grand, on obtient un huit de chiffre (Exemples V et VI); la boucle de droite est décrite dans le sens inverse, la boucle de gauche dans le sens direct. Si le cycle est parcouru un grand nombre de fois, la boucle de gauche (sens direct) s'atrophie; la boucle de droite (sens inverse) persiste seule. En somme pour les

charges faibles, nous pouvons faire rentrer les phénomènes dans une règle générale.

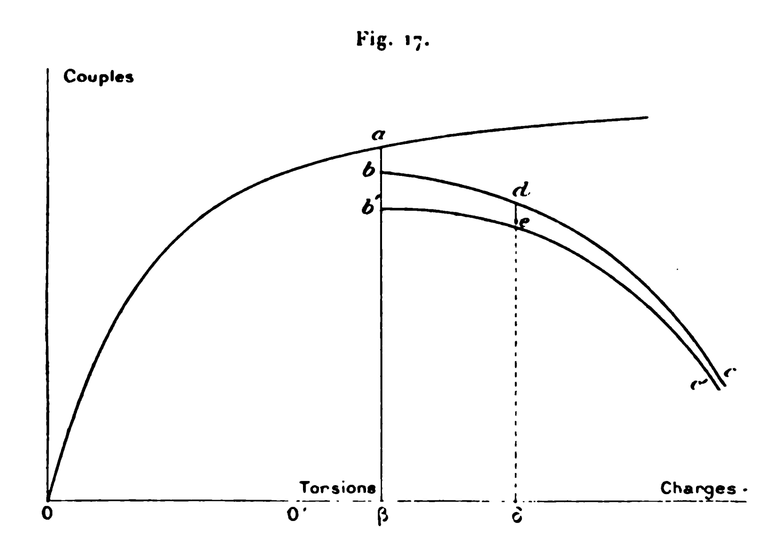
Lorsque la charge P_0 est grande nous n'avons pu en découvrir. Généralement on se trouve à droite de P_m et la boucle est parcourue dans le sens direct.

FIL ÉTIRÉ. ÉTUDE DES COUPLES CRÉÉS PAR LES SURCHARGES.

16. *Variation de couple à azimut constant sous l'influence d'une charge croissant proportionnellement au temps, à partir des divers points de la courbe de première torsion* (*fig.* 17). — Dans les expériences suivantes, $P_0 = 500^g$. L'écoulement ajoute 123^g par minute, soit 6150^g en 50^m : la charge est alors 6650; le fil est peu éloigné de la rupture.

On fait varier α_0; $T_0 = 30^m$. C'est au bout de ces 30^m que l'on installe l'écoule-

Fig. 17.



ment. On donne les pertes de couple en millièmes du couple initial, en fonction de l'accroissement de charge mesurée en minutes.

Si α_0 est petit, inférieur à un tour, la courbe donnant les déperditions (en millièmes du couple initial) possède une forme indépendante de α_0 (elle dépend des conditions de l'expérience et principalement de T_0). Au bout des temps 0^m, 5^m, ..., 50^m les déperditions sont

o, 6, 19, 32, 58, 90, 128, 179, 243, 330, 448 millièmes.

A mesure que α_0 croît, la stabilité du couple décroît d'abord très vite, puis de plus en plus lentement. Voici les pertes pour 10^m, 20^m, ..., 50^m en millièmes :

$\alpha_0 = 5^t$	32, 92, 184, 323, 573
$\alpha_0 = 20^t$	35, 103, 201, 346, 601

Voici, pour fixer les idées, les valeurs en unités arbitraires des couples, au moment où la charge commence à croître, c'est-à-dire 30^m après le maintien à azimut constant (βb, *fig.* 16) :

α_0	$0^t,33$	1	2	5	20
C_0	157	432	746	1079	1166

La *fig.* 17 montre la marche de l'expérience; Oa est la courbe de torsion; suivant ab se fait la perte de couple à azimut constant pendant T_0; bc est la courbe des couples en fonction des charges, portées en abscisses à partir d'une origine O'.

Comparaison des courbes bc, correspondant à divers points a de la courbe de torsion. — Pour le même accroissement de charge, il se perd une fraction du couple initial $C_0 = b\beta$, qui augmente avec la torsion α_0. Le phénomène est d'autant plus marqué que la comparaison porte sur des parties de la courbe bc plus voisines du point b : résultat facile à prévoir, puisque, pour de très fortes charges, la perte serait probablement, pour toutes les courbes, de 1000 millièmes et par conséquent indépendante de α_0.

Le fil casse toujours avant que le couple ne soit devenu nul.

Influence de l'arrêt T_0. — On arrête en un point invariable a de la courbe de torsion; on attend à azimut constant des temps T_0, T'_0, ...; le couple descend au valeurs βb, $\beta b'$, ... Les courbes bc, $b'c'$, ... tendent asymptotiquement les unes vers les autres : pour une charge assez grande, les couples sont à peu près indépendants de T_0.

Exemple : $\alpha_0 = 10^t$, $P_0 = 600^g$. — On donne les couples à la fin des temps T_0, puis après des écoulements ayant duré 25^m, 30^m, ..., 50^m :

$T_0 = 16^h$	$C = 984$	891, 843, 772, 686, 577, 424
16^h	1009	912, 861, 797, 715, 602, 437
135^m	1075	952, 897, 824, 738, 620, 446
5^m	1183	972, 908, 825, 728, 604, 428

Au début, pour la charge 600^g, on a des couples qui diffèrent de $1183 - 997$, soit 186 (997 est la moyenne de 984 et 1009); après 50^m d'écoulement, sous 6750^g, les couples diffèrent de $430 - 428 = 2$.

17. ***Influence sur les phénomènes de réactivité au couple nul, d'une surcharge agissant pendant le temps*** T_0 ***pendant lequel le fil est maintenu sous***

l'azimut correspondant à la torsion totale. — L'expérience actuelle est expliquée par celle du n° **16**. Le fil est tordu de α_0 constant sous P_0 constant. La torsion est maintenue pendant le temps invariable T_0. La détorsion est effectuée sous P_0; on mesure α_1 compté jusqu'à l'azimut atteint 5^m après le retour au couple nul et les Δp dans les intervalles 5^m à 10^m, 10^m à 20^m, 20^m à 40^m.

Pour ces opérations, l'expérience ne diffère pas de l'expérience ordinaire pour déterminer les réactivités. Mais pendant la portion T'_0 de l'arrêt T_0, on fait agir une charge supplémentaire P'_0. Pour l'introduire et la supprimer *sans choc*, sous le fil est attaché un ressort à boudin, portant un anneau auquel on suspend le poids. Il est d'abord maintenu par un support, qu'on abaisse et relève systématiquement en une dizaine de secondes.

Voici d'abord pour le fil employé ($L_0 = 90^c$, $\alpha_0 = 10^t$), et la charge *invariable* $P_0 = 250^g$, les Δp et α_1 quand T_0 varie :

$T_0 =$	$\Delta p_1 =$	$\Delta p_2 =$	$\Delta p_3 =$	$p_3 =$	$\alpha_1 =$
0^m...	89^d	85	87	261	1144°
5...	113	109	104	326	1045
15...	130	124	120	374	999
840...	146	152	162	460	820

Ces résultats sont conformes aux règles énoncées Chapitre VIII, n° **5**.

A mesure que T_0 croît, α_1 décroît, p_3 croît.

Déterminons maintenant l'influence d'une surcharge.

Soit $T_0 = 15^m$. Pendant $T'_0 = 5^m$ (entre les temps 5^m et 10^m de l'arrêt T_0) faisons agir la surcharge P'_0.

P'_0	0^{kg}	1^{kg}	2^{kg}	3^{kg}	5^{kg}
α_1	999°	973°	920°	844°	581°
p_3	374^d	371^d	349^d	340^d	247^d

Soit comme second exemple $T_0 = 5^m$. Si la charge est constante $= P_0 = 250^g$, nous avons trouvé

$$p_3 = 326, \qquad \alpha_1 = 1045^o.$$

Si l'on fait agir 1^{kg} pendant à peu près toute la durée de cet arrêt (5^m moins le temps d'installer le poids et de la supprimer, soit 30^s environ), on trouve

$$p_3 = 320, \qquad \alpha_1 = 1007^o.$$

Ainsi la surcharge P'_0 diminue bien le couple, et par conséquent la détorsion α_1, conformément à ce qui est indiqué au n° **16**; *elle diminue aussi les* Δp. Elle n'agit donc pas du tout sous ce dernier rapport comme un accroissement de temps d'arrêt T_0. La courbe reliant p_3 et P'_0 est analogue à celle qui relie α_1 et P'_0.

Nous avons été conduit à expliquer *en gros* les phénomènes de réactivité, en

disant que des molécules constituées d'une manière particulière (Chapitre VI. p. 464) se bandent ou se débandent, suivant leur état actuel (produit par les couples ou les déformations antérieures) et le couple actuel. Nous avons vu qu'il semble que des variations de charge activent ces phénomènes (n° 2 et suiv.) au couple nul, c'est-à-dire lorsque, dans la représentation précédente, les molécules à élasticité parfaite mais retardée, se débanderaient. L'expérience actuelle répond à la question suivante : ne pourrait-on pas, par des variations de charge sous couple, hâter le bandage des molécules?

L'objection « que l'adjonction d'une surcharge ne produit pas d'accroissement parce qu'elle diminue le couple » ne vaut rien, puisque nous voyons l'arrêt T_0 de 840^m sans surcharge abaisser le couple sensiblement de 1144° à 820° et augmenter considérablement p_3.

Si singulières que puissent être nos constructions, rien n'est contradictoire dans l'hypothèse que certaines causes faciliteraient le débandage des molécules sans faciliter leur bandage. Nous reviendrons d'ailleurs là-dessus au n° 36 de ce Chapitre.

18. *Variation de couple à azimut constant sous l'influence d'une charge variant proportionnellement au temps, à partir des divers points d'une courbe de première détorsion.* — $P_0 = 600$, $\alpha_0 = 10^t$, $T_0 = 0$. La détorsion α_1 est variable. On attend 15^m et l'on fait croître la charge à raison de 123^g par minute.

Le n° 4 du Chapitre VII nous apprend ce qui se passe pendant l'arrêt de 15^m à azimut constant, aux différents points de la courbe de détorsion. Suivant le point choisi sur cette courbe, après l'arrêt, le couple croît ou décroît. Une surcharge continue et accélère les phénomènes qui existent sans surcharge (*cf.* n° 17). Voici les couples en unités arbitraires après 0^m, 10^m, 20^m, ..., 50^m de surcharge; au-dessous sont inscrites les pertes de couples en millièmes du couple initial : le signe + indique que le couple croît, — qu'il décroît.

$\alpha_1 = 0$......	1170^u	1121	1040	918	739	422
	0^{mm}	42	−111	−215	−369	−640
1,25.......	760^u	756	741	699	612	395
	0^{mm}	−5	−25	−81	−195	−482
2,25.......	375^u	378	381	377	357	264
	0^{mm}	8	16	5	−48	−296
3..........	84^u	91	100	110	117	111
	0^{mm}	83	190	309	393	321
10..........	987^u	953	893	809	684	442
	0^{mm}	−34	−95	−180	−307	−552

Portons les couples en ordonnées et les charges en abscisses.

Les valeurs initiales $\frac{dC}{dP}$ sont d'abord négatives pour de faibles α_1; quand α_1 croît, $\frac{dC}{dP}$ croît et devient positif. Il y a d'abord un accroissement de couple. Dans ces conditions, à mesure que le couple initial se rapproche de zéro : 1° le maximum de couple, a lieu pour une charge croissante; 2° le quotient du couple maximum et du couple initial, croît.

Le faisceau des courbes (couples, charges) que l'on tracera aisément avec le Tableau ci-dessus, satisfait à la condition suivante : la plus haute pour les faibles charges, tend à devenir la plus basse pour les fortes.

Les résultats sont assez paradoxaux : Nous avons vu au n° 16 que, *pour des premières torsions* inférieures à 1 tour (soit donnant un couple inférieur à 432^u), la perte de couple après 50^m de surcharge est de 448 millièmes : on faisait $T_0 = 30^m$. Voici maintenant que *sur la courbe de détorsion,* pour un couple initial 375^u et un arrêt $T_1 = 15^m$, une perte qui n'est plus que 0,296. Pour des couples initiaux plus petits, il n'y a pas perte, mais gain. Ainsi la torsion $\alpha_0 = 10^t$, loin de désagréger le fil, stabilise les couples petits.

Nous avons complété l'expérience en détordant un des fils de 10^t. Le couple est alors de signe contraire; nous obtenons dès l'abord et indéfiniment une décroissance du couple pris en valeur absolue. La stabilité du couple décroît à mesure que la détorsion (supposée grande) croît.

Pour avoir une représentation continue du phénomène tout le long de la courbe de détorsion, on prendra pour abscisses les couples initiaux (portés à droite ou à gauche suivant leur sens) et pour ordonnées les couples obtenus après une surcharge donnée (portés suivant leurs signes au-dessus ou au-dessous de l'axe des abscisses). Chaque expérience, correspondant à une ligne de notre Tableau, fournit une série de points placés sur une verticale ayant pour abscisse l'un des nombres de la première colonne. Chaque surcharge (ou chaque nombre de minutes d'écoulement) sert de cote à une courbe, obtenue en joignant convenablement les points correspondants de chaque verticale.

Toutes ces courbes forment un faisceau ayant pour courbes limites, d'une part la diagonale des axes (elle correspond à une surcharge nulle); de l'autre, l'axe des abscisses qui correspond à une surcharge telle que le couple soit partout réduit à o. Ces courbes limites passent par l'origine; toutes les autres passent au-dessus. En effet, si le couple initial est nul, tous les couples résultant des surcharges seront positifs. Toutes les courbes présentent une inflexion.

Les courbes sont limitées, car : 1° l'abscisse maxima positive est déterminée par les conditions de l'expérience (α_0, T_0, T_1); 2° l'abscisse maxima négative est la limite des couples négatifs obtenus, quand on détord indéfiniment.

On aurait pu prendre pour abscisses les α_1 et non plus les couples initiaux. Les

deux courbes limites du faisceau seraient alors la courbe de détorsion elle-même (les couples mesurés après $T_1 = 15^m$ d'arrêt) et l'axe des abscisses. L'allure générale n'est pas modifiée : les courbes seront indéfinies dans un sens, puisque la détorsion α_1 n'est plus limitée.

19. *On reprend l'expérience du n° 16 (fig. 17). En un point d de la courbe bc (à azimut constant et à charge variable), on arrête l'écoulement. On détermine en fonction du temps la variation de couple d e (à azimut et charge constants).* — $\alpha_0 = 10^t$; vitesse, un tour en $21^s,7$; $T_0 = 15^m$. On impose alors l'écoulement. Les pertes de couple se font comme il est dit à la première ligne du Tableau du n° 17 [parcours $Oabd$ (*fig.* 17)]. Après 30 minutes d'écoulement le couple était réduit de 1171^u à 928^u. On maintient alors la charge constante (parcours de). Voici les ΔC dans les intervalles formés par les temps 0^m, 1^m, 2^m, 4^m, etc.

8^u, 4, 5, 6, 9, 11, 18, 18, 18, 18, 18 $\Sigma\Delta c = 133^u$ en 1024 minutes.

Pour un autre fil, l'écoulement durait 40^m, le couple était réduit de 1182^u à 785^u. Voici les ΔC :

12, 5, 6, 8, 12, 15, 17, 19, 20, 20, 20 $\Sigma\Delta c = 164^u$ en 1024 minutes.

Nous retrouvons donc approximativement la loi générale donnée au Chapitre VIII pour la réactivité. Sauf dans les tous premiers instants après l'arrêt de l'écoulement, les diminutions de couple sont représentées en gros par l'expression $A \log(t + B)$.

20. *Relation entre les expériences à couple constant et à azimut constant, le fil ayant été ramené au couple nul.* — La préparation du fil consiste en une torsion α_0, un arrêt T_0, le retour au couple nul par une détorsion α_1, un arrêt à ce couple T_1.

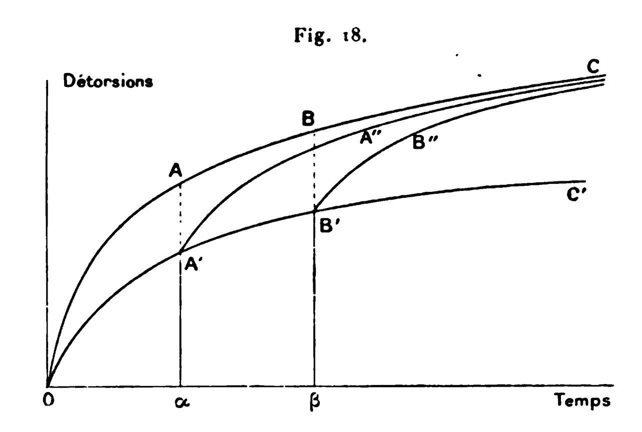
Dans une première expérience (couple nul constant), on laisse le fil se détordre librement au couple nul et l'on étudie la variation des azimuts (le Chapitre VIII de ce Mémoire est plein de telles expériences).

Dans une seconde expérience, au bout du temps T_1, *on maintient l'azimut constant, le couple croît. Après un temps* T'_1, *on ramène au couple nul et l'on étudie la marche des azimuts à couple nul constant.*

L'expérience est représentée *fig.* 18. La courbe OABC donne le résultat de la première expérience. La courbe OA'B'C', donne la grandeur des couples dans la seconde, couples évalués en détorsions du fil supposé parfaitement élastique. Au bout du temps $O\alpha$ sous azimut constant, on détord, on ramène au couple nul :

comme il s'agit *d'une détorsion généralement faible,* la détorsion $\alpha A'$ mesure le couple, de sorte que la courbe $OA'B'C'$ peut être tracée très approximativement

Fig. 18.



sans dynamomètre. Revenu au couple nul, on laisse le fil se détordre à azimut constant; on décrit des courbes $A'A''$, $B'B''$ qui admettent approximativement comme asymptote la courbe OABC. Ainsi donc, il n'y a qu'une *perte d'azimut* petite dans le fait de produire la première partie du phénomène sous azimut constant.

Nous avons déjà rencontré ces faits dans les Chapitres précédents : nous avons trouvé pour les courbes OABC et $OA'B'C'$ des formes tout à fait analogues. Nous avons reconnu que les couples $\alpha A'$, évalués en degrés de torsion du fil supposé parfaitement élastique, étaient au bout du même temps plus petits que les détorsions αA obtenues à couple nul constant. *Voir,* en particulier, pour l'analogie des formes, les Chapitres VII et VIII; pour la relation $\alpha A' < \alpha A$, *voir* Chapitre VIII, n° 11. Nous verrons plus loin pourquoi nous avons jugé utile de reprendre et de compléter cette expérience. Voici quelques nombres pour fixer les idées.

Fil étiré : $\alpha_0 = 10^t$; $P_0 = 500^g$; longueur 90^c; $T_0 = 0$; $T_1 = 5^m$; $\alpha_1 = 1136''$ comptés jusqu'à la fin du temps T_1.

Détorsion libre.

Premier fil : entre 5^m et 40^m	266^d	entre 40^m et 80^m.	80^d
Second fil »	260	»	79
Moyenne des détorsions libres entre 5^m et 80^m.	342		

Azimut constant entre 5^m et 80^m.

Détorsion $\alpha A'$ pour deux fils différents	$211^d - 213^d$
Détorsion entre 40^m et 80^m	$108 - 112^d$
Moyenne des détorsions entre 5^m et 80^m......	323

Ainsi la courbe OA′B′ n'a pas encore rattrapé la courbe OAB; elle est au-dessous; mais la différence est faible et diminue à mesure qu'on attend plus longtemps :

$$\frac{342}{323} = 1,06.$$

21. ***Même expérience qu'au numéro précédent. On suppose seulement que pendant l'arrêt soit à azimut constant soit à couple nul constant, la charge croît.*** — Pour comprendre l'expérience actuelle on se reportera donc au n° 8 (détorsion sous charge variable à couple nul constant) et au n° **17** (dont un cas particulier peut s'énoncer : variation de couple à partir du couple nul, sous azimut constant, à charge variable).

Voici l'expérience. La préparation uniforme des fils est la suivante :

$$\alpha_0 = 10^t, \quad L_0 = 90^c, \quad T_0 = 0, \quad P_0 = 500^g, \quad T_1 = 5^m.$$

Première expérience. — *Détorsion libre.* — A partir de 5^m, on charge pendant le temps T'_1 à raison de 123^g par minute; on arrête la surcharge au temps $T'_1 + 5^m$ et on lit les détorsions α'_1 au temps $T'_1 + 10^m$, et au temps $T'_1 + 45^m$.

Seconde expérience. — A partir de 5^m, on maintient l'azimut constant; on charge pendant le temps T'_1 ; on arrête la surcharge au temps $T'_1 + 5^m$, on ramène au couple nul et on lit la détorsion α'_1 au temps $T'_1 + 10^m$, et laissant la détorsion se continuer librement comme dans la première expérience, on lit la détorsion α'_1 au temps $T'_1 + 45^m$.

$T'_1 = 20^m$.....	Expérience I	$\alpha'_1 =$ 546	Rapport 1,13	663	Rapport 1,07
	Expérience II	484		620	
$T'_1 = 35$.....	Expérience I	1003	Rapport 1,23	1133	Rapport 1,13
	Expérience II	817		998	
$T'_1 = 50$.....	Expérience I	1807	Rapport 1,71	2026	Rapport 1,46
	Expérience II	1058		1389	

Pour représenter ces expériences nous pourrions construire une figure analogue à la figure 18, mais c'est inutile. On voit qu'il y a une *perte d'azimut* qui croît notablement à mesure que T'_1 croît. La détorsion ne se conserve donc plus sous forme de couple, elle se perd en partie. Tandis que dans le numéro précédent les phénomènes pouvaient se représenter en gros par des systèmes mécaniques n'admettant

pas de glissements définitifs entre les pièces qui les composent, mais quelque chose d'analogue à des déformations de ressorts, dans le numéro présent, au contraire, interviennent de tels glissements définitifs.

Il n'y aura donc plus à nous étonner si nous rencontrons des phénomènes où le couple obtenu à azimut constant n'a plus aucun rapport avec la détorsion obtenue à couple nul constant. Nous aurons vu l'un des cas extrêmes n° **20** et le cas intermédiaire n° **21**.

La comparaison des rapports des α'_1 pour les deux intervalles consécutifs montre un phénomène analogue à celui qui est indiqué au numéro précédent : une tendance à la compensation. Mais, tandis qu'au numéro précédent il en résultait que A'A'', B'B'', ... tendaient à devenir asymptotes à OABC, il en résulte actuellement une simple diminution de l'écart; les courbes de détorsion dans les expériences II tendent à devenir asymptotes tout au plus à des courbes parallèles aux courbes de détorsion des expériences I.

22. *On reprend les expériences du* n° **21** *en mesurant effectivement les couples. La technique est parallèle à celle du* n° **8**. *Torsion* α_0 *et arrêt* T_0 *invariables; retour au couple nul. On maintient le couple nul, un temps* T_1 *variable; on charge proportionnellement au temps et l'on détermine à azimut constant la variation du couple.* — Pour que l'azimut reste *en moyenne* rigoureusement constant, on utilise la technique expliquée page 365.

$\alpha_0 = 10^t$, $L_0 = 90^c$, $T_0 = 0$. On donne en secondes les temps successifs nécessaires pour que le couple croisse d'une quantité invariable U : la surcharge par minute est de 123^g, par seconde de $2^g,05$. $\alpha_1 = 1147^o$, $P_0 = 500^g$.

$T_1 =$	$\Delta t =$						
5^m...	$200 \rightarrow 260$	285	295	305	312	321	350
10^m...	$320 \leftarrow 304$	299	304	308	310	315	380
2^h...	$660 \leftarrow 390$	350	323	309	313	360	
13^h...	$870 \leftarrow 422$	358	321	306	312		

Le quotient $\frac{dC}{dP}$ est à peu près constant sur une partie de la courbe C, P. Mais cette courbe s'arrondit très vite pour des charges voisines de 5500^g, passe par un maximum (Δt y serait infini) et s'abaisse avant que la charge atteigne 6^{kg}.

On voit aussi que le fait de laisser le fil se détordre à couple nul, avant de commencer les surcharges à azimut constant, diminue le couple qu'il est possible d'obtenir à l'aide de la surcharge.

Le couple U correspond à une torsion de $6^t,2$ (soit 74 douzièmes) du fil supposé parfaitement élastique. Ainsi pour $T_1 = 10^m$ et une surcharge correspondant à

$$2540^s = 42^m 20^s = 5200^g \text{ environ,}$$

le couple obtenu correspond à un peu moins de 50^t. Si l'on admettait que la courbe

de détorsion fût parfaitement rectiligne, le couple obtenu serait au couple au moment de la détorsion, comme $50 : 1147 = 0{,}044$. Il est à la vérité un peu plus grand : 1° parce que le couple maximum pour $T_1 = 10^m$ est un peu plus de 8U, et 2° que, la courbe de détorsion n'étant pas rectiligne, le couple au bout de la torsion correspond à un angle $< 1147°$.

Il est important de savoir comment varieraient les détorsions sous couple nul dans les conditions de l'expérience précédente, c'est-à-dire avec la même préparation invariable $\alpha_0 = 10^t$, $P_0 = 500^g$, $T_0 = 0$ et des arrêts variables T_1. Pour faire aisément les comparaisons, on calculera le nombre de secondes nécessaires pour détordre de $6^{\circ}{,}2$, soit à peu près l'angle auquel correspond, sur le fil supposé parfaitement élastique, l'unité arbitraire de couple U. Le Tableau donne en douzièmes de degré les détorsions observées $\Delta\alpha'$ de 5 en 5 minutes, soit pour 300^s : le temps Δt en secondes employé moyennement pour détordre de l'angle correspondant à U, est $22200 : \Delta\alpha'$ c'est-à-dire $(74 \times 300) : \Delta\alpha'$, il est indiqué dans la seconde ligne.

$T_1 = 5^m$.	$\Delta\alpha' =$	139^d		122	119	124	135	143	154	184	218	285
	$\Delta t =$	159^s	$\rightarrow$ 182	187	179	164	155	144	121	102	78
$T_1 = 10^m$.	$\Delta\alpha' =$	89^d	105	112	122	127	144	161	185	224	290
	$\Delta t =$	261^s	$\leftarrow$ 211	198	182	175	154	138	120	99	76
$T_1 = 15^h$.	$\Delta\alpha' =$	12^d	34	56	71	94	113	132	169	216	300
	$\Delta t =$	1850	$\leftarrow$ 653	397	313	236	196	168	131	103	74

Voici maintenant les pertes Δp dans les intervalles 5^m à 10^m, 10^m à 20^m, etc., comptées à partir du retour au couple nul :

$$\Delta p = 94,\ 89,\ 84,\ 80,\ 76,\ 70,\ 64.$$

Calculons $p + \alpha'$ (*voir* n° 8) pour les trois expériences précédentes. Nous trouvons :

$T_1 = 5^m$.........	$\Sigma\Delta\alpha' = 1623$	$p = 0$	$p + \alpha' = 1623$
$T_1 = 10^m$.........	$\alpha' = 1559$	$p = 94$	$p + \alpha' = 1653$
$T_1 = 15^h$.........	$\alpha' = 1197$	$p = 580$	$p + \alpha' = 1777$

Ces résultats sont conformes aux règles énoncées au n° **8**.

De la comparaison des temps Δt des deux Tableaux précédents on peut déduire les règles suivantes :

1° Pour les grandes surcharges, le couple à azimut constant passe par un maximum et décroît; la détorsion à couple nul se fait toujours avec une rapidité croissante. C'est la conclusion du n° **21**, énoncée avec plus de précision : il y a des glissements définitifs qui ne produisent pas de couples.

2° Lorsque T_1 est petit, les Δt commencent par croître, qu'ils correspondent à

la courbe (CP) ou à la courbe (α'P). Ils décroissent au contraire dès le début, lorsque la valeur de T_1 est assez grande.

3° Il y a toujours perte d'azimut; les Δt du second Tableau sont toujours plus petits que les Δt correspondants du premier.

Même expérience. — On prend comme paramètre variable l'angle de torsion α_0. On a uniformément : $T_0 = 0$, $T_1 = 10^m$, $P_0 = 500^g$.

$\alpha_0 =$ (′)	$\alpha_1 =$ (°)	(s)								
2......	626......	655	680							
5......	1026......	392	351	361	371	389	431			
10......	1147......	320	304	299	304	308	310	315	380	
20......	1188......	312	279	274	269	270	269	270	277	301

Appelons C_0 le couple à l'extrémité de la torsion, C_m le couple maximum obtenu. Pour $20'$, par exemple, on a

$$C_m > 9,5\,\mathrm{U},$$

C_m correspond à peu près à 60° de torsion du fil supposé parfaitement élastique. Le couple C_0 correspond à un peu moins de 1188°.

Le rapport $\dfrac{C_m}{C_0}$, d'abord nul pour $\alpha_0 = 0$, croît quand α_0 croît et atteint rapidement une valeur limite. Cette valeur limite ne doit pas dépasser les 0,06 du couple C_0 limite. La difficulté que nous avons rencontrée ici consiste en ce que notre dynanomètre, réglé pour de petits couples, ne peut pas mesurer des couples 15 à 20 fois plus grands. Aussi nous contentons-nous d'indiquer le résultat qualitatif sans donner des valeurs numériques.

23. *Fil tordu de α_0; arrêt T_0, retour au couple nul; maintenu un temps T'_1 au couple nul : c'est la préparation uniforme. On maintient un temps T''_1 à azimut constant sous charge constante, puis on impose une surcharge qui croît proportionnellement au temps. Le paramètre variable est T''_1.* — On donne, dans le Tableau suivant, les couples C_1 obtenus pendant le temps T''_1 à azimut et charge constants; puis le couple C_m maximum donné en unités arbitraires U; $\alpha_0 = 10'$, $T_0 = 0$, $P_0 = 500^g$, $T'_1 = 10^m$, $\alpha'_1 = 1141°$ en moyenne :

T''_1	0^m	40^m	214^m	14^h		
C_1..........	0^U	94^U	167^U	199^U		
C_m..........	400^U	402^U	412^U	396^U	Moyenne.......	403^U

Quand T''_1 croît, C_1 croît d'abord très vite, puis lentement (*voir* **20**); C_m, au contraire, semble varier fort peu ; on peut mettre sur le compte des erreurs d'expérience la différence inférieure à $\frac{1}{50}$ entre les nombres obtenus.

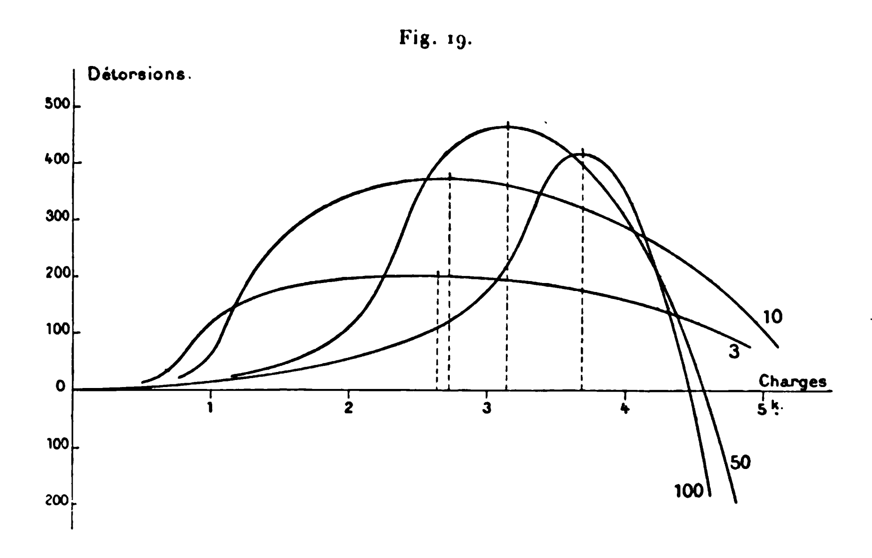
C_m dépend évidemment de la longueur du temps T'_1 pendant lequel on laisse le fil se détordre librement au couple nul, avant de fixer son azimut pour la suite de l'expérience. Les expériences du n° **22** rentrent dans les expériences actuelles : il suffit de faire égal à o le temps T''_1 pendant lequel le fil est maintenu sous charge et azimut constants.

FIL RECUIT.

24. *Fil tordu, détordu, allongé au couple nul sous une charge croissant proportionnellement au temps.* — On inscrit simultanément les détorsions α' pendant les allongements l. Le fil a toujours $0^{mm},545$ de diamètre : on trouvera, Chapitre VIII, page 227, les concordances numériques. On ne pousse pas les allongements plus loin que 25 pour 100; les phénomènes ne sont, d'ailleurs, intéressants que pour les petits allongements.

La figure 19 donne le résultat général de l'expérience; on prend pour abscisses

Fig. 19.

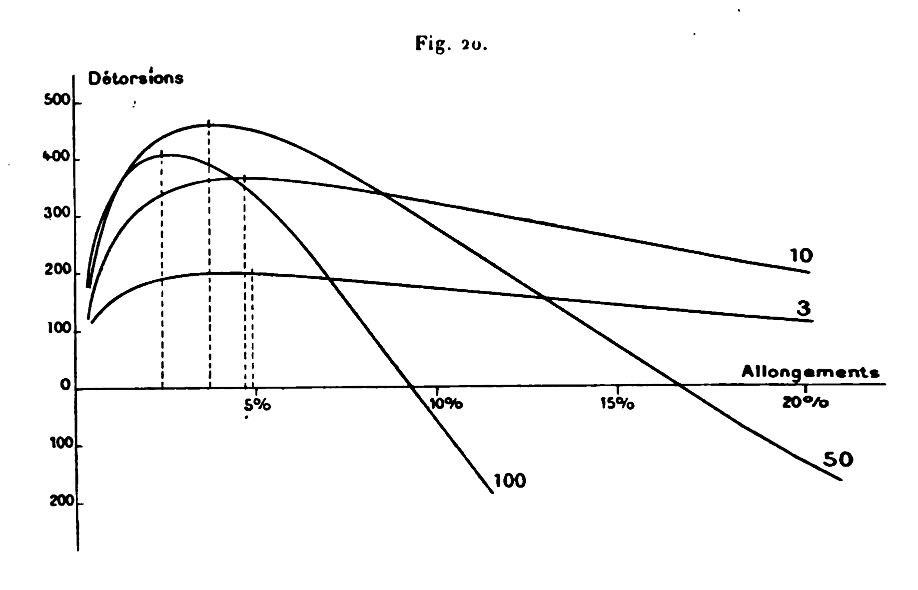


les charges et pour ordonnées les détorsions. Le mouvement se fait d'abord dans le sens de la précédente détorsion; les détorsions sont portées vers le haut. Pour une certaine charge, la vitesse de détorsion $\frac{d\alpha'}{dt}$ s'annule, puis change de signe. La figure 20 donne le résultat des expériences en prenant pour abscisses les allongements. Passons en revue les propriétés remarquables de ces courbes.

Détorsion α_1 pour revenir au couple nul. — Nous avons étudié, dans les Chapitres précédents, la loi qui relie α_1 à la torsion α_0. Nous savons que α_1 croît d'abord proportionnellement à α_0, puis de moins en moins vite, et tend vers une limite quand α_0 croît indéfiniment.

Réactivité p au couple nul. — Il y a réactivité pendant le temps T_1 qui s'écoule entre le retour au couple nul et le commencement des surcharges. Mais ces réactivités sont beaucoup plus faibles pour les fils recuits que pour les fils étirés et non recuits. Aussitôt, avant le commencement de la surcharge,

Fig. 20.



on détermine la position de l'index : c'est à partir de cette position que sont comptés les déplacements azimutaux ultérieurs α'. Les α' commencent dans le sens de la détorsion α_1 (par conséquent dans le sens de la réactivité), passent par un maximum α'_m, puis décroissent.

Début des courbes représentant α' en fonction de la charge P et de l'allongement l (voir *fig.* 19). — Pour $\alpha' = 0$, on a $\frac{d\alpha'}{dP} = 0$ approximativement. L'inclinaison initiale est donc faible; il est naturellement impossible d'affirmer que les courbes sont à l'origine tangentes à l'axe des abscisses.

Comparons aux résultats donnés au n° 8 pour des fils étirés. A mesure que T_1 devient plus grand, c'est-à-dire qu'on se débarrasse davantage de la réactivité (qui intervient beaucoup pour les fils non recuits), la courbe (α'P) représentée en ad, ad', $a'd'$, ... (*fig.* 7) tend vers la forme parabolique $\alpha' = a P^2$. Pour les fils recuits, la réactivité intervient à peine; il n'y aurait donc aucune contradiction à poser rigoureusement

$$\frac{d\alpha'}{dP} = 0,$$

au début des surcharges.

On a de toute manière

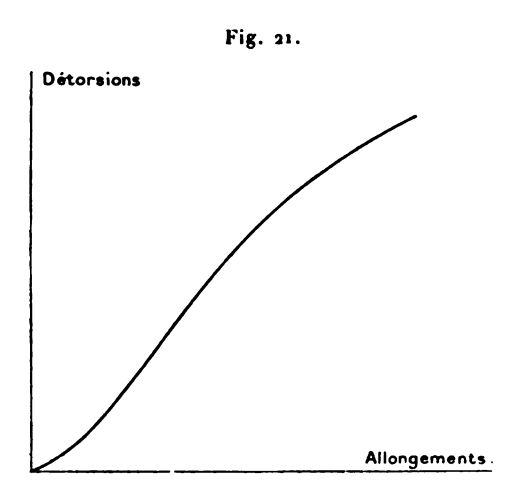
$$\frac{d\alpha'}{dl} = \frac{d\alpha'}{dP} : \frac{dl}{dP}.$$

Cherchons les conséquences de cette expression, dans l'intervalle des charges et des allongements pour lequel le fil est à peu près parfaitement élastique. Admettons que la charge nécessaire pour allonger de sa propre longueur le fil de cuivre, supposé parfaitement élastique, soit de 11 000^{kg} par millimètre carré. Ce nombre est choisi uniquement pour indiquer un ordre de grandeur. Le fil dont nous nous servons ayant 0^{mmq},233 de section, il faut environ 2^{kg},6 pour allonger 1^{m} de 1^{mm} et environ 1300^{g} pour allonger de 1^{mm} le fil en expérience qui a 2^{m} de longueur. Si donc on représente les variations de α' en ordonnées, en choisissant pour les abscisses une échelle telle que 1^{mm} et 1300^{g} soient représentés par la même longueur, dans tout l'intervalle où le fil est à peu près parfaitement élastique, on aura

$$\frac{d\alpha'}{dl} = \frac{d\alpha'}{dP}:$$

les courbes seront identiques. Comme on peut toujours considérer, dans un intervalle suffisamment petit, le fil comme parfaitement élastique, tout ce que nous avons dit de la valeur initiale de l'un des quotients s'applique à l'autre. On a représenté (*fig.* 20) l'ensemble des courbes ($\alpha' l$) et (*fig.* 21) la partie initiale, en supposant à la tangente initiale une valeur non nulle.

Fig. 21.



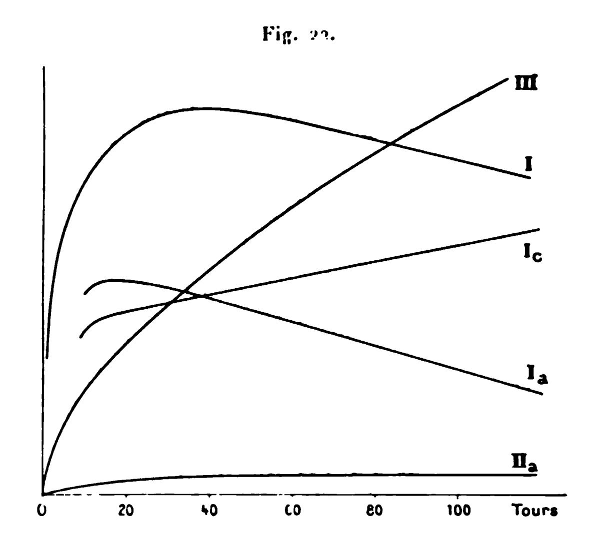
Pour les expériences qui ont fourni les courbes, on a : $T_0 = 0$; vitesse de torsion et de détorsion, un tour en 17^{s},4; $T_1 = 10^{m}$; $\frac{dP}{dt} = 125$ grammes-minutes. En montant sur une verticale, on rencontre successivement (*fig.* 19) les courbes qui correspondent à des torsions préparatoires α_0 décroissantes, torsions indiquées comme numéros des courbes et évaluées en tours.

Passons aux figures 20 et 21, représentant les courbes (α', l). Un allongement de

5 pour 100, sur un fil de 2^m, correspond à 100^{mm}. Nous avons vu que si le fil était parfaitement élastique, la longueur représentative de 100^{mm} devrait être égale à la longueur représentative de 130^{km}. On comprend donc que, envisagées de ce point de vue, les courbes 20 sont à une échelle toute différente. On ne s'étonnera donc pas que, malgré ce que nous avons démontré tout à l'heure, les courbes *à leur début* se présentent dans un ordre inverse : en montant le long d'une verticale, on rencontre successivement les courbes qui correspondent à des α_0 croissants. Le début des courbes $(\alpha' l)$ correspond aux premières déformations permanentes, le début des courbes $(\alpha' l')$ correspond aux déformations presque parfaitement élastiques.

Partie terminale des courbes (α', l) (*fig.* 20). — Elles sont rectilignes. Il y a donc lieu de chercher comment varie le $\frac{d\alpha'}{dl}$ limite en fonction de α_0. On a représenté (courbe III, *fig.* 22) le résultat d'une série d'expériences. La valeur du

Fig. 22.



quotient limite $\frac{d\alpha'}{dl}$ croît d'abord vite, quand α_0 croît, puis de plus en plus lentement.

N. B. — Parfois, après une longue partie terminale rectiligne, la courbe (α', l) se redresse et tend vers l'horizontale. Mais ce phénomène arrive pour de grands allongements, pour lesquels il est bien difficile que le fil reste homogène.

Grandeur du maximum α'_m *en fonction de* α_0 (*courbe I, fig.* 22). — α'_m croît d'abord quand α_0 croît, passe par un maximum, puis décroît lentement.

Position du maximum α'_m. — En fonction des charges (courbe I_c, *fig.* 22) : la charge P_m du maximum croît quand α_0 croît.

En fonction des allongements (I_a, *fig.* 22) : l'allongement l_m décroît quand α_0 croît.

Quelle est la position du maximum, quand $\alpha_0 = 0$? L'allongement ne provoque aucune détorsion, donc il n'y a pas de maximum. Mais on peut chercher quelle serait la limite des positions de ce maximum. Il est impossible de rien prouver expérimentalement; il paraît toutefois rationnel de faire coïncider cette limite avec l'origine. S'il en est ainsi, il faut que les courbes I_c et I_a s'infléchissent comme l'indique la figure. Si cet arrondissement existe, il ne se produit que pour de très petites valeurs de α_0.

Points d'inflexion des courbes (α', P) (*fig.* 19). — Quoique immédiatement donnés par l'expérience, leur détermination est très incertaine.

La valeur maxima de $\frac{d\alpha'}{dP}$ ou de $\frac{d\alpha'}{dt}$, ce qui revient au même, croît extrêmement quand α_0 croît, passe par un maximum, puis décroît lentement. L'existence de ce maximum n'est pas pour nous étonner, puisque α'_m passe lui-même par un maximum, et que, de plus, α'_m correspond à une charge qui croît quand α_0 croît. De sorte que, pour ces deux raisons, la droite qui va de l'origine au sommet des courbes (*fig.* 19) s'abaisse assez rapidement vers l'horizontale, à partir d'un α_0 assez grand.

En fonction de l, l'inflexion des courbes (19) se produit pour des l qui croissent quand α_0 croît. Ces allongements restent d'ailleurs toujours très petits; ainsi, dans une expérience où $\alpha_0 = 100'$, on avait pour l'inflexion

$$\frac{d^2\alpha'}{dP^2} = 0, \qquad l = 0{,}8 \text{ pour } 100.$$

On verra plus loin, quand nous parlerons des couples produits par allongement à azimut constant (à partir du couple nul), la raison de l'intérêt que nous portons aux points d'inflexion $\frac{d^2\alpha'}{dP^2} = 0$ et $\frac{d^2\alpha'}{dl^2} = 0$.

Points d'inflexion des courbes (α', l) (*fig.* 20). — Les éléments de ces points d'inflexion sont impossibles à déterminer exactement. Ils semblent se produire pour des charges et des allongements qui croissent quand α_0 croît; ce sont les mêmes règles que dans le cas précédent, au moins quant aux positions. Mais les inflexions des courbes 20 se produisent pour des charges plus petites que celles qui correspondent aux inflexions des courbes 19, et pour des allongements beaucoup plus petits, comme il ressort immédiatement de la forme des courbes (P, l). Ainsi, quand l'inflexion, dans l'expérience citée, se fait sur la courbe 19 pour

$l = 0,8$ pour 100, elle se fait sur 20 pour un allongement cinq fois moindre. D'où l'extrême difficulté expérimentale de la question.

Il semble que les tangentes d'inflexion $\frac{d\alpha}{dl}$ croissent continûment quand α_0 croît : elles ne présenteraient pas le maximum trouvé pour les tangentes d'inflexion $\frac{d\alpha}{dt}$.

Il se pose, à propos de ces tangentes d'inflexion, un problème capital. L'allongement total se compose de deux parties : l'un, l_1, est la déformation purement élastique qui entraîne une détorsion α'', ainsi que le prouvent les expériences sur les fils étirés; l'autre, l_2, est la déformation permanente qui entraîne une détorsion α'''. On a

$$l = l_1 + l_2, \qquad \alpha' = \alpha'' + \alpha'''.$$

Il est probable (*voir* n° 8) que $\frac{d\alpha''}{dl_1}$ croît d'une manière continue quand l_1 croît : nous ne savons rien de la manière dont varie α''' en fonction de l_2. Quant aux variations relatives de l_1 et de l_2, nous savons qu'au début c'est l_1 qui l'emporte, mais que bientôt l_2 prédomine : l'allongement est alors en presque totalité permanent. Il n'y a aucune contradiction à supposer que $\frac{d\alpha'''}{dl_2}$ a sa valeur maxima pour $l_2 = 0$ et ne fait ensuite que décroître. Cela ne veut pas dire que $\frac{d\alpha}{dl}$ a son maximum dès que la déformation devient permanente en partie ; parce que, au début des déformations permanentes, c'est encore la déformation purement élastique qui l'emporte; l'autre n'intervient dans l'allongement total l que pour une faible partie.

On explique facilement ainsi comment tout ce qui rend le fil plus parfaitement élastique recule, vers les charges et les allongements totaux plus grands, la position de la tangente d'inflexion $\frac{d^2\alpha}{dl^2}$. Ainsi, quand α_0 croît, le fil devient à peu près parfaitement élastique pour un intervalle de charges et d'allongements plus grand : la position de la tangente d'inflexion se trouve reculée.

25. *Variation des phénomènes avec les circonstances de la torsion et de l'allongement :*

A. $\alpha_0 = 50^t$ (un tour en $17^s,4$); $T_0 = 0$.

T_1 était égal soit à 10^m, soit à 1000^m. Voici les résultats :

Le maximum α'_m est placé à peu près de même que T_1 ait l'une ou l'autre valeur. Il est un peu plus petit quand $T_1 = 1000^m$ que lorsque $T_1 = 10^m$. La différence n'est cependant que de $\frac{1}{17}$ de α'_m moyen. L'influence du temps d'arrêt T_1 au couple nul avant l'établissement de la surcharge, secondaire sur la première partie de la courbe, est nulle sur l'inclinaison de la partie rectiligne finale.

On comparera avec ce qui est dit au n° 8 pour les fils étirés non recuits.

B. $\alpha_0 = 50^t$, $T_1 = 10^m$.

T_0 était égal soit à o, soit à 1000^m. Les résultats obtenus sont à peu près identiques pour les deux cas.

Pour les expériences où $T_0 = 0$, $\alpha_1 = 500^o$; pour celles où $T_0 = 1000^m$, $\alpha_1 = 396^o$. Si l'on s'étonne que, *pour certains phénomènes,* une telle différence n'ait aucune influence, on se reportera à ce qui est dit (Chap. VII, n° 5) sur la non-influence approchée de l'arrêt T_0 sur la forme de la courbe de détorsion.

Dans la comparaison avec ce qui est dit aux n°s 8 et 9, on n'oubliera pas que, pour les fils recuits, la réactivité est très faible (Chap. VIII, n° 10).

Exemple. — Fil recuit allongé de 2,93 pour 100 dans une opération préalable. $\alpha_0 = 21^t$. On attend T_0 avant de détordre; on ramène au couple nul; on mesure les réactivités Δp en douzièmes de degré dans l'intervalle 5^m-15^m, compté à partir du couple nul. On fait alors varier la charge à raison de 123^g par minute. On donne les α' entre o et 10^m, α'' entre 10^m et 20^m.

$T_0 = 0$......	$\Delta p = 28$		$\alpha' = 211^d$		$\alpha'' = 71^o$	$\alpha'_m = 520^o$
		Rapport, 1,75		Rapport, 1,09		
$T_0 = 22^h 30^m$.	49		229		70°	500°

Ainsi l'influence de la réactivité se fait sentir au début, après 10^m de charge, soit pour une surcharge de 1230^g. Elle est insensible pour 20^m, soit pour une surcharge de 2460^g. Au contraire, le maximum est plus petit quand T_0 est plus grand. La raison de ce résultat se trouve probablement dans ce qui est dit au n° 31 sur l'influence des petits allongements.

C. Les phénomènes sont indépendants de la grandeur de la vitesse d'écoulement $\frac{dP}{dt}$, supposée constante tout le long de l'expérience. Nous savons déjà (Chap. III, p. 359) qu'à froid la relation entre P et l ne dépend pas de la vitesse $\frac{dP}{dt}$, pourvu, bien entendu, que celle-ci reste constante tout le long de l'expérience.

26. ***Fil tordu, détordu jusqu'au couple nul; maintenu à ce couple au temps*** T_1 ; ***maintenu à azimut constant pendant une partie de l'allongement jusqu'au système*** (P_0, l_0), ***ramené au couple nul, puis allongé définitivement sous ce couple.*** [Le système (P_0, l_0) sert de paramètre variable.] — En somme, cette expérience se compose de deux parties : le commencement de l'allongement à azimut constant (et, par conséquent, comme nous le verrons, à couple variable), puis le reste de l'allongement à couple constant nul et, par conséquent, à azimut

variable. Si singulière que puisse paraître l'idée de réaliser une expérience aussi compliquée, nous verrons au n° 27 que l'on était rationnellement amené à l'exécuter.

Voici les hypothèses les plus simples auxquelles il faut comparer l'expérience :

I. La loi reliant P et l reste la même : 1° si l'azimut est constant; 2° si le couple est constant (nul, par exemple); ou enfin 3° (cas intermédiaires) si l'azimut est constant au début de l'allongement et le couple constant (nul) à la fin. Si les cas extrêmes donnent les mêmes résultats, il est à peu près certain *a priori* qu'il en sera de même des cas intermédiaires.

Il semble que ce ne soit pas tout à fait vrai et que l'allongement soit un peu plus grand à azimut constant qu'à couple nul. Il est difficile d'ailleurs de rattacher ce résultat à l'un de ceux précédemment obtenus. Nous avons bien montré (Chap. IV, n° 23) que sous couple constant non nul, pour une charge donnée, l'allongement est un peu moindre que si le couple est maintenu nul. Mais il y a loin de cette expérience, où la dissymétrie initiale était faible, à l'expérience actuelle. Outre cela, quand l'azimut est maintenu constant, le couple, dans l'expérience actuelle, est variable et suivant une loi compliquée. De toute manière, il s'en faut de peu que l'hypothèse soit vérifiée.

II. L'hypothèse I étant vérifiée, on peut admettre que, dans l'allongement à couple nul, on utilise des fragments d'une courbe unique. Voici ce que cela veut dire :

On décrit d'abord la courbe $\alpha' = \varphi(P)$, le couple étant maintenu nul dès le début.

Pour un second fil, on maintient l'azimut constant jusqu'à la charge P_0. On ramène alors au couple nul; il y a, pendant cette opération, une *petite détorsion* α'' qui mesure sensiblement le couple obtenu (*voir*, Chapitre VII, la forme des courbes de détorsion).

On continue à augmenter la charge; il se produit des détorsions α'''. Nous admettrons qu'on a sensiblement

$$\alpha''' = \varphi(P) - \varphi(P_0).$$

L'expression est valable seulement pour $P > P_0$, et la fonction φ est indépendante de P_0.

Il ne faudrait pas croire, par analogie avec les phénomènes étudiés aux n°s 20 et 21, que l'on ait même approximativement

$$\alpha' = \alpha'' + \alpha''', \qquad \alpha'' = \varphi(P_0).$$

La détorsion $\varphi(P_0)$ ne s'est pas conservée sous forme de couple. Comme nous allons le voir, il n'y a plus aucun rapport direct entre la détorsion $\varphi(P_0)$ à couple

nul constant et le couple produit par la surcharge à azimut constant, couple mesuré sensiblement par α''. C'est la relation entre ces deux quantités que nous allons chercher.

27. *Fil tordu, détordu jusqu'au couple nul, puis allongé à azimut constant. Étude des couples.* — L'expérience montre immédiatement qu'entre le couple produit (mesuré si l'on veut par α'') et la détorsion $\varphi(P_0)$ que donnerait l'expérience à couple nul constant, il n'y a pas à chercher une relation en termes finis. Les déformations produites par la surcharge n'ont plus aucun rapport avec les déformations purement élastiques d'un ressort, qui se présentent sous forme de couples et qu'on peut retrouver sous forme de détorsions à peu près proportionnelles aux couples (*voir* nos 20 et 21). Au contraire, il se produit ici des glissements définitifs, qui sont accompagnés à azimut constant d'un couple, mesurant à chaque instant, non plus la somme des déformations antérieures, mais quelque chose comme la vitesse de déformation actuelle. Une comparaison fera comprendre de quoi il est actuellement question.

Une plume est emportée par le vent avec une vitesse constante : pour la maintenir arrêtée, une force constante est nécessaire. Il n'existe aucun rapport immédiat entre le chemin total déjà parcouru et la force à l'instant considéré. De même, il n'existera probablement aucune relation entre le couple C à chaque instant et la détorsion totale α'. C'est entre les variations $\alpha\alpha'$ et le couple que doit vraisemblablement exister un lien.

Alors se présentent deux hypothèses également séduisantes. Nous pouvons poser

$$C = f\left(\frac{d\alpha'}{dP}\right) \qquad \left(\text{approximativement } C = A\frac{d\alpha'}{dP}\right), \tag{1}$$

$$C = f\left(\frac{d\alpha'}{dl}\right) \qquad \left(\text{approximativement } C = A\frac{d\alpha'}{dl}\right), \tag{2}$$

où A serait une constante. Cherchons ce qui découlerait des hypothèses.

Hypothèse 1 (*fig.* 19). — Le couple d'abord nul croît, passe par un maximum (pour le point d'inflexion), décroît, s'annule (pour α'_m), puis croît dans le sens opposé, *sans qu'on puisse prévoir de limite.*

Hypothèse 2 (*fig.* 20). — Le couple, dont la valeur initiale reste indécise, croît, passe par un maximum (pour le point d'inflexion), décroît, s'annule (pour α'_m), croît dans le sens opposé et tend vers une asymptote horizontale. D'après le *N. B.* de la page 406, n° 24, il finirait même par décroître vers zéro.

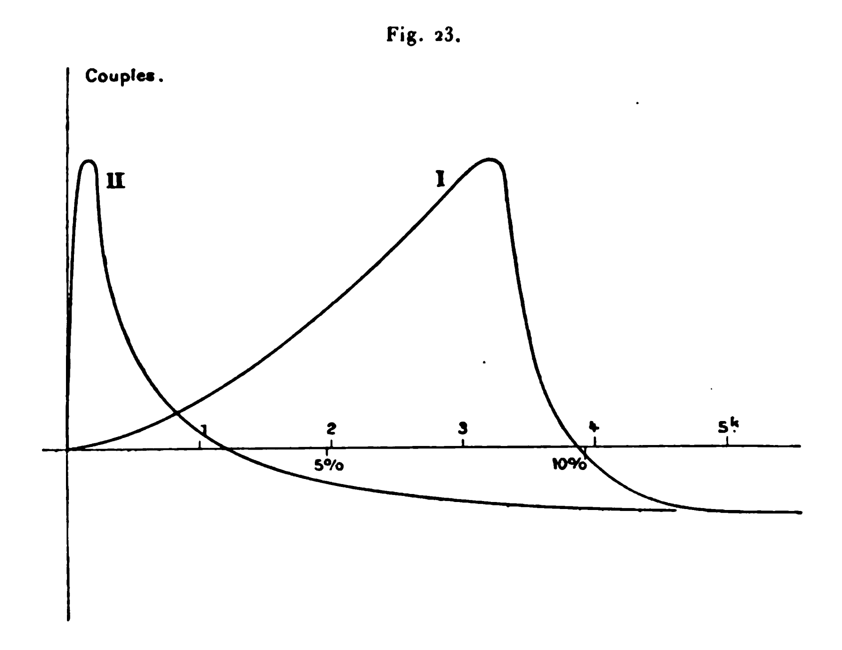
Qu'on regarde maintenant la figure 23, qui donne en I la courbe des couples (portés en ordonnées) en fonction des charges (abscisses) et en II la courbe des

mêmes couples rapportés aux allongements (abscisses). C'est évidemment l'hypothèse 2 qui est vérifiée, au moins approximativement. Il existe bien une asymptote horizontale et même, pour de très grands allongements, le couple décroît.

Voici une autre raison d'écarter l'hypothèse 1. Nous avons dit que α' est indépendant de la vitesse d'écoulement (supposée constante) (n° 25, C). Par conséquent, dans l'hypothèse 1, le couple serait proportionnel à cette vitesse. *L'expérience montre qu'il en est indépendant.*

Avant de procéder à une comparaison plus approfondie, écartons une objection. Les couples C sont fournis par une expérience, les détorsions α' par une

Fig. 23.



autre effectuée avec un fil différent, bien entendu, mais aussi dans des conditions différentes. Est-il raisonnable de chercher à relier les résultats de ces expériences. C'est précisément pour répondre à cette objection que nous avons fait les expériences du n° 26. Si les hypothèses qui y sont énoncées sont rigoureusement satisfaites, nous avons le droit de comparer les deux séries d'expériences, puisque, si l'on passait brusquement de l'allongement à azimut constant à l'allongement à azimut variable et à couple nul, la loi de détorsion serait la même que si le couple était resté constamment nul. De toute manière, alors même que les hypothèses ne sont pas rigoureusement satisfaites, cette comparaison peut suggérer une règle générale suivant laquelle se produiraient les couples dans un grand nombre de cas.

28. *Étude de l'hypothèse* 2. *Position du couple maximum* C_m. — C_m coïncidera avec l'inflexion des courbes de la figure 20, donnant α' en fonction de l. Nous avons dit combien sont mal déterminées les positions de ces inflexions. Il semble toutefois certain que C_m se produit pour une charge et un allongement plus grands que ceux qui correspondent à l'inflexion des courbes de la figure 20. Il est non moins certain que C_m se produit pour une charge et un allongement plus petits que ceux qui correspondent à l'inflexion des courbes de la figure 19.

Grandeur du couple maximum C_m. — C_m croît avec α_0, d'abord très vite, puis de plus en plus lentement. Voici le résultat d'une série sur un fil très recuit :

α_0	3^t	10^t	50^t	100^t
α_i	180°	257°	523°	718°
C_m	474^u	779^u	1368^u	1730^u
$\frac{C_m}{C_0}$	0,115	0,133	0,114	0,105

Voici comment a été calculé le rapport $\frac{C_m}{C_0}$, où C_0 représente le couple au moment de la détorsion.

Une torsion de 90° sur le fil non allongé et supposé parfaitement élastique produit un couple de 2050^u. Si l'on admet que la courbe de détorsion est parfaitement rectiligne (ce qui est d'ailleurs assez grossièrement inexact), il est possible de calculer, à l'aide des α_1, le couple C_0 au moment où l'on commence à détordre. Sans prendre les $\frac{C_m}{C_0}$ pour autre chose qu'une indication d'ordre de grandeur, on voit que ce rapport est remarquablement grand : on peut obtenir, par allongement, un couple qui est plus du dixième du couple obtenu par torsion.

Ces expériences méritaient d'être reprises systématiquement.

Dans les séries suivantes, on mesure directement C_0. Les conditions sont uniformément les suivantes :

On tord de α_0, on attend $T_0 = 15^m$; on prend la valeur du couple C_0 après 10^m d'arrêt. On détord, on mesure α_1 jusqu'à l'azimut atteint 5^m après le retour au couple nul. Après le temps total $T_1 = 15^m$ à partir du retour au couple nul, on allonge à raison d'une surcharge de 123^g par minute.

α_0	2^t	5^t	10^t	20^t	50^t
C_0	821^u	944^u	1100^u	1438^u	2198^u
α_1	132°	165°	204°	268°	429°
$\frac{C_0}{\alpha_1}$	6,26	5,72	5,41	5,37	5,11
C_m	62^u	86^u	111^u	161^u	215^u
$\frac{C_m}{C_0}$	0,075	0,091	0,101	0,112	0,098

Les variations du rapport $\frac{C_0}{\alpha_1}$ montrent que la courbe de détorsion n'est pas rectiligne, mais s'infléchit (*voir* Chap. VII, n° 2, 3°). Le rapport $\frac{C_m}{C_0}$, probablement nul pour $\alpha_0 = 0$, croît d'abord très vite quand α_0 croît, passe par un maximum, puis décroît. Pour le maximum, l'ordre de grandeur pour un fil bien recuit est supérieur à un dixième.

Autre fil plus recuit que le précédent (à la même température, mais avec une vitesse de passage moindre).

α_0	10^t	20^t	50^t
C_0	1015^u	1330^u	2076^u
α_1	186°	250°	399°
$\frac{C_m}{C_0}$	0,090	0,094	0,094

La comparaison numérique des couples C_m et des valeurs $\frac{d\alpha'}{dl}$ au point d'inflexion serait illusoire, vu l'incertitude des valeurs de ce quotient. Il est d'ailleurs probable que l'hypothèse 2 n'est qu'approchée.

Position du couple nul. — Il doit se produire, d'après l'hypothèse, pour une charge et un allongement qui donneraient α'_m dans l'expérience à couple nul. La différence est certainement petite. On constate cependant un retard du couple nul sur la détorsion maxima. Ce couple nul a lieu pour une charge et un allongement un peu plus grands.

Nous insistons sur ce fait qu'il n'y a aucun rapport direct entre le couple maximum C_m et la détorsion maxima α'_m. Non seulement ils ne se produisent pas pour les mêmes charges, mais ils ne sont pas du même ordre de grandeur. Reprenons, par exemple, l'expérience de la page 413 pour $\alpha_0 = 20^t$; nous avons trouvé

$$C_m = 161^u.$$

Pour obtenir ce couple, il faudrait, sur le même fil supposé parfaitement élastique, une torsion inférieure à 30°; or, on a trouvé, par une expérience directe,

$$\alpha'_m = 299^\circ, \qquad \text{soit} \qquad 10 \text{ fois plus.}$$

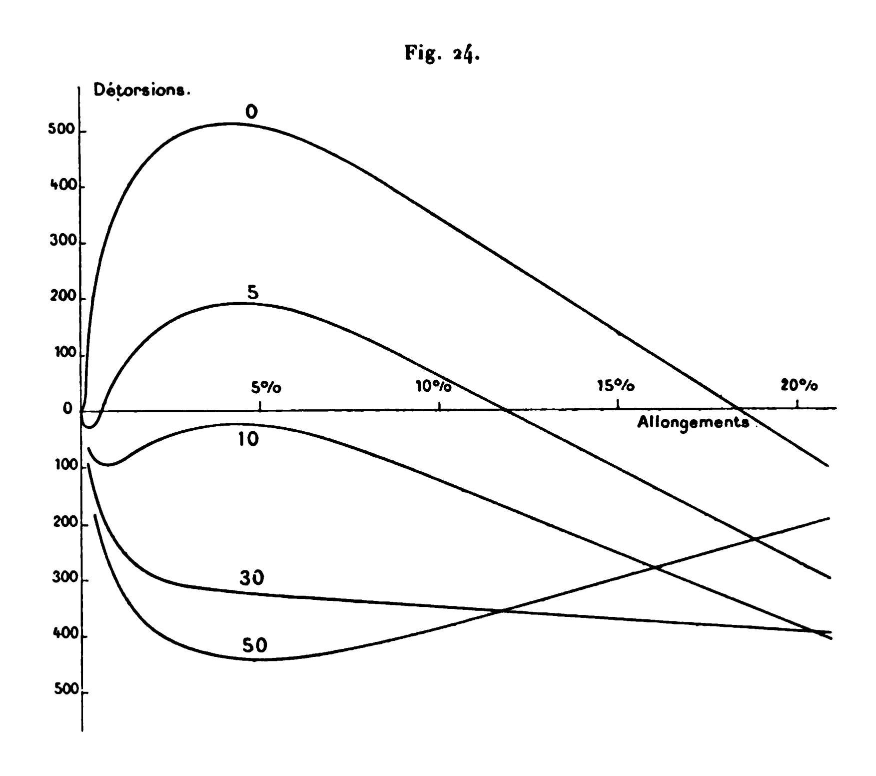
Grandeur du couple limite. — La relation $C = A\frac{d\alpha'}{dl}$ se vérifie très exactement, surtout pour de grandes valeurs de α_0. Si la courbe α' en fonction de l présente, après sa partie rectiligne, un infléchissement vers l'horizontale, le couple doit passer par un minimum et tendre définitivement vers zéro. C'est effectivement ce qui se produit.

Remarque sur l'hypothèse précédente. — Si séduisante qu'elle soit, elle est évidemment incomplète pour le début du phénomène. Nous savons en effet, par les n^{os} **20** et **21**, qu'elle serait absolument inexacte pour des fils étirés, tant que l'allongement permanent est petit ou qu'il est purement élastique. Le couple produit à azimut constant par une surcharge et la détorsion observée à couple nul constant sont à peu près proportionnels. Ces faits suffisent à expliquer pourquoi le couple C_m se produit pour une charge et un allongement plus grands que ceux qui correspondent à l'inflexion des courbes de la figure 20, même en admettant l'hypothèse 2 (*voir* n° **24**, à la fin).

29. *Fil tordu de α_0 tours à droite, de α'_0 à gauche; ramené au couple nul, puis allongé sous ce couple.* — Nous avons étudié les courbes donnant l en fonction de P dans les conditions ci-dessus énoncées (Chap. V, p. 52 et 19); α_0 est pris constant et α'_0 sert de paramètre variable. Nous avons vérifié les résultats énoncés, nous n'y reviendrons pas.

Cherchons quelles sont les détorsions α' au couple nul pendant l'allongement; les résultats sont résumés dans la figure 24.

Fig. 24.



$\alpha_0 = 50^t$; $T_0 = T'_0 = 0$; $T_1 = 10^m$ (c'est l'arrêt au couple nul avant l'allongement); $\alpha'_0 = 0, 5, 10, 30, 50$ tours. Les détorsions α' sont données en degrés;

elles sont comptées positivement quand le déplacement se produit dans le sens de la première détorsion ou, si l'on veut, dans le sens de la torsion α'_0.

Début des détorsions α'. — Au début de la surcharge, le déplacement se fait toujours dans le sens de la dernière détorsion. Il ne se produit donc vers le haut que pour la première courbe marquée o ($\alpha'_0 = 0$). La démonstration expérimentale est évidemment impossible si α'_0 est une fraction de tour. Pour $\alpha'_0 = 5^t$, on a déjà un déplacement de 4° vers le bas. Nous n'avons pas donné cette courbe pour ne pas surcharger la figure.

Maximum ou minimum. — La courbe $\alpha'_0 = 0$ présente le maximum ordinaire. Les courbes $\alpha'_0 = 5^t$, $\alpha'_0 = 10^t$ en présentent un à peu près pour le même allongement. Toujours à peu près pour le même allongement, la courbe $\alpha'_0 = 30^t$ présente une inflexion; enfin, pour $\alpha'_0 = 50^t$, il y a un minimum. Si l'on porte en abscisses les α'_0 et en ordonnées les α'_m, on obtient une courbe continue, rapidement décroissante au voisinage de $\alpha'_0 = 0$ et presque horizontale pour $\alpha'_0 = 50^t$. Les maxima ou minima se font, dans la série dont nous rapportons les résultats, pour un allongement de 4,3 pour 100, soit relativement petit.

Parties terminales rectilignes. — Les parties terminales sont encore à peu près rectilignes, comme pour $\alpha'_0 = 0$. D'abord inclinées vers le bas, elles finissent par être inclinées vers le haut.

Prenons les α'_0 pour abscisses et les $\frac{d\alpha'}{dl}$ limites pour ordonnées; nous obtenons une courbe à peu près rectiligne. Toutefois, la courbe indique une variation un peu plus rapide pour α'_0 voisin de o et un peu plus lente pour α'_0 voisin de 50^t. Ce résultat était facile à prévoir d'après ce qui est dit au n° **24**. Si, en effet, α'_0 croît beaucoup au delà de 50 tours, l'influence de $\alpha_0 = 50^t$ doit aller en s'affaiblissant, et nous devons retomber sur les règles énoncées pour une torsion et une détorsion.

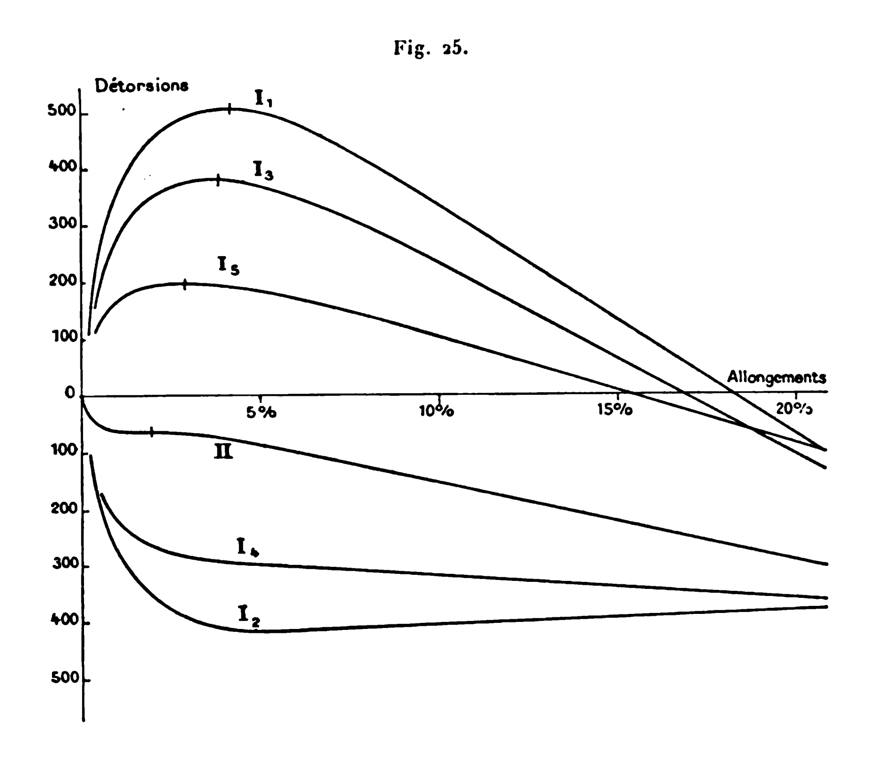
30. *Torsions et détorsions alternées en progression arithmétique décroissante* (*fig.* 25). — Le nombre a étant quelconque, p étant un nombre de tours, on tord de ap dans un sens, de $a(p-1)$ en sens contraire, de $a(p-2)$ dans le premier sens.... Ces torsions faites, on ramène au couple nul et, après un certain temps, on allonge. Nous obtenons ainsi deux séries de courbes donnant α' en fonction de l (*fig.* 25) : chaque courbe correspond, comme toujours, à un fil différent. Elles se divisent en deux séries : la série impaire (courbes 1, 3, ...) correspond à un nombre impair de torsions ou de détorsions; la série paire (courbes 2, 4, ...) correspond à un nombre pair.

Nous appellerons m le numéro d'ordre.

La figure 25 représente les résultats pour $a = 10$, $p = 5$; la torsion initiale $\alpha_0 = ap = 50^t$. La série impaire correspond donc (1) à une torsion de 50^t;

(3) à une torsion de 50^t, une détorsion de 40^t, une torsion de 30^t; (5) à une torsion de 50^t, ..., une torsion de 10^t. La série paire correspond (2) à une torsion de 50^t, une détorsion de 40^t; (4) à une torsion de 50^t, ..., une détorsion de 20^t.

Fig. 25.



Après quoi on ramène au couple nul. Les arrêts au bout des torsions sont nuls; on attend 10^m au couple nul avant d'allonger.

Quelle que soit la courbe considérée, le mouvement, au début de l'allongement, se fait dans le sens de la dernière détorsion, celle qui ramène définitivement au couple nul.

Les courbes se terminent toutes par une partie rectiligne.

Distinguons maintenant les deux séries.

Série impaire. — Les courbes présentent toutes un maximum; elles ressemblent aux courbes qui correspondent à une seule torsion. Le maximum α'_m décroît quand m croît; il se produit pour des allongements qui décroissent quand m croît. Si m devenait très grand (ce qui implique p grand, a petit, si $\alpha_0 = pa$ est donné), le maximum se rapprocherait beaucoup de l'origine. La partie rectiligne tend vers l'horizontale quand m croît.

Série paire. — On suppose a petit devant $\alpha_0 = pa$.

Si m est petit, le maximum subsiste; les courbes 1 et 2 sont imparfaitement

symétriques par rapport à l'axe des allongements. Quand m augmente, la partie rectiligne (qui montait pour m petit, courbe I_2) s'approche de l'horizontale et finit par descendre. Le maximum disparaît et se transforme en une inflexion. La grandeur de la détorsion α' correspondant à cette inflexion diminue quand m croît; l'inflexion se produit aussi pour des allongements de plus en plus petits.

Nous venons de voir que, m augmentant, la partie rectiligne va d'abord vers le haut, devient horizontale, et enfin va vers le bas. Son inclinaison croît alors et passe par un maximum. Comme la série arithmétique est essentiellement limitée, la dernière courbe peut présenter une phase quelconque du phénomène. Il est clair aussi, d'après le n° **24**, que l'inclinaison limite des courbes paires n'est d'abord vers le haut que si a est suffisamment petit devant $\alpha_0 = pa$.

Relation des courbes consécutives des deux séries; courbe impaire $m - 1$ et courbe paire $m + 1$. On suppose m grand et, par conséquent, a suffisamment petit devant $\alpha_0 = pa$. — Les parties rectilignes tendent vers la même inclinaison.

La courbe impaire m part vers le haut et possède un maximum; la courbe paire $m + 1$ part vers le bas et présente une inflexion.

Les deux séries ayant un nombre limité de courbes, les dernières peuvent être loin de se superposer. A la limite, si a est petit, α_0 grand et, par conséquent, p grand, le maximum des courbes impaires et l'inflexion des courbes paires coïncident avec l'origine, et la partie rectiligne est horizontale. La matière a perdu, *en apparence*, sa dissymétrie hélicoïdale par rapport à l'allongement.

Ce dernier point est difficile à prouver expérimentalement. Nous donnons en II (*fig.* 25) la courbe paire finale du système $\alpha_0 = pa = 50$, $a = 5$. Il y a eu 50^t à droite, 45 à gauche ... et 5 à gauche; en tout 275 tours. L'inflexion correspond à $l = 1,9$ pour 100 et l'inclinaison $\frac{\Delta\alpha'}{\Delta l}$ de la partie rectiligne est encore de $15°,5$ par centimètre d'allongement. Nous sommes loin des résultats limites prévus plus haut. Il n'est pas sûr qu'on obtienne une symétrie apparente pour $\alpha_0 = pa = 50^t$ et $a = 1$, ce qui exigerait pour la série complète 1275 tours de torsion, que probablement le fil ne supporterait pas.

Arriverait-on plus vite à la symétrie apparente à l'aide de torsions et de détorsions en progression géométrique? Cela est douteux.

Quoi qu'il en soit, ceux qui écrivent des Mémoires par analogie et concluent du magnétisme aux déformations permanentes feront bien de méditer ces résultats (Chap. V, p. 52).

31. *Fil allongé de 1 à l (n pour 100) sans filière, tordu, ramené au couple nul, puis allongé. On détermine les α' pendant cet allongement.* — L'allon-

gement est produit par l'écoulement d'eau à raison de 123^g par minute. Quand l'allongement de préparation est obtenu, on arrête l'écoulement, on supprime brusquement une partie de la charge (de manière que tout allongement ultérieur cesse) et l'on compte 15^m. Pendant ce temps, on vide le seau, on le remet en place et l'on mesure l'allongement. Le fil est prêt pour la seconde partie de l'expérience. $P_0 = 100^g$.

Les 15^m écoulées, on tord de $\alpha_0 = 20^t . l\sqrt{l}$, de manière que les torsions soient équivalentes pour tous les fils. Le même coefficient $l\sqrt{l}$ servira à réduire les α' observés. $T_0 = 0$; 5^m après le retour au couple nul, on détermine l'azimut, ce qui donne, après correction, la détorsion α_1; 10^m après, seconde lecture, qui donne la réactivité Δp dans l'intervalle 5^m à 10^m. L'azimut obtenu sert d'origine aux α'. On rétablit alors l'écoulement et l'on détermine α' en fonction des allongements.

1° Les valeurs α'_m confirment ce que nous avons maintes fois répété sur l'action des petits allongements sur un fil recuit. Un allongement préparatoire de 0,48 pour 100 abaisse α'_m de 713° à 644°; un allongement de 1 pour 100 l'amène à 571°. Non seulement les allongements préparatoires plus grands ne continuent pas à produire des effets comparables, mais au contraire α'_m cesse de décroître, passe par un minimum pour un allongement préparatoire de 3,5 pour 100 et croît de nouveau. Il est impossible bientôt d'en déterminer la valeur, pour une raison que nous allons voir ci-dessous. Il est à supposer que la courbe, construite en portant α'_m en ordonnée et l'allongement préparatoire en abscisses, présenterait après son minimum un point d'inflexion et aurait, en définitive, une asymptote horizontale.

Dans le Tableau suivant, on donne les α_1, les α'_m et les Δp ramenés à ce qu'ils seraient si le fil avait, au début de la seconde partie de l'expérience, le diamètre qu'il possède quand l'allongement préparatoire est nul.

Ainsi, pour l'allongement préparatoire 5 pour 100, on a trouvé les valeurs brutes

$$\alpha_1 = 775, \qquad \alpha'_m = 553, \qquad \Delta p = 43$$

(α_1 et α'_m en degrés, Δp en douzièmes). Le facteur de réduction est

$$l\sqrt{l} = 1,076.$$

Les valeurs du Tabaleu sont donc

$$775 : 1,076 = 721 = \alpha_1;$$

de même,

$$\alpha'_m = 514, \qquad \Delta p = 40.$$

Enfin, quand on lit que α'_m se produit sous un allongement de 9,8 pour 100,

cela veut dire que le fil, dont la longueur était 100^{cm} avant la préparation, 105 après, possède au moment du maximum une longueur de $114^{cm},8$.

Allongement préparatoire.	α_1.	α'_m.	Δp.	Allongement pour α'_m.
0 pour 100.........	312°	713°	8	5,1 pour 100
0,48 »	359	644	12	"
1,00 »	418	571	15	"
2,10 »	524	505	22	5,8 »
3,47 »	622	479	33	6,2 »
5,00 »	721	514	40	9,8 »
6,93 »	820	> 530	48	> 13,5 »
11,37 »	916	> 550	58	"

2° α'_m se produit pour des allongements croissants : ces allongements sont, bien entendu, comptés à partir de la longueur du fil au début de la deuxième partie de l'expérience. Pour rendre les nombres tout à fait comparables, il faudrait ramener les nombres de la dernière colonne à ce qu'ils seraient si le fil avait 1^m au début de la seconde partie de l'expérience. Le résultat serait peu modifié. Pour l'allongement préparatoire 5 pour 100, on trouverait, pour le maximum, un allongement de $9,8 : 1,05 = 9,3$ pour 100, au lieu de 9,8 pour 100. Ces nombres sont d'ailleurs évidemment connus avec peu de précision.

On comprend maintenant pourquoi il est impossible de déterminer α'_m dès que l'allongement de préparation est grand. Pour l'allongement préparatoire de 6,93 pour 100, par exemple, on n'est pas encore au maximum, et pourtant le fil a été allongé de 20,43 pour 100 en tout; tandis que, pour un allongement préparatoire nul, le maximum se produit quand le fil a un peu plus de 105^{cm}.

3° Les parties rectilignes terminales sont d'autant plus voisines de l'horizontale que l'allongement préparatoire est plus grand.

4° *Étude du début de la courbe* (*détorsion, charge*). — Après les tout premiers instants où la réactivité peut intervenir, les courbes se disposent d'une manière simple. Soit en abscisses les charges (ou le nombre de minutes d'écoulement) et en ordonnées les α' (corrigées comme il a été dit). Les courbes sont très voisines et disposées de bas en haut dans l'ordre des allongements préparatoires décroissants : celle qui est la plus haute correspond donc à l'allongement préparatoire nul. Elles se séparent de plus en plus. Pour des charges grandes, elles finissent par s'entrecouper, comme les valeurs des α'_m le font prévoir. Les charges ont au début une influence qui diminue avec la charge déjà supportée et, par conséquent, avec l'allongement préparatoire.

5° *Étude du début de la courbe* (*détorsion, allongement*). — La distribution des courbes est la même. Les allongements produisent donc des modifications d'autant plus faibles que le fil en a déjà subi un plus grand.

6° On remarquera que les Δp croissent régulièrement avec l'allongement préparatoire. Il ne semble donc pas qu'il y ait un rapport direct entre les Δp et les α'_m, comme on aurait pu le supposer *a priori*.

Dans le Tableau suivant, on donne quatre courbes complètes.

Dans la première colonne sont les nombres de minutes d'écoulement. On allait jusqu'à 42^m, soit jusqu'à une charge de 5260^g environ, y compris la charge initiale. Le fil a une section de $0^{mm},234$ et un diamètre de $0^{mm},545$. Les α' sont donnés en degrés et douzièmes de degrés; ce sont les nombres bruts; il faut les multiplier par $l\sqrt{l} = a$, pour les ramener à ce qu'ils seraient pour un diamètre uniforme initial. Les allongements sont donnés en vingtièmes de millimètre. Les petits allongements sont en partie *apparents;* le fil se redresse et les liaisons se tendent.

	Allongements							
	0 pour 100.		0,48 pour 100.		3,47 pour 100.		11,37 pour 100.	
a.......	1,000.		0,992.		0,950.		0,851.	
min.	o	u	o	u	o	u	o	u
0.....	0	0	0	0	0	0	0	0
2.....	$1,8^d$	0	$1,4^d$	0	$1,1^d$	0	$1,6^d$	0
4.....	6,0	1	5,0	1	4,3	1	4,6	1
6.....	12,7	3	10,1	3	7,6	3	8,4	3
8.....	27	5	7,3	5	11,9	5	12,8	5
10.....	56	12	30	9	17,2	7	17,8	7
12.....	144	33	49	12	23,2	10	22,11	9
14.....	305	102	94	20	30,0	11	29,2	11
16.....	427	184	237	26	38,8	13	36,1	13
18.....	522	282	380	168	49,5	16	43	15
20.....	593	389	477	270	63	19	52	18
22.....	644	502	537	387	80	24	61	21
24.....	678	630	590	511	105	29	71	23
26.....	700	778	621	650	145	41	82	25
28.....	711	932	639	805	243	109	96	29
30.....	713	1102	648	978	374	286	110	32
32.....	708	1308	649	1169	441	482	128	35
34.....	697	1533	643	1388	479	707	150	43
36.....	681	1798	632	1639	498	949	178	52
38.....	660	2112	619	1946	504	1240	219	70
40.....	636	2499	602	2318	500	1588	305	143
42.....	609	2993	585	2784	488	2030	498	673
44.....	582	3722	570	3448	471	2637	597	1453

On a essayé de se rendre compte de la manière dont variait le couple maximum dans l'allongement à azimut constant, en fonction de l'allongement préparatoire. L'expérience était conduite de la manière suivante : $\alpha_0 = 20'$, $T_0 = 15^m$ pendant

lesquelles on mesurait le couple en unités arbitraires. Détorsion α_1. Arrêt $T_1 = 15^m$. Allongement à azimut constant : détermination du couple maximum C_m :

Allongement préparatoire...	0 pour 100	0,5 pour 100	3 pour 100
α_1	274°	326°	540°
C_0	1500[u]	1791[u]	2864[u]
C_m	165[u]	188[u]	248[u]
$\frac{C_m}{C_0}$	0,110	0,105	0,087

Pour comparer les α_1 de cette expérience et de la précédente, on n'oubliera pas qu'ici $T_0 = 15^m$, tandis que, dans la précédente, $T_0 = 0$. Le rapport $\frac{C_m}{C_0}$ est du même ordre de grandeur qu'au n° **28**; il décroît à mesure que l'allongement préparatoire croît. Mais ce que nous avons vu au n° **28** (p. 414) ne nous permet pas de conclure ce résultat pour tous les α_0. Il se pourrait que, pour de petites valeurs de α_0, le phénomène inverse se présentât.

32. *Influence du recuit.* — Pour résoudre d'une manière à peu près complète la question ici posée, il faudra de longues et difficiles recherches. Je donne sous toutes réserves les indications qui suivent, uniquement pour jalonner la voie à ceux qui voudraient entreprendre cette étude. Il est à peine besoin de faire remarquer son importance théorique, puisqu'il ne s'agit rien moins que de rechercher l'influence de l'état initial sur la faculté de contracter des dissymétries. D'ailleurs, l'expérience prouve que la grandeur des détorsions pendant l'allongement est un critérium extrêmement sensible de l'état initial, plus sensible que la forme des courbes de traction ou de torsion.

J'ai déjà fait observer, à la fin du Chapitre III, combien nombreux sont les états qu'on englobe sous la dénomination *recuit plus ou moins grand* (Chap. III, p. 282).

Pour préciser, partons d'un fil fortement allongé à la filière, que nous désignerons par $F\infty$. Nous pouvons réaliser le système $F\infty R_T(t)$ doublement infini : faire varier la température T du recuit et sa durée t. Mais, et nous n'insistons pas, il y a un très grand nombre d'autres systèmes possibles.

Les quelques expériences que nous avons faites se rapportent à une durée de recuit constant ($t = 4^s$) et à des températures variables. Voici les résultats, sous toutes réserves.

1° A mesure que T croît, α'_m décroît; l'allongement correspondant Δl diminue. Il existe même une relation à peu près linéaire entre la détorsion maxima et l'allongement sous lequel elle se produit. Les variations de α'_m sont considérables. De petites variations dans les conditions du recuit peuvent faire passer sa valeur de 1 à 3, par exemple.

2° Quand T croît, la partie terminale rectiligne de la courbe (α', l) s'incline de plus en plus. Il résulte de ces deux règles que, pour des fils recuits à température plus basse, c'est la détorsion (dans le sens de la réactivité) qui prédomine toujours. Pour des fils recuits à plus haute température, la détorsion initiale (au début de l'allongement) est faible; le mouvement qui suit le maximum et se produit dans le sens de la torsion initiale est considérable.

3° Si l'on admet l'hypothèse 2 du n° **27**, on déduit que le couple nul se produit pour des allongements qui augmentent à mesure que le fil est moins recuit, et que le couple limite [correspondant à la partie rectiligne de la courbe ($\alpha' l$)] augmente à mesure que le fil est plus recuit.

On ne comparera donc pas numériquement les résultats rapportés dans des numéros différents de ce Mémoire, à moins d'une indication formelle qu'il est légitime de faire cette comparaison. Mes expériences pèchent encore beaucoup par la définition du recuit, et il m'est actuellement impossible de réaliser à coup sûr un fil de propriétés numériquement données. Toutes les comparaisons numériques portent sur des fils obtenus dans une seule et même opération de recuit.

33. *Variation des couples par allongement, à partir des points d'une courbe de première torsion. Fil tordu de α_0; arrêt T_0 au bout de la torsion; allongement à azimut à peu près constant. Le fil employé était peu recuit :* $T_0 = 15^m$. — Le fil a 90^{cm} de longueur, les allongements sont donnés en vingtièmes de millimètre. La torsion se fait sous $100^g = P_0$; pendant la torsion se produit un petit allongement, Δl. Les couples sont donnés en unités arbitraires. Voici d'abord les couples C_0 après l'arrêt T_0 au moment où commence la surcharge et les allongements Δl :

α_0........	2^t	5	10	20	50
Δl........	2^v	7	11	20	40
C_0........	764	943	1140	1483	2274

1° *Variation du couple en fonction de la surcharge* (*fig.* 26). — Les couples sont donnés en millièmes de la valeur initiale. Le quotient $\frac{dC}{dP}$ négatif croît d'abord en valeur absolue quand P croît, passe par un maximum, puis décroît. La valeur initiale du quotient $\frac{dC}{dP}$ et sa valeur maxima diminuent à mesure que α_0 croît.

2° *Variation du couple en fonction de l'allongement.* — Les courbes ont la même forme générale et les mêmes relations de position que dans le cas précédent.

Voici quelques nombres pour fixer les idées : $\alpha_0 = 2^t$, surcharges de 206^g à la minute à partir de la charge initiale, observations toutes les minutes :

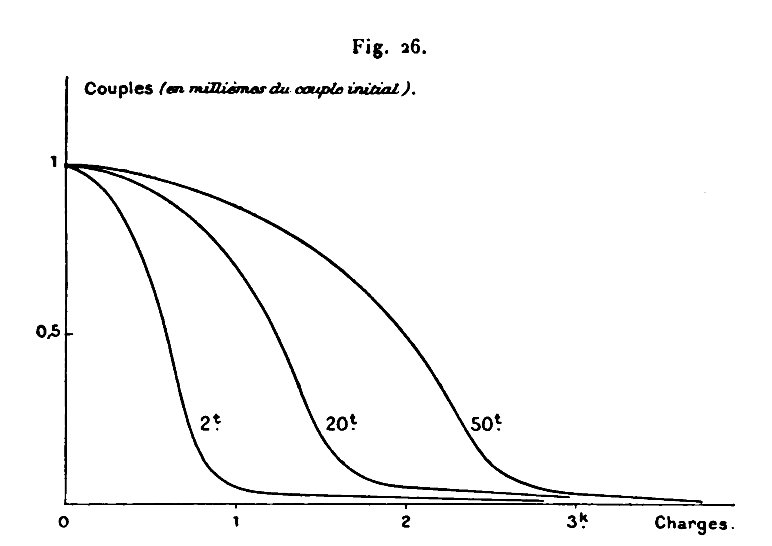
C.......	1000	928	757	467	126	41	26
Δl.......	2^v	5	10	32	79	131	189

Ainsi, après un allongement de 189^v, soit 10,5 millièmes, le couple se trouve réduit à 26 millièmes de sa valeur initiale. Voici maintenant pour $\alpha_0 = 50^t$:

C.......	1000	992	974	952	921	881	831	770	699
l........	0^v	1	2	4	7	9	11	13	16
C.......	612	497	356	192	80	43	27	21	15
l........	21^v	28	39	69	128	212	310	421	542

Nous devons comparer les résultats précédents avec ceux du n° **11**, **Chapitre IV**. Nous y disons que le couple devient rigoureusement nul pour des allongements qui atteignent tout au plus 10 ou 20 millièmes : le fil ayant 90^{cm} et les allongements étant donnés en vingtièmes de millimètre, les couples devraient être rigoureusement nuls pour des Δl atteignant au plus 180 à 360 unités. Effectivement,

Fig. 26.



le couple est alors très petit, mais il n'est pas rigoureusement nul. Il semble même que la courbe (C, l) ne tende pas asymptotiquement vers $C = 0$. Dans l'expérience actuelle, faite avec du fil peu recuit, on peut aller jusqu'à un allongement de 20 pour 100 sans que le couple soit nul; *mais, pour des fils très recuits, on atteint le couple nul, puis le couple devient négatif.* Il n'y a rien là d'ailleurs qui puisse nous étonner; c'est la généralisation des phénomènes

exposés au n° 28 et représentés figure 23, interprétés à l'aide des remarques du n° 32 sur l'influence du recuit.

Je pourrais répéter ici ce que j'ai dit à la fin du n° 24. Le phénomène d'allongement est complexe. L'allongement purement élastique produit une diminution du couple (*voir* n° 16, *fig.* 17); l'allongement permanent en produit une autre. Le quotient $\frac{dC}{dl}$ est donc la somme de deux quotients $\frac{dC}{dl_1}$ et $\frac{dC}{dl_2}$ (*voir* n° 24). Le premier croît d'une manière continue; on peut supposer que le second a d'abord une très grande valeur et diminue ensuite d'une manière continue. Tout ce qui augmente l'intervalle des charges ou allongements pour lesquels le fil est à peu près parfaitement élastique augmente aussi la charge et l'allongement pour lesquels se produit le maximum de $\frac{dC}{dl}$. C'est, en particulier, l'effet d'une plus grande torsion préparatoire. Nous reviendrons plus loin là-dessus (n° 35).

Influence de l'arrêt T_0. — Il résulte immédiatement des considérations précédentes qu'un accroissement du temps d'arrêt T_0 augmente l'importance de la partie initiale peu inclinée et diminue son inclinaison.

Exemple. — $\alpha_0 = 20^t$, mêmes unités que plus haut; ΔC est la diminution totale en millièmes de C_0 :

$T_0 = 13^h$	ΔC....	9	30	74	152	260	407	623	848	926	947
	l.....	1^v	2	3	6	9	13	23	56	110	176
	$\frac{\Delta C}{l}$....	9	15	25	25	29	31	27	15	8	5
$T_0 = 15^m$	ΔC....	18	55	114	197	317	470	700	869	935	950
	l.....	1^v	3	4	7	10	14	27	60	120	190
	$\frac{\Delta C}{l}$....	18	18	26	28	32	33	26	14	8	5

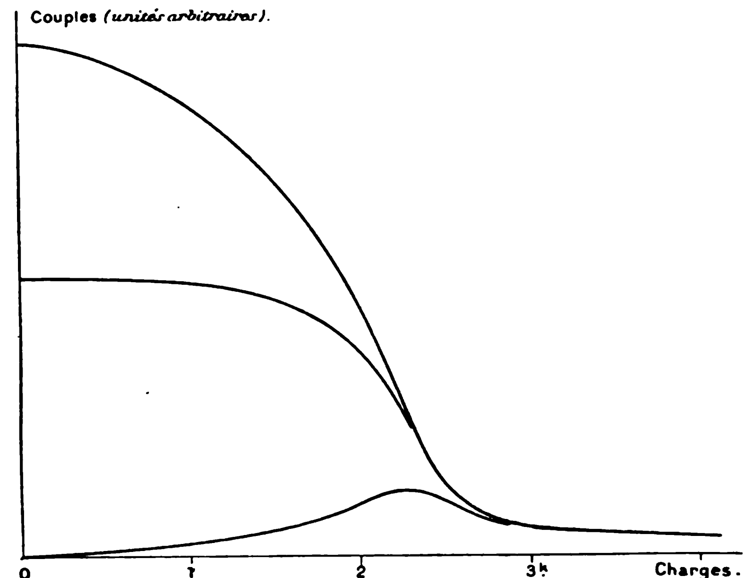
Seule la partie initiale de la courbe $(\Delta C, l)$ est sensiblement modifiée. La courbe $(\Delta C, P)$ l'est, au contraire, plus profondément, ce qui est d'accord avec l'hypothèse énoncée plus haut.

Ce que nous avons dit (Chap. IV, n° 12, A) sur la différence qui existe entre ces phénomènes et ceux de refroidissement subsiste intégralement. Il faut s'entendre sur l'expression « fils ayant été préparés de même » employée (*loc. cit.*, n° 12, A). Des fils pris aux différents points d'une courbe de première torsion ne peuvent être considérés comme ayant été préparés de même. Leurs couples ne sont pas également stables et la loi de variation, sous l'influence d'une surcharge, n'est pas la même. Dans les expériences du Chapitre IV, n° 12, A, on commençait par fixer les parcours dans un certain intervalle de couples, de manière que dans cet intervalle le fil pût être considéré comme à peu près parfaitement élas-

tique. Partant alors d'un couple quelconque pris dans cet intervalle, on obtient, pour une série de fils, une loi de variation à peu près indépendante du couple initial.

34. *Variation des couples par allongement, à partir des points d'une courbe de première détorsion. Fil tordu de α_0, arrêt T_0; détorsion α_1, arrêt T_1; allongement à débit constant. Le paramètre variable est α_1.* — La figure 27 donne l'ensemble des résultats *pour des fils peu recuits*.

Fig. 27.



Si l'on détord jusqu'au couple nul, ce qui revient à choisir une certaine valeur de α_1, on obtient une courbe du faisceau ici étudié; on se trouve dans le cas déjà considéré au n° 27.

1° De quelque point de la courbe de détorsion que l'on parte, les allongements sont la même fonction des charges. La courbe (l, P) reste la même. Cette règle est à peu près rigoureusement vérifiée; elle n'est que la généralisation de l'hypothèse 1° du n° 26.

2° Les quotients $\frac{dC}{dl}$ ou $\frac{dC}{dP}$ au début des courbes (C, l) ou C, P (quand commence la surcharge), d'abord négatifs, diminuent en valeur absolue à mesure que le couple initial décroît ou que l'on s'avance davantage sur la courbe de détorsion. Pour une certaine détorsion, les valeurs initiales de ces quotients sont nulles. Pour des couples plus petits, elles deviennent positives. Tout ceci était facile

à prévoir d'après le n° 18, où sont rapportés les résultats obtenus pour les fils étirés.

3° Les diverses courbes tendent ensuite toutes vers la même forme asymptotique. On se reportera à ce que nous avons dit au n° 33, page 424, sur l'influence du recuit, en ce qui concerne l'obtention d'un couple négatif pour des allongements pratiquement réalisables.

Le résultat précédent montre que les phénomènes qui se produisent pour de grands allongements dépendent principalement de la grandeur de la torsion et non des conditions de l'allongement. Ils seraient donc dus, comme nous l'avons déjà énoncé, à une dissymétrie créée par cette torsion, et qui se conserve indépendamment des phénomènes intermédiaires.

35. *Fil recuit, allongé de n pour* 100, *tordu d'un nombre donné de millièmes; maintenu tordu un temps* T_0 *et allongé. On détermine pendant l'allongement la loi de variation des couples.* — Nous avons déjà vu que l'allongement apparent l est la somme de l'allongement élastique l_1 et de l'allongement permanent l_2. Comme la manière dont C varie avec ces allongements diffère beaucoup, on conçoit que $\frac{dC}{dl}$ puisse varier beaucoup, rien que selon la répartition dans l'allongement l des deux allongements l_1 et l_2, alors même que les coefficients différentiels $\frac{dC}{dl_1}$ et $\frac{dC}{dl_2}$ resteraient invariables, ou, si l'on veut, que C resterait la même fonction de l_1 et de l_2.

Il peut arriver aussi que non seulement la répartition des deux sortes d'allongement change dans l'allongement total, mais encore que la relation entre C, l_1 et l_2 soit, elle aussi, modifiée. C'est ce qui a lieu quand on allonge le fil avant de le soumettre aux opérations de torsion et d'allongement.

Nous avons déjà énoncé (Chap. IV, n° 12, B) que pour du fil allongé de n pour 100 la loi de déperdition est d'autant plus rapide au début que n est plus petit. L'effet ne tient pas seulement à ce que le fil est à peu près parfaitement élastique pour des charges et des allongements plus grands, mais aussi à ce que la loi qui relie C et l'allongement permanent l_2 s'est modifiée; un même allongement permanent produit une diminution relative de C qui diminue à mesure que n augmente.

On comparera le contenu de ce numéro aux phénomènes exposés au n° 31 : on y compare aussi des fils ayant subi un allongement préparatoire; il s'agit alors des phénomènes de détorsion au couple nul provoqués par l'allongement.

36. *Cause des phénomènes étudiés.* — La variation du couple total à azimut constant et la variation de l'azimut à couple constant sont les résultantes des phénomènes dont les cylindres élémentaires sont le siège.

Soit f la force tangentielle qu'exerce un élément de la surface de la section droite. Indépendamment de toute hypothèse, le couple total est

$$C = 2\pi \int_0^R r^2 f \, dr.$$

Le problème revient à déduire de la détermination des couples totaux C une loi reliant f à l'allongement : il ne peut être évidemment résolu que par tâtonnements.

Première hypothèse. — *Les phénomènes sont dus à des couples déjà existants, qui disparaissent pendant l'allongement avec une inégale rapidité dans les cylindres concentriques qui forment le cylindre plein.* Ce qui revient à dire que *sous l'influence de l'allongement à azimut constant, f diminue depuis sa valeur actuelle jusqu'à* o. Cette hypothèse est absolument insuffisante.

a. Imaginons d'abord que f varie en fonction de l'allongement l, suivant la loi

$$f = f_0 \varphi(l),$$

où f_0 est la valeur initiale de f au début de l'allongement, φ est une fonction indépendante de l'écrouissage et, par conséquent, du rayon du cylindre infiniment mince considéré. On a évidemment

$$\varphi(0) = 1, \qquad \varphi(\infty) = 0.$$

Le couple initial C_0 et le couple à chaque instant sont donnés par les formules

$$C_0 = 2\pi \int_0^R r^2 f_0 \, dr, \qquad C = 2\pi \int_0^R r^2 f_0 \varphi(l) \, dr = C_0 \varphi(l).$$

La variation du couple total serait donc toujours la même. En particulier, pour $C_0 = 0$ on devrait trouver identiquement $C = 0$. L'hypothèse est donc fausse; on ne peut supposer que φ soit indépendant de l'état initial d'écrouissage. Cherchons comment φ doit varier avec lui.

b. A mesure que nous nous avançons sur une courbe de première torsion, la loi de diminution φ devient moins rapide. Toutes les couches sont plus tordues. Donc φ doit varier de plus en plus lentement quand l croît, à mesure que le fil est plus écroui par torsion.

c. Considérons maintenant, pour une torsion donnée, les cylindres élémentaires concentriques formant le cylindre total : φ est une fonction de r et de l, dont les variations en fonction de l doivent diminuer à mesure que r devient plus grand, c'est-à-dire que l'on considère une couche plus superficielle.

d. Considérons ce qui se passe aux différents points d'une courbe de première détorsion. Nous savons (*voir* Chap. VI, II, p. 443 et Chap. VII, n° **21**) que les couples produits par les couches superficielles perdent de plus en plus de leur importance, pendant la détorsion, relativement à celle des couches intérieures. Donc, la loi de variation des couples en fonction de l'allongement doit devenir de plus en plus rapide, à mesure que le couple initial est plus petit. C'est tout le contraire qui se produit.

e. Détordons jusqu'au couple nul (Chap. VII, n° **21**, *fig.* 12). Le couple n'est pas nul dans tous les cylindres élémentaires. Appelons r_1 la longueur OP. Nous avons

$$2\pi\int_0^{R} r^2 f_0\,dr = 2\pi\int_0^{r_1} + 2\pi\int_{r_1}^{R} = 0.$$

Les deux dernières intégrales ne sont pas nulles séparément, mais égales et de signe contraire. Si nous admettons que le phénomène est dû seulement à une diminution de f, un couple n'apparaît que parce que les deux intégrales ne varient pas de la même manière quand l'allongement croît. Mais il est évident que le couple maximum que l'on peut obtenir est inférieur à l'une ou l'autre de ces intégrales. Dans l'hypothèse de J. Thomson, elles sont inférieures à 0,106 du couple au moment de la détorsion (Chap. VI, p. 448) et les phénomènes s'écartent de cette hypothèse dans un sens qui diminue cette limite supérieure. En définitive, dans l'hypothèse que nous discutons, nous devons obtenir comme couple maximum, pendant l'allongement à partir d'un couple initial nul, un couple qui est certainement inférieur à un dixième du couple obtenu au bout de la torsion. Or, nous avons trouvé (n° **28** et **31**) des rapports $\frac{C_m}{C_0}$ qui sont largement supérieurs à 0,1, dans des conditions où, suivant toute probabilité (*voir* Chap. VII, n° **19**, p. 1225, et Chap. VI, p. 448), ils seraient même inférieurs à 0,055.

L'hypothèse ici discutée se trouve donc définiment écartée; au moins comme cause unique des phénomènes.

Deux hypothèses complémentaires se présentent immédiatement à l'esprit, dont le caractère fondamental est d'expliquer la naissance de couples.

La première consiste à invoquer les variations de réactivité en fonction des variations de la tension. Quelles que puissent être d'ailleurs les causes de ces phénomènes, il n'en est pas moins certain qu'ils font apparaître des forces qui n'existaient pas au début. Les phénomènes doivent être singulièrement compliqués (*voir* n° **17**).

La seconde consiste à invoquer des dissymétries provoquées par la torsion, et qui, sous l'influence d'une traction, feraient naître des couples. Nous avons un exemple de phénomènes analogues dans le cas de l'élasticité parfaite; lorsque nous tirons sur un ressort à boudin, des couples apparaissent. Si même nous

fixons une des extrémités du ressort et que la traction exercée sur l'autre extrémité, supposée libre, soit suffisante pour produire une déformation permanente, nous obtenons une détorsion permanente, phénomène absolument analogue à ceux des fils étirés, et des fils recuits avant l'inversion de la détorsion. Peut-être l'étude systématique de ces phénomènes conduirait-elle à d'intéressantes comparaisons.

Nous ne chercherons pas à aller plus loin pour le moment, l'expérience nous ayant démontré qu'il est préférable de faire le tour des phénomènes que présentent les fils, avant d'essayer une théorie.

NOTE SUR LE DYNAMOMÈTRE EMPLOYÉ DANS CE MÉMOIRE (*fig.* 6).

Cherchons l'influence de l'adjonction des fils *aa* (*fig.* 6). Nous admettons qu'ils sont au contact du spiral. Soit L leur longueur; c'est la longueur verticale du spiral dans la position d'équilibre; soit r le rayon du spiral. Pendant la torsion, le fil s'enroule sur le spiral et forme une hélice de rayon r et dont le nombre de tours est n. Développée, cette hélice devient un triangle rectangle d'hypoténuse L, de hauteur l, de base $2\pi nr$: et nous avons

$$L^2 = l^2 + 4\pi^2 n^2 r^2.$$

Pour une torsion $d\theta = 2\pi\, dn$, le poids P supporté s'élève de dl. On a

$$P\, dl = C . 2\pi\, dn,$$

où C est le couple nécessaire pour maintenir l'équilibre. D'où

$$-C = P \frac{2\pi n r^2}{\sqrt{L^2 - 4\pi^2 n^2 r^2}} = \frac{P r^2 \theta}{\sqrt{L^2 - r^2\theta^2}};$$

θ ne peut dépasser une valeur telle que

$$L = 4\pi n r, \qquad C = \infty.$$

Si n est petit, nous retrouvons, aux infiniment petits du troisième ordre près, la formule ordinaire du bifilaire. Avec la disposition actuelle, l'appareil peut servir, si θ dépasse π ou même plusieurs fois π. Par exemple, soit

$$L = 50^{cm}, \qquad r = 1^{cm},5, \qquad n = 1,$$

on a

$$\sqrt{L^2 - r^2\theta^2} = 51.$$

La proportionnalité est encore conservée à $\frac{1}{50}$ près. Il n'y a pas à craindre de frottement entre les fils et le spiral, car ce sont les mêmes points qui sont toujours au contact pendant la torsion. Le bifilaire n'intervient jamais que pour une faible partie du couple.

La théorie complète de l'appareil est très compliquée, parce qu'on ne peut pas tordre un spiral, sans qu'il se produise des forces suivant l'axe, forces qui tendent à l'allonger ou à le raccourcir et qui, dans la disposition actuelle où la longueur est réglée par les fils, tendent à modifier le poids. Mais ces effets n'interviennent que comme corrections insignifiantes.

NOTE SUR LES COURBES SCHÉMATIQUES INDIQUÉES AUX Nos 10, 11 ET 12.

Soient α l'azimut et P la charge variable : pour simplifier l'écriture, nous admettons qu'elle varie entre ± 1. Nous avons alors

$$t = a \arcsin P,$$

la période du cycle est $2\pi a$.

Nous supposons dans le n° 10 que α dépend de trois termes.

Le premier bt indique une vitesse constante vers le haut, ce qui est exact si l'expérience ne dure pas trop longtemps : c'est la réactivité proprement dite. Le deuxième représente la partie de α, fonction déterminée de P; on peut la représenter approximativement par $\pm KP$; on remplace un morceau de la courbe (*fig.* 8) par une droite. Avec le signe +, on est à gauche de P_m; avec le signe —, on est à droite. L'incertitude porte sur le troisième terme qui doit donner une importance plus particulière à la réactivité pour les grandes ou les petites charges, suivant les cas. On ne peut songer à ajouter un terme du premier degré en P, car on ne retrouverait pas les quatre cas expérimentaux. Adjoignons un terme en P^2. Il vient en définitive comme schème :

$$\textit{Cas } A : \quad \alpha = C \arcsin P + KP + K_1 P^2,$$
$$\textit{Cas } B : \quad \alpha = C \arcsin P + KP + K_1(1 - P)^2,$$
$$\textit{Cas } C : \quad \alpha = C \arcsin P - KP + K_1 P^2,$$
$$\textit{Cas } D : \quad \alpha = C \arcsin P - KP + K_1(1 - P)^2.$$

C'est un schème grossier assurément, mais qui fixe l'esprit.

Supposons, au contraire, que la réactivité ne dépende pas de la charge, mais qu'il y ait hystérésis (n° 12).

Posons

$$P = \sin \omega t,$$

nous aurons comme schème :

$$\left(K_2 > 0,\ 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\left.\begin{array}{lll} \textit{Cas a :} & \alpha = & bt + K_2 \sin(\omega t - \varphi) \\ \textit{Cas c :} & \alpha = + & bt - K_2 \sin(\omega t + \varphi) \end{array}\right\} \text{ boucle à droite,}$$

$$\left.\begin{array}{lll} \textit{Cas b :} & \alpha = & bt + K_2 \sin(\omega t + \varphi) \\ \textit{Cas d :} & \alpha = & bt - K_2 \sin(\omega t - \varphi) \end{array}\right\} \text{ boucle à gauche.}$$

Ainsi, même avec toutes les hypothèses simplificatrices, nous arrivons à cette conclusion que les courbes réelles ne peuvent être représentées que *par une forme plus compliquée* que la suivante :

$$\alpha = bt \pm AP \pm BP^2 \pm K_2 \sin(\omega t \pm \varphi).$$

Ce serait à désespérer du problème, *si nous ne pouvions pas faire la part de chacun des termes, en augmenter ou en diminuer à notre gré l'influence, leur assigner des causes différentes, en un mot ne pas les considérer comme des variables purement mathématiques.*

NOTE SUR LE CHAPITRE III DE LA THÈSE DE M. MARCHIS SUR LES MODIFICATIONS PERMANENTES DU VERRE.

Je ne discute pas les résultats *bruts* des expériences de M. Marchis; je veux prouver, par la discussion du Chapitre III de sa Thèse (p. 67 à 102), que ses conclusions les dépassent infiniment, et montrer à quelles erreurs je me serais exposé, si j'avais utilisé son mode de raisonnement. Dans son Mémoire, en effet, comme dans les n°s 1 à 8 du présent Travail, il s'agit de phénomènes que l'on peut considérer comme fonction du temps envisagé comme variable indépendante. M. Marchis combat cette hypothèse.

Le Chapitre III se résume en deux propositions. La première, de l'aveu même de l'auteur, n'apprend rien de nouveau. On porte régulièrement un thermomètre à T_0, à T_1, à T_0, ...; le zéro se déplace d'une quantité qui, pour chaque oscillation de température, diminue à mesure que le nombre des oscillations augmente.

La seconde contredit une affirmation de M. S. Young. Un thermomètre, maintenu longtemps à T_0, est porté à T_1. Si la température T_1 est constante, le déplacement du zéro, dans le même temps, est plus petit, toutes choses égales d'ailleurs, que si la température oscille un certain nombre de fois, pendant ce temps, entre T_1 et $T'_1 < T_1$.

Ne pouvant obtenir des thermomètres identiques entre eux, M. Marchis croise ses expériences. *Et là-dessus MM. Duhem et Marchis inventent la méthode qui consiste à croiser des expériences.* Cette méthode est vieille comme le monde; ils ne l'ont même pas appliquée les premiers à des phénomènes variables ou analogues au déplacement du zéro. J'en avais systématiquement fait l'emploi dans un travail sur la Photographie et tout le long de ma Thèse sur les déformations permanentes.

Voici comment je la présentais; c'est identiquement, aux symboles près, ce que dit M. Duhem. Je ne songe pas à en réclamer la priorité. Ce sont là des notions qu'on peut considérer dans le domaine public. Soit un phénomène exprimé en fonction d'une variable, le temps pour préciser, par des nombres a_1, a_2, a_3, ..., positifs, obtenus au bout des temps τ, 2τ, 3τ, ... Dans les intervalles impairs, on impose les conditions I; dans les intervalles pairs, les conditions II. La série a_1, a_2, ... n'est généralement pas régulière. Mais, si $a_1+\varepsilon$, $a_2-\varepsilon_2$, $a_3+\varepsilon_3$, $a_4-\varepsilon_4$, ..., où les ε sont positifs, est régulière, nous dirons que les conditions II favorisent le phénomène. Cela n'implique rien sur la forme de la courbe $a_1+\varepsilon_1, \tau$; $a_2-\varepsilon_2, 2\tau$; etc.

Si cette courbe est assimilable à une droite descendante *peu inclinée*, a_2 peut être plus grand que a_1; si c'est une droite *très inclinée*, on peut avoir $a_2 < a_1$. Dans tous les cas, on a $a_2 > a_3$.

Plus généralement, faisons passer deux courbes par a_1, a_3, a_5, ... et a_2, a_4, a_6, ...; quelle que soit la forme des courbes, nous verrons immédiatement quelles conditions favorisent le phénomène.

On trouvera des applications sous la première forme dans notre Thèse, § XV; sous la seconde, § XLVIII et suivants. Tout un Mémoire sur la Photométrie photographique est une application de cette méthode (*Ann. de Toulouse,* 1894).

Si j'excepte maintenant quelques pages où M. Marchis *admet* cette proposition : que si l'on chauffe un thermomètre à température constante alternativement 10^m et 45^m, il y a des oscillations accidentelles pendant le séjour de 45^m, qui ne se produisent pas pendant le séjour de 10^m, *ce qui est précisément la chose à démontrer et l'objet même du litige,* j'ai dit ce que renferment les 34 pages du Chapitre en fait d'expériences.

La seule conclusion à tirer de ces expériences est renfermée dans les énoncés mêmes que nous avons reproduits. Le déplacement se fait à ce que tout le monde appelle *température constante;* il se fait encore plus vite, selon M. Marchis, si la température oscille entre T_1 et $T'_1 < T_1$, qu'il ne se fait à T_1. Nous n'avons rien à objecter.

M. Marchis conclut : « Toutefois, la théorie plus simple qui rejette toute influence du temps de chauffe pour n'invoquer que les petites oscillations de température de l'étuve, suffisant, *comme nous l'avons vu,* à rendre compte de toutes

les particularités de l'expérience, nous nous en tiendrons à cette théorie...; il serait illogique de l'abandonner tant qu'elle devra être suffisante. » Malheureusement, nous n'avons rien vu; ce que nous aurions voulu voir, je vais essayer de le montrer.

Je dis d'abord que nous pouvons obtenir, à l'approximation que nous voulons, une température constante et en particulier la température o°. Que nous puissions l'obtenir constante *en moyenne,* cela ne fait pas contestation : il faut qu'elle soit *rigoureusement* constante. Or, maintenons constante *en moyenne* la température de la surface d'un corps mauvais conducteur; il existe, à l'intérieur, une température de plus en plus rigoureusement constante, à mesure qu'on s'enfonce dans le corps. Plaçons donc un thermomètre dans un vase contenant une centaine de litres de pétrole, entouré d'une enceinte pleine de glace fondante bien pure; nous n'aurons plus d'oscillations de température. A tout le moins, *nous donnant une limite supérieure de leurs amplitudes à la surface, nous pourrons calculer rigoureusement l'amplitude maxima possible à l'intérieur.* Je ne songe pas apprendre à M. Duhem la théorie de la conductibilité; je m'étonne qu'il ne s'en serve pas.

Si l'on craint des trépidations mécaniques, on emploiera les moyens qui les empêchent de se transmettre. Si l'on redoute les variations magnétiques ou électriques, on montrera d'abord la légitimité de ces craintes. En tous cas, au lieu d'affirmer, on prouvera par des expériences la non-gratuité des hypothèses. Tout cela est en lacune dans le travail de M. Marchis. Aussi bien, pour savoir ce qu'il y avait à faire dans le cas des thermomètres, il suffit de lire ce que j'ai fait pour les phénomènes étudiés dans ce Chapitre (n°s 1 à 8). Si l'on prétend que le problème était plus facile pour le cas actuel, les phénomènes étant plus gros et plus facilement observables, je répondrai qu'un travail fait est toujours plus facile qu'un travail à faire.

Voici une conséquence nécessaire de la Thèse de M. Marchis : Si les modifications dépendent seulement des oscillations de température, il est impossible qu'une masse de verre reste homogène, car les oscillations se transmettent mal ou pas du tout. Un bloc de verre sphérique devrait aboutir à une structure où les couches concentriques seraient inégalement transformées. Il ne serait pas impossible d'étudier le fait expérimentalement : je ne préjuge pas du résultat; encore une fois je ne discute pas la vérité ou la fausseté des hypothèses *pour le verre,* mais la valeur des arguments.

NOTE SUR LES CYCLES LIMITES, CYCLES LIMITES DES LIMITES, ... DE LA THÉOIRE DE M. DUHEM.

A propos de la Thèse de M. Lenoble et de celle de M. Chevallier.

Je ne sais si M. Lenoble considère comme exacte la théorie de M. Duhem : mais il est sûr que ses expériences sont incorrectes et qu'il ignore l'état de la question. Les opérations auxquelles le fil est soumis ne sont pas définies; l'état du fil employé totalement inconnu. Quant aux résultats, je vais citer un exemple pour qu'on ne m'accuse pas d'une sévérité excessive.

M. Lenoble veut démontrer que des oscillations de traction produisent sur l'allongement plus d'effet qu'une traction continue (p. 26 et 27). Voici les allongements par minute mesurant ces effets sous charge constante, puis sous charge périodiquement variable :

18 avril 1890..... 20, 60, 49, 39, 60 17, 39, 38, —1, 55
24 avril 1890..... 18, 25, 22, 47, 27 23, 44, 19, 45, 47, 1, —35, 79

M. Lenoble conclut « qu'à partir du moment où nous produisons le déréglage systématique, le fil s'allonge plus fortement que si ce déréglage n'était pas effectué ». Dans la première expérience, entre les minutes 18 et 20, l'allongement est $39 + 60 = 99$; entre les minutes 20 et 22, l'allongement est $17 + 39 = 56$; *c'est à partir de la vingtième minute que le déréglage commence.* M. Lenoble pose donc

$$99 < 56.$$

De même,

$$47 + 27 = 74, \qquad 23 + 44 = 67;$$

donc

$$74 < 67.$$

Comme régularité d'expériences, le lecteur peut juger

$$47, \quad 1, \quad -35, \quad 79!$$

Le reste du travail ressemble au commencement.

Nous craignons que M. Duhem et ses élèves, MM. Lenoble et Chevallier ne s'abusent sur la nouveauté de quelques unes de leurs propositions. Cherchons ce que cachent les noms de *cycles limites* et *cycles limites des limites*.

Si l'on répète, dans un plan quelconque, avec une variable et une fonction quelconques, des parcours entre deux valeurs de la variable, ils finissent par se fixer. En Allemagne, on dit, depuis 40 ans, que la matière s'accommode.

M. Duhem appelle *cycle limite* le parcours fixé : cela ne rajeunit pas une proposition archiconnue.

Si l'on allonge un fil, on modifie son état; le fil *s'écrouit;* qu'on appelle *variable chimique à hystérésis* une variable mesurant numériquement le phénomène : 1° ce n'est peut-être pas légitime pour bien des raisons; 2° cela ne nous donne en rien le moyen de déterminer les valeurs numériques de cette variable. En définitive, c'est un mot de plus. Enfin, si l'on fixe un parcours entre les charges P_0 et P_1, puisqu'on impose la charge P_2 plus grande, *l'écrouissage s'étant modifié,* quand on revient au cycle primitif on ne retrouve pas le même parcours limite. Comme on sait, de plus, que l'effet total de la charge P_2 ne se fait pas instantanément, si l'on recommence un certain nombre de fois, on obtient entre P_0 et P_1 une série de cycles limites ou de parcours fixés, qui tendent vers un dernier parcours. M. Duhem l'appelle *limite des limites.*

Ces faits étaient connus avant que M. Duhem ne s'occupât de la question; rien en eux ne peut servir à confirmer ou à réfuter une théorie, à moins que cette théorie ne soit *a priori* systématiquement opposée aux phénomènes.

Je n'ai pas attendu M. Lenoble pour prouver, d'ailleurs après d'autres physiciens, que l'écrouissage dépend de la durée de la charge P_2 et réfuter quelques erreurs grossières, telles, par exemple, que le recuit spontané. Quant à l'action de la température dont M. Chevallier s'occupe, l'école de M. Duhem est la seule qui ne fasse pas intervenir le temps dans le recuit. Tous les phénomènes de limites, et limites des limites, si magnifiquement annoncés, ne sont que l'expression de ce fait très vulgaire qu'un fil ne se recuit pas instantanément. C'est à cela que se réduit la majeure partie du travail de M. Chevallier.

Des mots nouveaux ne font pas des découvertes.

Mais, loin de confirmer la théorie de M. Duhem, la forme des cycles limites, et limites des limites, *pour toutes les transformations isothermes* (les seules dont je me sois occupé jusqu'à présent), le contredit formellement. Exposons brièvement l'état de la question.

A. On a beaucoup discuté sur la légitimité de l'application de la loi de Hooke. Mais c'est à peine si aujourd'hui la question est posée d'une manière correcte. Qu'aux déformations purement élastiques se superposent généralement d'autres déformations, c'est ce qui n'est pas douteux. Les cas sont donc très rares où les déformations sont proportionnelles aux efforts; on ne peut, cependant, rien conclure immédiatement sur le plus ou moins de légitimité de la loi de proportionnalité. Des innombrables expériences actuellement existantes, il y en a si peu d'entièrement correctes que la question est loin d'être élucidée.

B. Coulomb a énoncé une proposition d'un intérêt *pratique* considérable : *les constantes proprement élastiques conservent leur valeur, malgré les déformations permanentes.* Cette règle n'est pas rigoureuse. Par exemple, posons

$C = \Gamma \alpha$ (α est l'angle de torsion, C le couple); Γ est plus grand pour un fil de platine recuit que pour un fil étiré. La différence relative est de l'ordre de 5 pour 100, ce qui n'est pas négligeable.

C. Coulomb, mais surtout Gerstner ont énoncé une autre proposition, non moins importante au point de vue pratique : *Un corps déformé par une certaine force ou couple devient parfaitement élastique pour toutes les forces ou couples inférieurs aux précédents.* J'ai montré que cette proposition n'était que grossièrement approchée. En particulier, la courbe de détorsion n'est pas rectiligne; elle est à ce point courbe que l'on peut revenir au couple nul avec une tangente $\frac{dC}{d\alpha}$ moitié moindre que la tangente caractéristique du corps parfaitement élastique. Même loi pour la courbe de retorsion. Tandis que tous les physiciens considéraient que les constantes élastiques se déterminent correctement par diminution de charge (ce qui résulte immédiatement de la règle énoncée), j'ai prouvé que la déformation qui résulte d'une diminution d'effort dépend essentiellement du temps passé sous cet effort. Ce qui, en particulier, contredit formellement les expériences de Giulio (*Académie,* t. IV. Turin; 1842).

Il est curieux de remarquer combien ces questions de déformations permanentes ont été généralement embrouillées comme à plaisir, et par des mathématiciens illustres pour leurs découvertes dans la théorie de l'élasticité parfaite. Ainsi parlant de la loi C (Coulomb-Gerstner) (qu'au Chapitre III de mon Mémoire j'attribue inexactement à Tresca), Saint-Venant (*Leçons de Navier, historique,* p. 289) dit qu'on doit l'appeler *loi de Coulomb,* parce que celui-ci a trouvé que « l'élasticité reste entière dans le nouvel état que déterminent les torsions, flexions, ou extensions permanentes ». Or il s'agit manifestement de deux lois bien distinctes régissant : l'une, B, la valeur des constantes élastiques; l'autre, C, le champ de soi-disant *élasticité parfaite :* ces deux lois, Saint-Venant les confond. Il arrive fréquemment, par exemple, que les constantes élastiques croissent, que les métaux deviennent *plus élastiques,* alors que le champ d'élasticité à peu près parfaite décroît jusqu'à zéro : *le métal est mou comme du plomb.* C'est précisément ce qui se passe pour du platine étiré que l'on recuit. Ai-je besoin d'ajouter que les traités classiques font de toutes ces notions la plus incroyable bouillie.

Ces lois ne sont donc que de grossières approximations. Cependant, elles nous amènent à la notion fondamentale d'une séparation possible entre les phénomènes qu'elles régissent et que nous pouvons appeler, sans que cela nous engage en rien, *élasticité et cohésion.*

D. J'ai énoncé que l'on pouvait faire apparaître les constantes purement élastiques en un point quelconque du plan de déformation (par exemple des plans torsion-couple, flexion-couple, allongement-force) par la répétition d'un *petit cycle* autour de ce point. Il est facile de constater que l'idée que j'ai émise

diffère entièrement des lois précédentes. Le fil, par exemple, n'est pas parfaitement élastique, tant s'en faut, pour une détorsion; mais maintenons-le sur un petit cycle, placé où l'on voudra; répétons un petit parcours : il devient parfaitement élastique pour une torsion ou une détorsion. Nous arrivons à séparer de plus en plus les phénomènes d'élasticité parfaite de tout ce qui les noie généralement.

Le fil n'est pas devenu, pour cela, parfaitement élastique pour des forces ou couples moindres; la courbe de détorsion ne s'écartera pas sensiblement moins de la forme rectiligne.

La loi D s'accommode tout aussi bien de la vérité ou de la fausseté des lois A et B.

En particulier, si ces lois sont exactes, nous obtiendrons pour le petit cycle parfaitement élastique une inclinaison invariable, quel que soit l'effort actuel (A), quelles que soient les *grandes* déformations *antérieures* (B).

Il semblerait, par exemple, d'après de nombreuses expériences auxquelles il ne manque généralement que de signifier quelque chose, que la loi de Hooke (A) ne soit pas vérifiée pour la traction. Effectivement, figurons dans un plan les charges Ξ en ordonnées et les allongements x en abscisses, nous avons trouvé nous-même que l'inclinaison des petits cycles fixés croît, quand la charge moyenne du cycle croît (*voir* Chapitre I, p. 184). Nous avons cherché à prouver que le phénomène était dû à des causes accessoires; la loi D s'accommode aussi bien de l'une ou l'autre interprétation.

Nous savons que, contrairement à la loi B, le recuit modifie les constantes élastiques : nous trouverons pour les petits cycles fixés une inclinaison, caractérisque à chaque instant des propriétés purement élastiques, fonction, par conséquent, des *grandes* déformations antérieures. On se rappellera, pour comprendre ce qui suit, que les modifications produites par ces déformations sont indestructibles, tant que la température reste constante. En définitive : 1° si nous admettons les règles A, B, D, dans *tout* le plan, tout petit cycle fixé a une inclinaison invariable, ou à peu près telle : *elle ne dépend, par conséquent, ni de Ξ ni de x.*

2° N'admettons plus les règles A et B. Portons en abscisses la variable géométrique x (torsion, par exemple) et en ordonnées la variable mécanique Ξ (le couple). Dans *toute* portion de plan pas trop grande et déjà parcourue, l'inclinaison du tout petit cycle fixé est une fonction de Ξ, *mais ne dépend pas de x.*

Voici ce qu'on trouve dès mes premiers Mémoires sur ces questions. [En particulier, *voir* ma Thèse, p. 17, et mon travail paru dans les *Annales de Toulouse* (*Exposé et discussion des principales expériences de torsion*)]. Il va de soi que tout cela infirme absolument les idées de M. Duhem.

Voici comment M. Duhem interprète mes idées : Quatrième Mémoire, *Sur les déformations permanentes,* p. 26 : « Une valeur donnée de x correspond à

un état naturel bien déterminé du système, soit Ξ la valeur de l'action correspondante; au point (x, Ξ), la tangente à la ligne ascendante et la tangente à la ligne descendante (*voir* notre Chapitre V, p. 56) ont un même coefficient angulaire, fonction bien déterminé de x et de T (température), $\alpha(x, T)$. M. Bouasse introduit dans ses recherches une quantité qu'il désigne par $\Gamma(x, T)$ et nomme *quantité caractéristique;* à la définition qu'il en donne on reconnaît sans peine que $\Gamma(x, T) = \frac{1}{\alpha(x, T)}$. Or il résulte des expériences de M. Bouasse que, si les deux actions X_0 et X_1 (couples limites du cycle) ont agi pendant un temps considérable, la tangente en N_0 (un des bouts du cycle) à la ligne descendante N_0A (un des côtés du cycle) et la tangente en N_1 à la ligne N_1A (l'autre côté du cycle) ont respectivement pour coefficient angulaire $\frac{1}{\Gamma(x_0, T)}, \frac{1}{\Gamma(x_1, T)}$. »

M. Duhem n'a pas ouvert mon Mémoire ou ne m'a pas compris. J'aurais trouvé naturel que M. Duhem discutât mes résultats. S'il est possible de fixer un petit cycle, n'importe où dans le plan, avec une approximation quasiment indéfinie, il faut que la ligne des états naturels de M. Duhem passe par tous les points de ce plan, ce qui est absurde. Aussi M. Duhem veut-il absolument que les cycles se fixent toujours sur son introuvable ligne, et que la constante Γ, qui est simplement la constante purement élastique, coïncide avec le coefficient angulaire de sa tangente.

M. Duhem redoute par-dessus tout de reconnaître que mes idées diffèrent de celles de Wiedemann et de Cantone. Au lieu de me citer tout de travers, il aurait mieux fait d'utiliser la bonne volonté de ses élèves à des vérifications précises. C'était un intéressant sujet de thèse que rechercher, par des méthodes correctes, toutes différentes par conséquent de celles de M. Lenoble, la distribution des petits cycles limites dans le plan allongement-charge.

Quant à la Thèse de M. Chevallier, elle se réduit à nous apprendre que le recuit n'est pas instantané. On y trouve, cependant, des traits amusants. Nous avons vu plus haut M. Duhem découvrant la méthode des expériences croisées; M. Chevallier nous le montre inventant la méthode des oscillations de température. Que va dire M. S. Young dont les expériences à température oscillante ont suggéré à M. Marchis l'idée des siennes? Que M. Duhem s'en prenne à lui si nous n'admettons pas ses titres de priorité : il nous a rendu difficile sur de pareils sujets.

On trouvera des résumés des travaux de MM. Chevalier et Lenoble dans le *Journal de Physique*.

NOTE SUR LES LIMITES D'ÉLASTICITÉ, LA CHARGE DE RUPTURE ET UNE LOI DE SUPERPOSITION.

A propos de deux Mémoires de M. Coloman de Szily.

[*Résistivité et torsion* (*Journ. de Phys.*, 3e série, t. VIII, p. 329). — *Essais à la traction de cylindres creux soumis à des pressions intérieures*, Budapest, 1901.] *Comparer* ce qui suit avec l'analyse de M. Bouty (*Journ. de Phys.*, 1902).

Le Mémoire de M. de Szily sur les essais à la traction renferme une première partie où l'auteur s'efforce de démontrer l'exactitude de la théorie de l'élasticité; je n'en parlerai pas. Je constate seulement, en passant, qu'après tout ce qui a été fait depuis 70 ans sur cette théorie, il faudrait des expériences bien probantes pour la faire rejeter. Celles de M. de Szily la confirment : tant mieux. Mais je crains que, si elles l'eussent infirmée, il en eût été ni plus, ni moins. Je ne veux pas dire du mal des machines industrielles : tout de même, on possède des techniques plus précises que celles utilisées dans ce Mémoire.

J'arrive à la seconde partie où sont étudiées certaines déformations permanentes. Il s'agit de cylindres creux allongés par traction, supportant ou non des pressions uniformes intérieures. Je laisse de côté tout ce qui a trait à la limite d'élasticité, au commencement des grands allongements et à la charge de rupture. Depuis bientôt 10 ans que j'étudie les déformations permanentes, je ne suis pas parvenu à comprendre ce qu'est la limite d'élasticité. Les courbes de traction et de torsion sont continues et ne présentent jamais de points anguleux. Ce sont, si l'on veut, des droites pour de petites déformations; puis insensiblement elles deviennent plus ou moins paraboliques. Dire à quel moment elles cessent d'être droites est un problème à peu près aussi bien posé que celui qui consisterait à dire à quel moment une tangente se sépare de sa courbe. C'est une affaire d'appréciation qui n'a rien de scientifique. La notion de limite d'élasticité peut intéresser les ingénieurs, sans avoir de valeur aux yeux des physiciens.

Si j'ignore ce qu'est une limite d'élasticité, j'ignore bien davantage ce que peut être le commencement des grands allongements. Il n'y a pas de raison pour ne pas continuer dans cette voie et ne pas parler de moyens allongements, de très grands allongements. Cette seconde limite a encore moins de sens que la première.

Quant aux charges de rupture, elles n'ont guère d'intérêt scientifique. La *manière* dont se fait la rupture a certainement une importance scientifique capitale; mais la moindre hétérogénéité modifie considérablement *la charge* de rupture; de sorte que des fils ayant présenté des phénomènes identiques de déformation peuvent rompre sous des charges les plus diverses.

Tout ceci éliminé, il ne reste du Mémoire que la comparaison des courbes de

traction pour des cylindres creux supportant, ou ne supportant pas de pressions intérieures. Voici les résultats.

Soient f_i l'aire de la section interne du tube creux, f l'aire de la section annulaire du tube. Soit p la pression en atmosphères; la pression en kilogrammes par millimètre carré est $0{,}01p$ environ. Elle s'exerce sur le fond du vase, donne une force $0{,}01pf_i$, qui se transmet au tube pour produire une traction de $\frac{0{,}01pf_i}{f}$ en kilogrammes par millimètre carré. La traction extérieure étant P, la traction totale est $\frac{P + 0{,}01pf_i}{f}$.

Soit, par exemple, $f_i = 531$, $f = 181$, $p = 200$; la traction est $5^{kg},9$ par millimètre carré. La charge de rupture pour la matière utilisée est de l'ordre de 40^{kg} par millimètre carré.

Ceci posé, je lis page 38 : « Si l'on construit les diagrammes de l'essai de traction, on constate que les diagrammes dessinés avec les tensions P, dans les essais avec pression intérieure, coïncident avec les diagrammes des essais ordinaires [sans pression]; la marche de l'expérience est indépendante de la pression intérieure. » Pour juger la valeur de cette affirmation, je transcris les nombres. Il y a deux expériences sans pression; je donne la moyenne des résultats; je fais de même pour les deux expériences avec pression. P_1 est la charge brute en tonnes; il faut diviser par 181 pour avoir la charge P en kilogrammes par millimètre carré; Δl est l'allongement en centimètres de l'éprouvette dont la longueur utile initiale est 15^{cm}. La charge brute qui résulte de la pression de 200^{atm} est environ $1^t,06$.

P_1.	$4^t,5$.	5^t.	$5^t,5$.	6^t.	$6^t,5$.	7^t.
I. Sans pression....	$\Delta l = 0^c,08$	$0^c,22$	$0^c,36$	$0^c,59$	$0^c,91$	$1^c,50$
II. Avec pression...	0,18	0,28	0,45	0,72	1,10	1,83
Différences.........	0,10	0,06	0,09	0,13	0,19	0,33
Différences relatives.	»	24 %	22 %	20 %	19 %	20 %

On nous donne comme identiques des nombres qui diffèrent de 20 *pour* 100 *les uns des autres*. Prenons les Δl en abscisses, les P en ordonnées : évidemment la courbe I est au-dessus de la courbe II. Portons au contraire $P + 5{,}9$ (c'est-à-dire les tractions réelles) en ordonnées pour la courbe II, la courbe I est au-dessous de la nouvelle courbe II. En définitive, les courbes construites avec les tractions réelles montrent que le cylindre, pressé intérieurement, s'allonge moins, pour une même traction réelle, que celui qui ne l'est pas. On peut dire que la pression intérieure augmente l'écrouissage pour un même allongement. Voilà longtemps que je répète que l'écrouissage dépend, non seulement de la déformation, mais des forces sous lesquelles elle est produite. J'ai prouvé en particulier qu'un même allongement effectué avec ou sans filière, par conséquent avec ou

sans pression s'exerçant sur la surface extérieure, produit des modifications très différentes. Les choses se passent de même pour des pressions intérieures, d'après les expériences de M. de Szily.

Je conteste, non pas l'intérêt de ce résultat, mais la généralisation inacceptable que M. de Szily veut en faire. Après avoir admis une coïncidence, qui n'existe pas à 20 pour 100 près, il en déduit une loi de superposition qui n'a malheureusement aucun sens et qu'il me paraît inutile de discuter. Sachons donc proportionner nos conclusions à l'ampleur de nos expériences. Quatre essais prouvent qu'une pression intérieure relève la courbe de traction : ayons le bon sens de n'en pas tirer une théorie générale des déformations permanentes.

M. de Szily ne s'en tient pas là : il énonce « une seconde conclusion d'importance capitale : ce n'est pas la tension maximum, mais la dilatation maximum qui est le principal facteur dans la destruction du matériel ». *Ce n'est ni l'une ni l'autre : tout intervient.* Ces discussions sont oiseuses : je laisserai les ingénieurs épiloguer tout à leur gré sur des propositions qui n'ont même pas de signification précise.

M. de Szily a fait paraître en 1899, dans le *Journal de Physique,* un travail sur la variation de résistivité avec la torsion, qui prête à de bien graves critiques de méthode.

Il parle de limite d'élasticité : il est entendu que cela n'existe pas. « J'ai constaté, dit-il, que la résistance du fil *ramené, par des torsions inverses, à sa position initiale,* va en diminuant avec le temps.... On sait qu'en faisant subir à un fil une forte torsion et *en le laissant ensuite reprendre son état non déformé....* » M. de Szily croit-il que, quand on revient au couple nul, on laisse reprendre au fil un état non déformé? ou que, quand on ramène son extrémité inférieure à l'azimut initial, la déformation est nulle? ou qu'alors l'écrouissage est annulé? Quel que soit le sens qu'on veuille attribuer aux phrases citées, elles sont lourdes d'erreurs.

La question de la résistivité en fonction de la torsion est à peine posée dans le travail que je critique. Que se passe-t-il le long d'une courbe de torsion? le long des courbes de détorsion? Une part de l'accroissement de résistance est-elle fonction déterminée du couple actuel? Quelle est la loi de variation à couple constant? à azimut constant? Quand un fil à peu près parfaitement élastique oscille, existe-t-il une variation périodique de résistance? etc.

NOTE SUR LA COHÉSION DES LIQUIDES.

Nous savons depuis longtemps qu'on peut obtenir de l'eau à plus de 120° sous la pression atmosphérique : comme à cette température l'équilibre entre l'eau et

sa vapeur n'est possible que sous la pression de 2^{atm} environ, on peut dire que l'eau montre dans ces conditions une cohésion de 1^{atm}. (*Voir* DAGUIN, t. II, p. 369.)

Il était tout naturel de se demander ce qu'il adviendrait à basse température, par exemple au voisinage de $0°$: l'analogie amène à penser que l'eau supportera sans se volatiliser une *traction uniforme, seule genre de traction que sa nature liquide puisse tolérer*. L'expérience a été faite, voici 30 ans, par Pacinotti (*Journ. de Phys.*, 1873, t. II) et réétudiée par le même auteur (*Journ. de Phys.*, 1883, t. II). Il indique qu'à la température ordinaire on peut exercer sur de l'eau une traction uniforme de près de 30^{cm} de mercure.

Voici donc un premier aspect de la question, *la possibilité des tractions uniformes considérée comme une extension des retards d'ébullition.*

En voici un second, non moins classique, qui nous amène à définir l'attraction par centimètre carré à travers un plan entre les masses, situées de part et d'autre de ce plan, d'un liquide indéfini. On reconnaît à cette définition la pression moléculaire de Laplace, la fameuse intégrale K, qui revient d'ailleurs à chaque page dans le Mémoire classique de Van der Waals. Évidemment cette grandeur est une limite supérieure de l'effort à effectuer pour partager un liquide normalement à un plan; c'est donc, depuis Laplace, une limite supérieure de la cohésion. Il peut se faire d'ailleurs que l'équilibre devienne instable pour des tensions uniformes moindres; en tous cas, il est intéressant de connaître quel est son ordre de grandeur. Tout le monde sait, sans avoir lu Laplace et parce que ça se trouve dans les traités classiques, que l'intégrale K est de l'ordre du quotient $\frac{H}{\varepsilon}$ où ε est le rayon d'activité moléculaire et H la tension superficielle au facteur $\frac{1}{2}$ près.

Des considérations bien connues ont permis à Van der Waals de fixer l'ordre de grandeur de la pression intérieure. On les trouvera page 239 de la traduction française. Par exemple il indique 10700^{atm} pour l'eau.

Dès 1850, Berthelot trouve qu'on peut obtenir de l'eau sous une traction uniforme qu'on peut évaluer à plus de 100^{atm}. Et par un calcul basé simplement sur l'ordre de grandeur des quantités K et H, de Heen, dans son Traité sur la chaleur, porte à 140^{atm} cette cohésion (1894).

La question de la cohésion des liquides n'est donc pas nouvelle; et je m'étonne qu'il ne se soit pas rencontré à la Société de Physique, le 2 mai 1902, une voix pour empêcher MM. Leduc et Sacerdote de découvrir cette Amérique. Que penser de cette affirmation (*Journal de Physique*, t. I, 1902, p. 373) : « La question de la cohésion des liquides restait donc entière. Y a-t-il ou n'y a-t-il pas cohésion, et, si oui, quel est son ordre de grandeur. » Toutefois, il serait fort indifférent que ces auteurs, refaisant les expériences de Pacinotti, nous annoncent gravement que : « par un raisonnement approximatif, [ils ont] pu se rendre compte que la cohésion doit être de l'ordre de $\frac{H}{\varepsilon}$ » (ce qui est connu depuis un siècle);

malheureusement, au lieu de répéter seulement ce qui était connu, il ont énoncé une série de propositions erronées, enregistrées par le *Journal de Physique*, qu'il ne faut pas laisser passer dans l'enseignement, et qui montrent que les auteurs connaissent aussi bien les déformations des solides que celles des liquides :

« Le simple fait qu'une corde, ou tige de verre ou de métal, etc., fixée à sa partie supérieure, ne se rompt pas malgré la pesanteur, montre qu'il existe, entre les tranches consécutives du solide, des forces de réunion dites *forces de cohésion*, dont la valeur par unité de surface est supérieure à $\frac{p}{s}$, p désignant le poids de la tige et s sa section.

» De même, si l'on arrive à réaliser une colonne liquide continue fixée par sa partie supérieure, on pourra affirmer que ce liquide est doué de cohésion et que cette cohésion est supérieure à $\frac{p}{s}$, p désignant le poids de la colonne liquide et s sa section. »

Sans s'en douter, MM. Leduc et Sacerdote donnent, par cette phrase, au mot *cohésion* un sens (II) opposé au sens traditionnel pour les liquides. Quand je lis, dans leur réponse à des critiques par moi adressées, « qu'ils ont appliqué à la rupture la notion de cohésion des Traités classiques, sans se préoccuper de son origine », je conviens que cela se voit de reste.

L'expérience qu'annonce *logiquement* la phrase précédente est celle du *compte-gouttes;* nous avons bien alors une colonne liquide suspendue par sa partie supérieure. La loi de Tate nous apprend alors que tout se passe comme si la *cohésion* (dans le sens II) était nulle, que les seules forces capillaires soutiennent la goutte : son poids est proportionnel, non pas à la section, mais au diamètre. Ce qui confond, c'est de lire (*Journal de Physique,* p. 381) : « [La] grande valeur de la cohésion (sens I) des liquides a comme conséquence immédiate de faire rejeter le raisonnement classique par lequel on justifie la loi de Tate.... Nous nous proposons de revenir ultérieurement sur cette question. » J'espère, pour leur réputation, que les auteurs ne donneront pas suite à leur projet.

L'histoire de la théorie des déformations permanente des solides consiste, presque en totalité, dans l'importance relative qu'on a donnée, suivant les époques, à la cohésion envisagée dans ses deux sens I et II. Ce qui revient au même, on se demande encore comment s'opèrent les cessions de la matière : est-ce parce que la cohésion normale (sens I) devient insuffisante (théorie de Lamé et Clapeyron)? est-ce parce qu'il se produit des glissements (sens II) (théorie de Coulomb)? Insistons sur ce que dit cette dernière théorie, parce qu'étant plus générale, elle nous permettra d'exposer l'ensemble de la question.

Coulomb soutient que les déformations ne se font que par suite de glissements et, par conséquent, sous l'influence des forces tangentielles. Toutefois, par une

bizarre contradiction, il admet que s'il s'agit de traction les corps résistent tant qne la traction normale reste inférieure à une certaine limite.

Aujourd'hui on admet généralement la théorie de Coulomb, *en supprimant la restriction précédente* (*voir* mon Mémoire, *Ann. Phys.*, t. XXIII, 1901).

Les déformations se font toujours par glissement sous l'influence des forces tangentielles; elles sont empêchées par la cohésion (sens II). Donc, si la traction est uniforme, il ne peut y avoir déformation, puisqu'il n'y a pas de forces tangentielles. Toutefois, il peut alors se faire qu'une autre limite intervienne (cohésion, sens I), et que, passé une certaine traction normale, le corps solide ne puisse plus exister. Inutile de dire que l'impossibilité où nous sommes d'exercer des tractions uniformes normales suffisantes empêche toute vérification expérimentale sur les solides.

Appliquons aux liquides : la cohésion (sens II) est nulle ou quasi nulle; c'est a définition de la fluidité parfaite. Nous nous expliquons aisément l'expérience du compte-goutte.

Mais exerçons une traction uniforme normale; nous mettons en jeu la cohésion (sens I) laquelle peut avoir des valeurs considérablement grandes.

Je ne reproche pas à MM. Leduc et Sacerdote de ne pas nous apporter la solution du problème de la cohésion dans le cas des solides. Je leur reproche d'ignorer jusqu'au premier mot d'une question archiclassique.

La Note qui précède était à l'impression quand j'ai reçu les *Comptes rendus* du 15 juillet où MM. Leduc et Sacerdote reviennent sur la question du compte-goutte. Ils choisissent soigneusement leurs citations de manière à trouver l'occasion de redresser des erreurs imaginaires. Ils étaient seuls à ignorer que les gouttes se forment par étranglement; on lit dans le Traité de M. Violle, page 657 : « La goutte se gonfle... comme dans un sac élastique...; elle *s'étrangle* à sa partie supérieure; le poids n'est pas proportionnel au carré du diamètre, comme cela devrait être si chaque goutte était supportée par une force agissant sur toute la surface du cercle de gorge. » Plus explicitement encore, M. Duclaux dit (*Ann. Phys.*, t. XXI, 1870) : « La cohésion du liquide, ou, en général, toute force dépendant des surfaces en contact, n'a pas d'action sensible. »

Pour tous ceux qui ont une connaissance, même vague, de ce que l'on sait depuis longtemps sur la *cohésion* des liquides, les passages cités ont un sens net et non ambigu.

Que MM. Leduc et Sacerdote consultent l'admirable Traité de Plateau : *Sur la statique des liquides* (Gauthier-Villars, 1873; 2 volumes). Ils trouveront Tome II un Chapitre (IX, 72 pages) sur la stabilité des cylindres. Les figures de la page 209 sur le sectionnement des cylindres pleins, libres et indéfinis, ont la

plus complète analogie avec les figures rééditées par M. Guye dans un récent numéro des *Comptes rendus*. Or, *Plateau fait observer que ce sectionnement se fait de même pour les cylindres laminaires,* comme il est facile de le vérifier, d'ailleurs. Cette simple constatation suffirait pour ruiner, si besoin était, toute hypothèse concluant à l'ingérence des forces de cohésion.

Que maintenant la vitesse d'écoulement, la viscosité, etc. interviennent, et probablement aussi des phénomènes thermiques dus à l'extension de la couche superficielle, Plateau le dit, et qui songe à le nier? M. Guye a donc raison de trouver que le phénomène est imparfaitement connu dans tous ses détails : il rendra service en l'étudiant.

Il est donc acquis que MM. Leduc et Sacerdote n'ont fait qu'embrouiller une question simple.

SUR LES

FONCTIONS ENTIÈRES ET QUASI-ENTIÈRES

A CROISSANCE RÉGULIÈRE

ET

LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

(DEUXIÈME NOTE),

PAR M. EDMOND MAILLET.

I.

M. Borel a introduit [1], dans la théorie des fonctions entières d'ordre fini, la notion de fonctions à croissance régulière. Mais il n'a donné aucun critère pour reconnaître *a priori* si une fonction entière donnée par son développement taylorien est ou non à croissance régulière. De pareils critères semblent cependant indispensables au point de vue des applications. Nous nous proposons de donner ici un critère de régularité de la croissance et un d'irrégularité.

Ce critère s'étend de suite aux fonctions quasi-entières.

Il nous permet d'établir deux résultats importants dans la théorie des équations différentielles :

1° Les fonctions entières ou quasi-entières d'ordre fini, qui satisfont à une équation différentielle linéaire à coefficients rationnels en x, sont à croissance régulière;

2° Les fonctions entières d'ordre fini augmentées ou non d'un polynome en $\frac{1}{x}$,

---

[1] *Leçons sur les fonctions entières*, p. 107. La lecture de notre Mémoire exige seulement la connaissance du Cours d'Analyse de l'École Polytechnique, des *Leçons sur les fonctions entières* de M. Borel, et de notre Mémoire *Sur les fonctions entières et quasi-entières* (*J. de Math.*, 1902).

les fonctions quasi-entières d'ordre fini, ayant un point singulier essentiel unique à l'origine, ne peuvent être solutions des équations différentielles $F = 0$ rationnelles d'ordre k, quand F ne renferme qu'un terme en $y, y', \ldots,$ ou $y^{(k)}$, que si elles sont à croissance régulière.

Nous indiquons finalement une application de ce qui précède à certaines équations différentielles linéaires dont les intégrales sont régulières au sens de Fuchs.

II.

Soit une fonction entière

$$(\alpha) \qquad \varphi(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m + \ldots$$

d'ordre ρ fini. Nous savons que l'on a toujours

$$(\beta) \qquad \sqrt[m]{a_m} < \frac{1}{m^{\frac{1}{\rho} - \varepsilon}},$$

et, pour une infinité de valeurs de m,

$$(\gamma) \qquad \sqrt[m]{a_m} > \frac{1}{m^{\frac{1}{\rho} + \varepsilon}}$$

(ε aussi petit qu'on veut quand m est assez grand), les autres expressions $\sqrt[p]{a_p}$ ayant une valeur plus petite. Ceci a lieu pour toutes les fonctions entières d'ordre ρ, qu'elles soient ou non à croissance régulière. Il est intéressant de chercher à voir dans quelle limite la loi de répartition des coefficients a_m, qui satisfont à (γ), influe sur la régularité de la croissance de la fonction, par suite, d'après les définitions et les théorèmes de M. Borel, sur la régularité de la répartition des racines, de façon à savoir reconnaître à la seule inspection des coefficients, au moins dans des cas étendus, si la fonction est à croissance régulière ou non.

Considérons une fonction entière

$$(1) \qquad \varphi(x) = \sum a_m x^m.$$

Nous supposons que cette fonction soit d'ordre ρ, et, qu'à partir d'un certain terme on puisse toujours en trouver un au moins sur θ consécutifs (θ fonction de m) qui soit de la forme

$$(2) \qquad \frac{1}{a_m} = m^{pm},$$

$p = \frac{1}{\rho} + \varepsilon$, ε tendant vers 0 avec $\frac{1}{m}$.

Supposons encore que, pour les coefficients d'indice $m-1, \ldots, m-\theta_1+1$, $m+1, \ldots, m+\theta_2-1$ (θ_1, θ_2 positifs $\geqq 1$), les coefficients soient de la forme

$$\frac{1}{a_{m_1}} = m_1^{q m_1} \tag{3}$$

avec

$$q = \frac{1}{\sigma} + \varepsilon,$$

$$\sigma = \rho - \eta,$$

$$q = p + \zeta,$$

η, ζ finis, limités inférieurement quel que soit m ; au contraire, nous supposerons que les coefficients d'indice $m-\theta_1$, $m+\theta_2$ soient de la forme (2).

Nous savons qu'il y a une infinité de valeurs de x pour lesquelles

$$|\varphi(x)| \geqq e^{|x|^{\left(\frac{1}{\rho}+\varepsilon\right)}},$$

ε tendant vers o quand x croît indéfiniment.

Nous considérerons d'abord tous les termes de $\varphi(x)$ pour lesquels (3) a lieu, c'est-à-dire les termes dont l'indice n'est pas

$$\ldots, \quad m-\theta_1, \quad m, \quad m+\theta_2, \quad \ldots.$$

La somme Ψ de ces termes constitue une fonction entière d'ordre χ avec

$$q \geqq \frac{1}{\chi} + \varepsilon' = p + \zeta_2 \; (\zeta_2 \text{ fini}),$$

ε' tendant vers o quand m croît indéfiniment. On aura donc

$$|\Psi| \leqq e^{|x|^{\left(\frac{1}{\chi}+\varepsilon\right)}}.$$

Pour que Φ soit à croissance irrégulière, il faudra que les termes de $\Phi - \Psi$ ne donnent pas toujours, quel que soit $|x|$, une somme d'ordre $e^{|x|^{\rho+\varepsilon_1}}$.

Posons, pour une valeur donnée de m, p étant, par suite, parfaitement déterminé,

$$x = y^p$$

et prenons

$$y = e(m+\theta) = e(m_1+\theta') \qquad \text{avec} \qquad 0 < \theta < \theta_2, \qquad m_1 \leqq m. \tag{4}$$

On a

$$a_{m_1} x^{m_1} = a_{m_1} y^{p m_1} = \frac{1}{m_1^{q_1 m_1}} e^{p m_1} (m_1+\theta')^{p m_1}.$$

Ce terme sera plus petit que $e^{(m_1+\theta')^{\sigma_1}}$ $(\sigma_1 < 1)$ dès que

$$(5) \qquad \frac{1}{m_1^{p_1 m_1}} e^{pm_1}(m_1+\theta')^{pm_1} < e^{(m_1+\theta')^{\sigma_1}},$$

$$\chi(\theta') = (m_1+\theta')^{\sigma_1} - pm_1 \log\left(1+\frac{\theta'}{m_1}\right) - pm_1 + (p_1-p)m_1 \log m_1 > 0.$$

Nous supposons $m+\theta = m_1+\theta' \geqq m_1^{1+\zeta_1}$ (ζ_1 fixe et aussi petit qu'on veut). D'abord

$$\chi'(\theta') = \sigma_1(m_1+\theta')^{\sigma_1-1} - pm_1 \frac{\frac{1}{m_1}}{1+\frac{\theta'}{m_1}} = \frac{1}{m_1+\theta'}[\sigma_1(m_1+\theta')^{\sigma_1} - pm_1].$$

Quand $m_1+\theta' \geqq m_1^{1+\zeta_1}$, on a

$$\chi'(\theta') \geqq \frac{1}{m_1+\theta'}[\sigma_1 m_1^{(1+\zeta_1)\sigma_1} - pm_1] > 0$$

pour des valeurs de σ_1 telles que $1-\sigma_1$ soit fixe et > 0. Par conséquent (5) aura lieu pour les valeurs de $m_1+\theta' > m_1^{1+\zeta_1}$ s'il a lieu pour $m_1+\theta' = m_1^{1+\zeta_1}$; il suffira pour que (5) ait lieu

$$\chi(m_1^{1+\zeta_1} - m_1) = m_1^{(1+\zeta_1)\sigma_1} - \zeta_1 pm_1 \log m_1 - pm_1 + (p_1-p)m_1 \log m_1 > 0.$$

Il suffira de prendre $(1+\zeta_1)\sigma_1 = 1+\zeta_1'$ (ζ_1' fixe et positif, ainsi que $\zeta_1 - \zeta_1'$) pour que (5) ait lieu, dès que m_1 est suffisamment grand, par exemple dès que $m_1 > \mu$.

Dès lors la somme des modules des termes de $\Phi - \Psi$ d'indice $\leqq m$ se compose de deux parties : celles des modules des termes d'indices $\leqq \mu$ qui est $\leqq$

$$\lambda \sum_1^{\mu} [e(m_1+\theta')]^{pm_1} \leqq (m_1+\theta')^{\mu_1} \qquad (\lambda,\ \mu_1 \text{ fini});$$

celle des modules des autres termes en nombre $\leqq m$ et dont la somme est $\leqq$

$$me^{(m_1+\theta')^{\sigma_1}} = me^{(m+\theta)^{\sigma_1}} = e^{(m+\theta)^{\sigma_1'}}$$

$\sigma_1' - \sigma_1$ aussi petit qu'on veut pourvu que m soit assez grand).

Voyons maintenant les termes de $\Phi - \Psi$ d'indice $> m$. Nous poserons

$$y = e(m+\theta) = e(m_1-\theta') \qquad \text{avec} \qquad 0 < \theta < \theta_2, \qquad m_1 > m.$$

$$a_{m_1} y^{pm_1} = \frac{1}{m_1^{p_1 m_1}} e^{pm_1}(m_1-\theta')^{pm_1}.$$

Nous voulons

$$(5\ bis) \qquad e^{pm_1}\left(1-\frac{\theta'}{m_1}\right)^{pm_1} m_1^{(p-p_1)m_1} < e^{(m_1-\theta')^{\sigma_1}-m_1},$$

$$\chi(\theta') = (m_1-\theta')^{\sigma_1} - m_1 - pm_1 - pm_1 \log\left(1-\frac{\theta'}{m_1}\right) - (p-p_1)m_1 \log m_1 > 0.$$

On a

$$\chi'(\theta') = -\sigma_1(m_1-\theta')^{\sigma_1-1} - pm_1 \frac{-\dfrac{1}{m_1}}{1-\dfrac{\theta'}{m_1}} = \frac{-\sigma_1(m_1-\theta')^{\sigma_1}+pm_1}{m_1-\theta'}.$$

Prenons $m_1 - \theta' \leqq m_1^{1-\zeta_4''}$

$$(1-\zeta_4'')\sigma_1 = 1-\zeta_4'''$$

(ζ_4'' fixe et positif, ainsi que $\zeta_4''-\zeta_4'''$).

m et m_1 étant donnés, $\chi'(\theta')$ est alors positif si m_1 est assez grand; il suffira pour que (5 *bis*) ait lieu que $\chi(m_1 - m_1^{1-\zeta_4''})$ soit > 0, ou

$$m_1^{(1-\zeta_4'')\sigma_1} - m_1 - pm_1 - pm_1 \log m_1(-\zeta_4'') - (p-p_1)m_1 \log m_1 > 0,$$

ce qui a lieu, car ζ_4'' étant donné, on peut prendre m assez grand pour que $|p-p_1|$ soit aussi petit qu'on veut.

Les modules des termes de $\Phi - \Psi$ d'indices $> m$ sont alors tous plus petits que ceux de la série

$$e^{(m+\theta)^{\sigma_1}} \sum \frac{1}{e^{m_1}};$$

leur somme est $< e^{(m+\theta)^{\sigma_1}-m} \dfrac{1}{1-\dfrac{1}{e}}$.

Il en résulte que Φ est à croissance irrégulière si l'on a, dès que m est supérieur à une limite déterminée,

$$m+\theta \leqq m_1^{1-\zeta_4''},$$

$$m+\theta \geqq m^{1+\zeta_4},$$

$$m_1 \geqq m^{\frac{1+\zeta_4}{1-\zeta_4''}} = m^{1+\zeta_5}$$

(ζ_5 fixe, fini et positif).

Nous en concluons finalement le résultat suivant :

Soient $m_1, m_2, \ldots$, les valeurs de m satisfaisant à (2), rangées par ordre de grandeur croissante; si parmi elles il y a une infinité de couples de valeurs m_1, m_2 consécutives, qui sont telles que la différence de ces deux valeurs

croisse plus vite que $m_1^{1+\zeta_1} - m_1$ (ζ_1 *fini positif arbitraire*), *la fonction* $\varphi(x)$ *est à croissance irrégulière.*

Nous allons maintenant, par une méthode différente, indiquer un critère de régularité.

Soit $M(r)$ le module maximum de $\varphi(x)$ pour $r = |x|$ et

$$M(r) = e^{r^{\sigma_r}}.$$

On sait ou l'on voit facilement ([1]) que, le long d'un contour C entourant l'origine,

$$a_m = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{F(z)\,dz}{z^{m+1}},$$

et, si C est un cercle de rayon r,

$$|a_m| < \frac{M_r}{r^m} = \frac{e^{r^{\sigma_r}}}{r^m}, \tag{6}$$

avec

$$\sigma_r \leqq \rho + \varepsilon'_r \tag{7}$$

$\left(\varepsilon'_r \text{ tendant vers o avec } \frac{1}{r}\right)$.

Considérons, pour une des valeurs de m satisfaisant à (2), l'équation

$$r^{\sigma_r}\sigma_r = m. \tag{8}$$

M_r étant fonction continue de r, $r^{\sigma_r}\sigma_r$ varie d'une manière continue ainsi que σ_r avec r, et il y a toujours une valeur de r qui satisfait à cette équation, quel que soit m, puisque

$$r^{\sigma_r}\sigma_r = \log M_r\,\sigma_r$$

prend des valeurs aussi grandes qu'on veut pour des valeurs de r assez grandes.

Soit r_1 une de ces racines :

$$r_1^{\sigma_{r_1}} = \frac{m}{\sigma_{r_1}},$$

$$|a_m| = \left(\frac{1}{m^{\frac{1}{\rho}+\varepsilon}}\right)^m < \frac{e^{\frac{m}{\sigma_{r_1}}}}{\left(\frac{m}{\sigma_{r_1}}\right)^{\frac{m}{\sigma_{r_1}}}};$$

d'où

$$m^{\frac{m}{\sigma_{r_1}}} < m^{\left(\frac{1}{\rho}+\varepsilon\right)m}(e\sigma_{r_1})^{\frac{m}{\sigma_{r_1}}}.$$

([1]) BOREL, *Leçons sur les fonctions entières*, p. 62.

Prenons les logarithmes

$$\frac{m}{\sigma_{r_1}}\log m < m\left(\frac{1}{\rho}+\varepsilon\right)\log m + \frac{m}{\sigma_{r_1}}\log(e\sigma_{r_1}),$$

d'où, σ_{r_1} étant positif, puisque m l'est,

$$\frac{1}{\sigma_{r_1}} < \frac{1}{\rho}+\varepsilon,$$

$$\sigma_{r_1} \geqq \rho + \varepsilon''_{r_1},$$

ε''_{r_1} étant aussi petit qu'on veut dès que m est assez grand. D'après (7) on aura

$$\rho + \varepsilon''_{r_1} \leqq \sigma_{r_1} \leqq \rho + \varepsilon'_{r_1}. \tag{9}$$

Nous en concluons ce lemme :

Lemme. — *Si* ρ *est l'ordre d'une fonction entière d'ordre fini, on sait qu'il y a toujours une infinité de coefficients tels que, dès que* m *dépasse une limite finie*

$$\sqrt[m]{a_m} = \frac{1}{m^{\frac{1}{\rho}+\varepsilon}},$$

ε *aussi petit qu'on veut, mais fini : il y a toujours pour chacune de ces valeurs de* m *un nombre* ε_1 *qui tend vers* 0 *avec* $\frac{1}{m}$ *et tel que pour*

$$r = \left(\frac{m}{\rho+\varepsilon_1}\right)^{\frac{1}{\rho+\varepsilon_1}},$$

on ait

$$M_r = e^{r^{\rho+\varepsilon_1}}.$$

Ceci posé, soient m et $m+\theta$ deux valeurs de l'indice de a_m satisfaisant à (2) : les valeurs correspondantes de σ_r dans (8) satisfont à (9).

Considérons l'équation analogue à (8)

$$\sigma_r\, r^{\sigma_r} = \mu; \tag{10}$$

μ variant entre m et $m+\theta$, $r^{\sigma_r}\sigma_r$ varie dans les mêmes limites d'une manière continue et prend toutes les valeurs comprises entre m et $m+\theta$. Supposons que l'on puisse assigner un intervalle entre m et $m+\theta$ où $\rho-\sigma_r \geqq \zeta$ (ζ fini positif limité quels que soient μ et m dans cet intervalle), dès que m dépasse une certaine limite, c'est-à-dire que la fonction $\varphi(x)$ soit à croissance irrégulière. Supposons en particulier que ceci ait lieu pour $\mu = m+\lambda$. On devra avoir dans cet inter-

valle :

$$(11) \qquad |a_m| = \frac{1}{m^{\left(\frac{1}{\rho}+\varepsilon\right)m}} < \frac{e^{\frac{\mu}{\sigma}}}{\left(\frac{\mu}{\sigma}\right)^{\frac{m}{\sigma}}},$$

pour une valeur de σ telle que

$$\rho - \sigma \geqq \zeta.$$

On en tire

$$(12) \qquad X = \frac{m}{\sigma}(\log\mu - \log\sigma) - (m \log m)\left(\frac{1}{\rho} + \varepsilon\right) - \frac{\mu}{\sigma} < 0.$$

Pour $\mu = m$, $\rho - \sigma \geqq \zeta$, ceci n'a pas lieu dès que m est assez grand.
D'ailleurs la dérivée

$$X'_\mu = \frac{m}{\sigma\mu} - \frac{1}{\sigma}$$

est toujours négative pour $\mu > m$. X est toujours décroissante quand μ croît : il suffira que X soit négatif pour une valeur de μ pour qu'il le soit pour les valeurs plus grandes : prenons $\mu = m(\log m)^{1+\alpha}$. On a

$$\frac{m}{\sigma}[\log m - \log\sigma + (1+\alpha)\log\log m] - (m\log m)\left(\frac{1}{\rho} + \varepsilon\right) - m(\log m)^{1+\alpha} < 0,$$

dès que α positif fini aussi petit qu'on veut; au contraire, cette égalité n'a plus lieu dès que α est négatif. Elle est donc impossible si

$$\mu < m(\log m)^{1-\alpha} \qquad (\alpha \text{ positif}),$$

ou, *a fortiori*, si

$$m + \theta < m(\log m)^{1-\alpha},$$

c'est-à-dire que (11) est impossible dès que

$$m + \theta < m(\log m)^{1-\alpha}.$$

La fonction est alors à croissance régulière.

Si les valeurs de m satisfaisant à (2) sont telles que la différence de deux d'entre elles consécutives m_2 et m_1 ($m_2 > m_1$) croisse moins vite que $m_1(\log m_1)^{1-\alpha} - m_1$ (α fini positif arbitraire) dès que m_1 dépasse une certaine limite, la fonction est à croissance régulière.

En résumé, nous pouvons énoncer le théorème suivant :

Théorème I. — *Soit*

$$(1) \qquad \varphi(x) = \sum a_m x_m$$

une fonction entière d'ordre fini ρ. *On sait qu'il y a, pour* m *assez grand, une infinité de coefficients* a_m *tels que*

$$\sqrt[m]{a_m} = \frac{1}{m^{\frac{1}{\rho}+\varepsilon}}, \tag{2}$$

ε *inférieur à un nombre fini arbitraire aussi petit qu'on veut positif.*

PREMIER CRITÈRE. *Si* θ *est un nombre positif qui croît moins vite avec* m *que* $m(\log m)^{1-\alpha} - m$ (α *positif aussi petit qu'on veut, mais fini*), *et si, sur* θ *coefficients consécutifs à partir de* a_m, *il y en a toujours un tel que* (2), *dès que* m *dépasse une limite finie, la fonction* $\varphi(x)$ *est à croissance régulière.*

DEUXIÈME CRITÈRE. *Si* θ *croît plus vite avec* m *que* $m^{1+\zeta_1} - m$ (ζ_1 *fini positif aussi petit qu'on veut*), *pour une infinité de valeurs de* m *satisfaisant à* (2) *dès que* m *dépasse une limite finie, la fonction* $\varphi(x)$ *est à croissance irrégulière.*

Remarque I. — Ce théorème s'étend immédiatement aux fonctions quasi-entières : il suffira de remarquer que la fonction quasi-entière d'ordres finis $\rho, \rho_0, \rho_1, \ldots, \rho_k$,

$$\varphi(z) + \varphi_0\left(\frac{1}{z}\right) + \varphi_1\left(\frac{1}{z-a_1}\right) + \ldots + \varphi_k\left(\frac{1}{z-a_k}\right), \tag{13}$$

où $\varphi(z), \varphi_0(z), \ldots, \varphi_k(z)$ sont des fonctions entières d'ordres finis, $\rho, \rho_0, \ldots, \rho_k$, avec $a_1 \neq a_2 \neq \ldots \neq a_k \neq 0$, a sa croissance régulière s'il en est de même de $\varphi(z), \varphi_0(z), \ldots, \varphi_k(z)$, irrégulière si l'une de ces fonctions a sa croissance irrégulière.

Si $\varphi(z)$ n'est d'ordre fini qu'aux environs d'une partie de ses points critiques essentiels, les critères sont encore applicables aux environs de ces points.

Remarque II. — Les dérivées d'ordre quelconque des fonctions entières ou quasi-entières d'ordre fini quelconque qui satisfont à l'un des critères du théorème I y satisfont également. Elles sont en même temps à croissance régulière ou irrégulière [1].

---

[1] La même propriété est évidente pour les fonctions entières ou quasi-entières d'ordre fini dont toutes les racines sont réelles (à part un nombre limité), car leurs dérivées ont toutes leurs racines réelles (à part un nombre limité), les ordres subsistent par la dérivation, et, entre deux racines réelles de la fonction, il y a, en général, une racine réelle de la dérivée.

III.

Le théorème I conduit à des applications importantes dans la théorie des équations différentielles.

Théorème II. — *Les fonctions entières ou quasi-entières d'ordre fini qui satisfont à une équation différentielle linéaire rationnelle en x ont leur croissance régulière.*

Soit l'équation différentielle linéaire

$$A_0 \frac{d^k y}{dx^k} + \ldots + A_k y + A_{k+1} = 0 = F(x, y, y', \ldots, y^{(k)}) \tag{14}$$

avec

$$A_i = a_0^{(i)} x^q + \ldots + a_q^{(i)} \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, k+1), \tag{15}$$

un des $a_0^{(i)}$ étant $\neq 0$ ainsi qu'un des coefficients $a_0^{(0)}, \ldots, a_q^{(0)}$, q ayant même valeur pour tous les A_i.

Supposons que

$$y = \sum_{-\infty}^{+\infty} \alpha_n x^n \tag{16}$$

soit solution de cette équation. Le terme général en x^n, par exemple, devient, pour n assez grand,

$$\begin{aligned} & a_q^{(k)} \alpha_n + a_{q-1}^{(k)} \alpha_{n-1} + \ldots + a_0^{(k)} \alpha_{n-q} \\ & + (n+1) a_q^{(k-1)} \alpha_{n+1} + \ldots + a_0^{(k-1)} (n-q+1) \alpha_{n-q+1} \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + (n+k)(n+k-1)\ldots(n+1) a_q^{(0)} \alpha_{n+k} + \ldots \\ & + (n+k-q)(n+k-q-1)\ldots(n-q+1) a_0^{(0)} \alpha_{n+k-q} = 0. \end{aligned} \tag{17}$$

Le terme général en $\frac{1}{x^n}$ se déduit du précédent par le changement de n en $-n$.

Supposons que y soit une fonction quasi-entière

$$\varphi(z) + \varphi_0\left(\frac{1}{z}\right)$$

d'ordres ρ, ρ_1, avec

$$\alpha_n = \frac{1}{n^{\left(\frac{1}{\rho} + \varepsilon\right) n}}, \qquad \alpha_{-n_1} = \frac{1}{n_1^{\left(\frac{1}{\rho_1} + \varepsilon_1\right) n_1}}, \tag{18}$$

pour une infinité de valeurs de n, n_1, ε, ε_1 tendant vers o respectivement avec $\frac{1}{n}$ et $\frac{1}{n_1}$.

Quand on fait varier $n(n_1)$, par exemple, il n'y a qu'un nombre limité de coefficients α qui figure dans chaque équation (17); à partir d'une valeur finie de n (ou n_1) ils doivent figurer tous dans l'ensemble des équations (17), sans quoi y contiendrait une infinité de coefficients arbitraires.

Les équations (17) contiennent $k+q+1$ coefficients consécutifs au plus, l'un des coefficients $a_q^0, \ldots, a_0^{(0)}$ n'étant pas nul. Le coefficient de α_j est d'ailleurs un polynome entier en n qui ne peut être nul dès que n dépasse une certaine limite pour toutes les valeurs de j, sans quoi tous les α_j seraient arbitraires. Nous aurons donc pour (17), en donnant à j une valeur n telle que $\alpha_n = \frac{1}{n^{\left(\frac{1}{\rho}+\varepsilon\right)^n}}$, une équation de la forme

$$\alpha_n \varpi_n + \ldots = 0,$$

ϖ_n étant un polynome entier en n, de degré k au plus, et les autres coefficients en nombre limité étant de la forme $\frac{1}{n^{\left(\frac{1}{\sigma}+\varepsilon_1\right)^n}}$ avec $\sigma \leqq \rho$. On aura alors une relation impossible si un des autres coefficients n'est pas de la même forme avec $\rho - \sigma = \varepsilon_2$, ε_2 tendant vers o quand n croît indéfiniment. Par conséquent, on peut affirmer que, sur $k+q+1$ coefficients consécutifs de y, il y en a toujours au moins deux de l'ordre de $\frac{1}{n^{\left(\frac{1}{\rho}+\varepsilon\right)^n}}$ si n est l'indice correspondant; de même pour les exposants négatifs. D'après un théorème précédent, la fonction y est donc une fonction entière ou quasi-entière dont la croissance est régulière.

Il n'y a pas de difficulté à étendre ce qui précède aux fonctions quasi-entières de la forme (13). La fonction

$$y = \varphi(z) + \varphi_0\left(\frac{1}{z}\right) + \varphi_1\left(\frac{1}{z-a_1}\right) + \ldots + \varphi_k\left(\frac{1}{z-a_k}\right)$$

ne peut être identiquement nulle que si tous les coefficients le sont : en effet, si $\varphi_0\left(\frac{1}{z}\right)$, par exemple, n'est pas identiquement nul aux environs du point $z=0$, $\varphi_0\left(\frac{1}{z}\right)$ peut prendre des valeurs aussi grandes qu'on veut et aussi y. Posons alors

$$y = Y + Y_0 + Y_1 + \ldots,$$

$$Y = \varphi(z), \qquad Y_0 = \varphi_0\left(\frac{1}{z}\right), \qquad Y_1 = \varphi_1\left(\frac{1}{z-a_1}\right), \qquad \ldots.$$

On aura

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(k)}) = F(x, Y, Y', \ldots, Y^{(k)}) + F(x, Y_0, Y'_0, \ldots) + \ldots.$$

On transformera $F(x, Y_1, Y'_1, \ldots)$, par exemple, en posant $x - a_1 = x_1$, de façon à le mettre sous la forme $f_1\left(\frac{1}{x_1}\right)$. Si

$$F(x, Y, Y', \ldots) = f(x),$$
$$F(x, Y_0, Y'_0, \ldots) = f_0\left(\frac{1}{x}\right),$$
$$F(x, Y_1, Y'_1, \ldots) = f_1\left(\frac{1}{x_1}\right),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

on devra avoir

$$f(x) + f_0\left(\frac{1}{x}\right) + f_1\left(\frac{1}{x_1}\right) + \ldots = 0.$$

Pour des valeurs des exposants de x, $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x_1}$, ..., qui dépassent une limite finie, tous les coefficients de x^n, x^{-n_0}, $x_1^{-n_1}$, ..., doivent être nuls, et l'on est conduit évidemment à des équations tout à fait analogues à (17).

C. Q. F. D.

IV.

Ces propriétés subsistent en partie pour des catégories étendues d'équations différentielles rationnelles en x, y, y' ..., $y^{(k)}$. Nous allons établir à cet égard le théorème suivant :

Théorème III. — *Soit*

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(k)}) = 0 \tag{19}$$

une équation différentielle entière en y, y', ..., $y^{(k)}$ *qui ne renferme qu'un seul terme en* y, y', ..., *ou* $y^{(k)}$.

Une des fonctions $P\left(\frac{1}{x}\right) + \sum_0^\infty \theta_n x^n$ *ou* $P(x) + \sum_0^\infty \frac{\theta_n}{x^n}$, *où* $P(x)$ *est un polynome entier,* $\sum_0^\infty \theta_n x^n$ *une fonction entière de genre fini, ne peut satisfaire à l'équation* (1) *que si* $\sum_0^\infty \theta_n x^n$ *est à croissance régulière.*

En effet, nous pourrons toujours supposer F mis sous la forme

$$F = \sum A y^{i_0} y'^{i_1} \ldots y^{(k) i_k}, \tag{19}$$

les A étant des polynomes entiers en x.

Supposons que

$$f(x) = \sum_{-\lambda_1}^{\infty} \theta_n x^n = P\left(\frac{1}{x}\right) + \sum_{0}^{\infty} \theta_n x^n \tag{20}$$

soit solution de (19)

On a

$$\left\{\begin{array}{l} y' \;= \ldots + (-n)\theta_{-n} x^{-n-1} + \ldots - \theta_{-1} x^{-2} + \theta_1 + 2\theta_2 x + \ldots + n\theta_n x^{n-1} + \ldots, \\ y'' = \ldots + (-n)(-n-1)\theta_{-n} x^{-n-2} + \ldots \\ \qquad + \theta_{-1}(-1)(-2) x^{-3} + 2\theta_2 + \ldots + n(n-1)\theta_n x^{n-2} + \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ y^{(k)} = \ldots + (-n)(-n-1)\ldots(-n-k+1)\theta_{-n} x^{-n-k} + \ldots \\ \qquad + \theta_{-1}(-k)!\, x^{-k-1} + k!\,\theta_k + \ldots + n(n-1)\ldots(n-k+1)\theta_n x^{n-k} + \ldots . \end{array}\right. \tag{21}$$

Quand on substitue $\sum_{-\lambda_1}^{\infty} \theta_n x^n$ dans $F = 0$, le résultat doit être identiquement nul. Nous allons chercher le coefficient de x^n dans le produit

$$y^{i_0} y'^{i_1} \ldots y^{(k) i_k}.$$

D'abord le terme général d'exposant positif E a son exposant de la forme

$$E = m_1^0 \alpha + \ldots + m_1^1(\alpha_1 - 1) + \ldots + m_1^k(\alpha_k - k) + \ldots + m_{j_k}^k(\delta_k - k), \tag{22}$$

$\alpha, \ldots, \delta_k$ pouvant être positifs ou négatifs, mais étant limités en valeur absolue dans le deuxième cas; $\alpha_i - i$, par exemple, quand $\alpha_i \geqq 0$ est tel que $\alpha_i \geqq i$ [1].

Son coefficient est

$$B = \frac{i_0!}{m_1^0! \ldots m_{j_0}^0!} \cdots \frac{i_k!}{m_1^k! \ldots m_{j_k}^k!} \theta_\alpha^{m_1^0} \ldots \theta_{\alpha_k}^{m_1^k} \ldots \theta_{\delta_k}^{m_{j_k}^k} . \alpha_1^{m_1^1} \ldots \delta_1^{m_{j_1}^1} \ldots \tag{23}$$

$$\times [(\alpha_k - k + 1) \ldots \alpha_k]^{m_1^k} \ldots [(\delta_k - k + 1) \ldots \delta_k]^{m_{j_k}^k},$$

---

[1] D'ailleurs, s'il en était différemment, le coefficient B correspondant serait nul.

avec

$$(24)\qquad \begin{cases} m_1^0+\ldots+m_{j_0}^0=i_0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ m_1^k+\ldots+m_{j_k}^k=i_k. \end{cases}$$

Le coefficient C de x^n dans F, après substitution à y de $\sum_{-\lambda_1}^{\infty}\theta_n x^n$, est

$$(25)\qquad \sum aB = 0,$$

et l'on a, pour chaque terme correspondant de $\sum Ay^{i_0}\ldots y^{(k)^{i_k}}$, un exposant de la forme

$$n = E + r \qquad (r \text{ fini}),$$

chaque terme $Ay^{i_0}\ldots y^{(k)^{i_k}}$ correspondant à une ou plusieurs valeurs de E en nombre fini.

Considérons, dans chaque expression $Ay^{i_0}\ldots y^{(k)^{i_k}}$, les termes T de $\sum aB$ qui sont $\neq 0$ et pour lesquels l'indice α' de $\theta_{\alpha'}$ est maximum parmi ceux qui ont un coefficient $\alpha'(\alpha'-1)\ldots(\alpha'-k'_1+1)$ d'ordre maximum en α'. On l'obtiendra en considérant tous les termes B pour lesquels tous les indices $\alpha, \ldots$, sauf 1, par exemple $\alpha, \ldots, \delta, \ldots, \alpha_k, \ldots, \gamma_k$ ont les valeurs minima telles que $\theta_\alpha\ldots\theta_\delta\ldots\theta_{\gamma_k}$ soit $\neq 0$, prenant pour le dernier indice α' (ici δ_k) les valeurs qui résultent de $n = E + r$, et parmi celles-là celle qui correspond à la valeur minima de r; on aura ici

$$\alpha = \ldots = \delta, \qquad \ldots, \qquad \alpha_k = \ldots = \gamma_k,$$

c'est-à-dire que les indices minima provenant de $y^{i_0}, y'^{i_1}, \ldots, y^{(k)^{i_k}}$, sauf l'indice α' (ici δ_k), seront respectivement égaux entre eux. Il n'y aura dans $Ay^{i_0}\ldots y^{(k)^{i_k}}$ qu'un T_1 de la nature T qui corresponde à $y^{(k'_1)^{i_{k'_1}}}$, c'est-à-dire pour lequel le coefficient α' soit un des indices $\alpha_{k'_1}, \ldots, \delta_{k'_1}$, pourvu que $i_{k'_1}$ soit $\neq 0$. Parmi les termes T analogues correspondant à $Ay^{i_0}\ldots y^{(k)^{i_k}}$, si $i_{k'}$ est l'exposant d'indice le plus élevé qui soit $\neq 0$ parmi les exposants $i_0, \ldots, i_k$, nous choisirons celui qui a pour coefficient $\alpha'(\alpha'-1)\ldots(\alpha'-k'+1)$. C'est évidemment le terme T cherché : il est unique.

Si $F = \sum Ay^{i_0}\ldots y^{(k)^{i_k}}$ contient d termes $Ay^{i_0}\ldots y^{(k)^{i_k}}$, il y a d termes de $\sum aB$ de la nature T.

Les coefficients B correspondants, en nombre fini, sont de la forme

$$B' = B_1\theta_{\alpha'}\alpha'(\alpha'-1)\ldots(\alpha'-k'+1),$$

B_1 étant une constante et $k' \leqq k$, α' différant de n d'un nombre fini ([1]).

([1]) α' n'a pas forcément la même valeur pour tous les termes B'.

Par hypothèse, il y a au moins un terme en $y^{(k)}$: supposons qu'il n'y en ait qu'un : le terme B' correspondant sera de la forme

$$(26)\qquad B'' = B_2\theta_{\alpha''}\alpha''(\alpha''-1)\dots(\alpha''-k+1) \qquad \text{avec} \qquad B_2 \neq 0.$$

Pour de grandes valeurs de α, il ne pourra se réduire avec aucun des termes B', au moins tant qu'on ne spécifie pas les valeurs des θ : il ne pourra donc être de module supérieur à la somme des modules des autres termes.

Supposons qu'il y ait plusieurs termes en $y^{(k)}$: il pourra y avoir plusieurs termes de la forme $aB'' \neq 0$ analogues à T contenant un même coefficient $\theta_{\alpha''}$ analogue à $\theta_{\alpha'}$ et donnant dans $\sum aB$ un total

$$(27)\qquad T_1 = \left(\sum a'B_2\right)\theta_{\alpha''}\alpha''(\alpha''-1)\dots(\alpha''-k+1).$$

Si $T_1 \neq 0$, les autres termes de $\sum aB$ qui contiennent $\theta_{\alpha''}$ étant en nombre limité et d'ordre $\leq \alpha''(\alpha''-1)\dots(\alpha''-k+2)$ ne peuvent se réduire avec T_1 : T_1 devra donc se réduire avec l'ensemble des autres termes, et la somme de leurs modules devra alors être d'ordre de grandeur au moins égal à celui de T_1. Si $T_1 = 0$, on a

$$\sum a'B_2 = 0,$$

quel que soit α; les termes de T provenant de $y^{(k)}$ n'interviennent plus. On peut considérer les termes en $y^{(k-1)}$, et l'on raisonnera dessus de la même manière : le coefficient de $\theta_{\alpha''}\alpha'''(\alpha'''-1)\dots(\alpha'''-k+2)$, α''' étant aussi grand que possible, est nul ou non, celui de $\theta_{\alpha''}\alpha'''(\alpha'''-1)\dots(\alpha'''-k+1)$ l'étant : s'il ne l'est pas, il doit être d'ordre de grandeur $\leqq$ la somme des modules des autres termes; s'il l'est, on considérera les termes en $y^{(k-2)}$, etc.

S'il n'y a dans F *qu'un terme en* $y^{(k')}$ *pour une valeur* $0 \leqq k' \leqq k$, *l'ensemble des termes de* $\sum aB$ *qui contiennent* $\theta_{\alpha'}$ *doit être d'ordre de grandeur* $\leqq$ *la somme des modules des autres termes.*

Admettons qu'il en soit ainsi.

Supposons alors que $\sum_0^\infty \theta_m z^m$ soit une fonction entière à croissance irrégulière. On aura, pour une infinité de valeurs de m,

$$(28)\qquad \theta_m = \frac{1}{m^{\frac{m}{\rho}(1+\varepsilon)}},$$

ρ étant l'ordre de la fonction entière; pour les autres valeurs,

$$\theta_m = \frac{1}{m^{\frac{m}{\sigma}}}, \tag{29}$$

$\rho - \sigma$ étant fini, positif et limité inférieurement. De plus, si m_2 et $m_1 (m_2 > m_1)$ sont deux nombres m consécutifs pour lesquels (28) a lieu, on a une infinité de valeurs de m_1, telles que

$$m_2 \geqq m_1 (\log m_1)^{\frac{1}{2}} \qquad \text{(théorème I)}. \tag{30}$$

Supposons encore que α'' soit une de ces valeurs m_1. La chose est possible, quel que soit m_1 (pourvu que m_1 soit assez grand); car, les autres indices du terme $\theta_{\alpha}^{m_1^0} \dots \theta_{\alpha_k}^{m_1^k} \dots$ étant fixés comme il a été dit plus haut, pour la détermination de α'', n restant arbitraire, on en conclut une relation

$$n = \alpha'' + \varpi,$$

ϖ étant une constante parfaitement déterminée la même, quel que soit n : pour choisir $\alpha'' = m_1$, il suffit de prendre $n = m_1 + \varpi$.

Les autres termes, pour lesquels les indices sont $\neq \alpha''$ et $\leqq \alpha'' + r'$ (r' fini), sont tous de la forme

$$\mu \theta_{\alpha}^{m_1^0} \dots \theta_{\alpha_k}^{m_1^k} \dots,$$

les $\alpha, \dots, \alpha_k, \dots$ étant en nombre limité et $\leqq P''$ (P'' maximum des quantités $P = i_0 + i_1 + \dots + i_k$), avec

$$m_1^0 \alpha + \dots + m_{j_k}^k \delta_k = n - r'', \tag{31}$$

où r'' est fini et peut avoir plusieurs valeurs.

Pour chacune de ces valeurs de r'', cherchons un maximum de $\mu \theta_{\alpha}^{m_1^0} \dots \theta_{\alpha_k}^{m_1^k} \dots$.

On a, β_1 étant positif,

$$\theta_{\pm \beta_1} = \frac{k_1}{\beta_1^{\frac{\beta_1}{\sigma_1}}} \qquad (\beta_1 \neq \alpha'' \quad \text{et} \quad \leqq \alpha'' + r'_n, \quad k_1 \text{ limité}). \tag{32}$$

Désignons, pour plus de commodité, par $\beta_1, \dots, \beta_l$ les modules des quantités $\alpha, \dots, \alpha_k, \dots$ en nombre l, chacune étant comptée autant de fois que l'indique son coefficient $m_1^0, \dots, m_{j_k}^k$ respectivement dans (31). On aura, d'après (32),

$$\left\{ \begin{array}{l} (\theta_{\alpha}^{m_1^0} \dots \theta_{\alpha_k}^{m_1^k} \dots)^{-1} = k_2 \beta_1^{\frac{\beta_1}{\sigma_1}} \dots \beta_l^{\frac{\beta_l}{\sigma_l}} \qquad (k_2 \text{ fini}) \\ \quad \text{avec} \\ \beta_1 + \dots + \beta_l = n + r_1 \qquad (r_1 \text{ fini}). \end{array} \right. \tag{33}$$

Parmi les quantités toutes de même signe $\beta_1, \ldots, \beta_l$, il y en a alors une, β_l par exemple, qui est la plus grande en valeur absolue, et telle que

$$|\beta_l| \geqq \frac{n+r_1}{l}. \tag{34}$$

Pour cette valeur $\sigma_l \leqq \rho - \zeta$ (ζ fini, positif, limité), car

$$\beta_l(\log\beta_l)^{\frac{1}{2}} \geqq \left(\frac{n+r_1}{l}\right) \log\left(\frac{n+r_1}{l}\right)^{\frac{1}{2}} > n + r_2,$$

quel que soit le nombre fini r_2 dès que n est assez grand. On pourra poser

$$\sigma_l \leqq \sigma' = \rho - \zeta. \tag{35}$$

β_l étant supposé fixe, cherchons un minimum de

$$\beta_1^{\frac{\beta_1}{\sigma_1}} \ldots \beta_{l-1}^{\frac{\beta_{l-1}}{\sigma_{l-1}}} \geqq (\beta_1^{\beta_1} \ldots \beta_{l-1}^{\beta_{l-1}})^{\frac{1}{\rho_1}} \quad (^1)$$

avec

$$\beta_1 + \ldots + \beta_{l-1} = \text{const.} = n + r_1 - \beta_l.$$

On a, en prenant les logarithmes,

$$\frac{\beta_1}{\sigma_1}\log\beta_1 + \ldots + \frac{\beta_{l-1}}{\sigma_{l-1}}\log\beta_{l-1} \geqq \frac{\beta_1\log\beta_1 + \ldots + \beta_{l-1}\log\beta_{l-1}}{\rho_1},$$

et

$$d(\beta_1\log\beta_1 + \ldots + \beta_{l-1}\log\beta_{l-1}) = 0,$$

$$d\beta_1 + \ldots + d\beta_{l-1} = 0,$$

$$(1 + \log\beta_1)\, d\beta_1 + \ldots + (1 + \log\beta_{l-1})\, d\beta_{l-1} = 0,$$

ou enfin

$$0 = (\log\beta_1 - \log\beta_{l-1})\, d\beta_1 + \ldots + (\log\beta_{l-2} - \log\beta_{l-1})\, d\beta_{l-2}.$$

$d\beta_1, \ldots, d\beta_{l-2}$ sont ici indépendants. Donc il faut

$$\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_{l-1} = \frac{n + r_1 - \beta_l}{l-1}.$$

La valeur correspondante de $(\beta_1^{\beta_1} \ldots \beta_{l-1}^{\beta_{l-1}})^{\frac{1}{\rho_1}}$ est

$$\left(\frac{n + r_1 - \beta_l}{l-1}\right)^{\frac{n+r_1-\beta_l}{\rho_1}}.$$

C'est un minimum, car, par exemple, elle est inférieure à la valeur obtenue en

(1) $\rho_1 = \rho + \varepsilon$, $|\varepsilon|$ aussi petit qu'on veut, mais fini.

faisant $\beta_1 = \ldots = \beta_{l-2} = 1$,

$$\beta_{l-1} = n + r_1 - \beta_l - l + 2,$$

qui est

$$(n + r_1 - \beta_l - l + 2)^{\frac{n+r_1-\beta_l-l+2}{\rho_1}}$$

dès que $l > 1$, ce que nous supposerons provisoirement. Dans cette hypothèse, on a donc

$$\beta_1^{\frac{\beta_1}{\sigma_1}} \ldots \beta_l^{\frac{\beta_l}{\sigma_l}} \geqq \beta_l^{\frac{\beta_l}{\sigma_l}} \left(\frac{n + r_1 - \beta_l}{l - 1}\right)^{\frac{n+r_1-\beta_l}{\rho_1}} \geqq \beta_l^{\frac{\beta_l}{\sigma'}} \left(\frac{n + r_1 - \beta_l}{l - 1}\right)^{\frac{n+r_1-\beta_l}{\rho_1}} = \mathrm{H}.$$

D'autre part,

$$\log \mathrm{H} = \mathrm{X}_1 = \frac{\beta_l}{\sigma'} \log \beta_l + \frac{n + r_1 - \beta_l}{\rho_1} \log \frac{n + r_1 - \beta_l}{l - 1}$$

a pour dérivée en β_l

$$\begin{aligned} \mathrm{X}'_1 &= \frac{1}{\sigma'}(1 + \log\beta_l) - \frac{1}{\rho_1} \log \frac{n + r_1 - \beta_l}{l - 1} - \frac{1}{\rho_1} \\ &= \frac{1}{\sigma'} \log\beta_l - \frac{1}{\rho_1} \log(n + r_1 - \beta_l) + \frac{1}{\sigma'} + \frac{1}{\rho_1} \log(l - 1) - \frac{1}{\rho_1}. \end{aligned}$$

De même

$$\mathrm{X}''_1 = \frac{1}{\sigma' \beta_l} + \frac{1}{\rho_1 (n + r_1 - \beta_l)}$$

qui est toujours positif pour $\beta_l \geqq \frac{n + r_1}{l}$. X'_1 est une fonction croissante de β_l : sa valeur minima a donc lieu ici pour $\beta_l = \frac{n + r_1}{l}$; c'est

$$\frac{1}{\sigma'} + \frac{1}{\rho_1} \log(l - 1) - \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\sigma'} \log \frac{n + r_1}{l} - \frac{1}{\rho_1} \log(n + r_1) \frac{l - 1}{l}.$$

Pour n assez grand, cette valeur est toujours positive, et dès lors X'_1 est ici toujours positif. Par suite, X_1 croît avec β_l dès que $\beta_l \geqq \frac{n + r_1}{\beta_l}$, et

$$\begin{aligned} \mathrm{H} = \beta_l^{\frac{\beta_l}{\sigma'}} \left(\frac{n + r_1 - \beta_l}{l - 1}\right)^{\frac{n+r_1-\beta_l}{\rho_1}} &\geqq \left(\frac{n + r_1}{l}\right)^{\frac{n+r_1}{l\sigma'}} \left(\frac{n + r_1 - \frac{n + r_1}{l}}{l - 1}\right)^{\frac{n+r_1-\frac{n+r_1}{l}}{\rho_1}} \\ &= \left(\frac{n + r_1}{l}\right)^{\frac{n+r_1}{l\sigma'}} \left(\frac{n + r_1}{l}\right)^{\frac{n+r_1}{l\rho_1}(l-1)} \\ &= \left(\frac{n + r_1}{l}\right)^{\frac{n+r_1}{\rho_1}} \left(\frac{n + r_1}{l}\right)^{\frac{n+r_1}{l}\left(\frac{1}{\sigma'} - \frac{1}{\rho_1}\right)}. \end{aligned}$$

Finalement, d'après (33),

$$\mu_1 \theta_\alpha^{m_1^0} \ldots \theta_{\alpha_k}^{m_1^k} \ldots \leqq \left[\mu \left(\frac{n+r_1}{l} \right)^{\frac{n+r_1}{\rho_1}} \left(\frac{n+r_1}{l} \right)^{\frac{n+r_1}{l} \left(\frac{1}{\sigma} - \frac{1}{\rho_1} \right)} \right]^{-1}.$$

Cette inégalité reste évidemment vraie quand $l = 1$.

Le nombre des termes de $\sum a\mathrm{B}$ est d'ailleurs $\leqq$ au produit d'un nombre limité par le nombre des solutions de

$$n + r_1 = m_1^0 \alpha + \ldots + m_1^k \alpha_k + \ldots,$$

$\alpha, \ldots, \alpha_k$ ne pouvant être négatifs que si leur valeur absolue est limitée, et r_1 n'ayant qu'un nombre limité de valeurs. Ce nombre de termes est alors $\leqq n^\zeta$, ζ étant limité : la somme des modules des termes de $\sum a\mathrm{B}$ autres que ceux qui contiennent $\theta_{\alpha''}$ est d'ordre

$$\leqq \frac{n^{\zeta'}}{\left(\frac{n+r_1}{l_1} \right)^{\frac{n+r_1}{\rho_1}} \left(\frac{n+r_1}{l_1} \right)^{\frac{n+r_1}{l_1} \left(\frac{1}{\sigma} - \frac{1}{\rho_1} \right)}} \qquad (\zeta' \text{ limité}),$$

l_1 étant la plus grande des quantités l, qui sont limitées. Cette somme est évidemment d'ordre

$$< \frac{1}{\alpha''^{\frac{\alpha''}{\rho}(1+\varepsilon)}}$$

qui est l'ordre des termes $\theta_{\alpha''} \alpha'' \ldots (\alpha'' - k' + 1)$, et, par conséquent, $\sum a\mathrm{B}$ ne peut s'annuler contrairement à ce qui doit avoir lieu si $\sum_{-\lambda_1}^{\infty} \theta_n x^n$ est solution de $\mathrm{F} = 0$ (¹).

La même démonstration s'applique aux fonctions quasi-entières d'ordre fini $\sum_{-\lambda_1}^{\infty} \frac{\theta_n}{x^n}$: il n'y a presque rien à y changer.

Nous concluons finalement ce théorème :

(¹) Chaque fois que l'on pourra établir, pour une équation différentielle rationnelle $\mathrm{F} = 0$, l'existence d'un terme $\neq 0$ analogue à (26), on sera évidemment conduit aux mêmes conclusions et $\sum_{-\lambda_1}^{\infty} \theta_n x^n$ ne pourra être solution de $\mathrm{F} = 0$ que si elle est à croissance régulière.

THÉORÈME III. — *Soit*

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(k)}) = 0 \tag{19}$$

une équation différentielle entière en $y, y', \ldots, y^{(k)}$ *qui ne renferme qu'un seul terme en* $y, y', \ldots$ *ou* $y^{(k)}$.

Une des fonctions $P\left(\frac{1}{x}\right) + \sum_0^\infty \theta_n x^n$ *ou* $P(x) + \sum_0^\infty \frac{\theta_n}{x^n}$, $P(x)$ *étant un polynome entier et* $\sum_0^\infty \theta_n x^n$ *une fonction entière d'ordre fini, ne peut satisfaire à l'équation* (19) *que si* $\sum_0^\infty \theta_n x^n$ *a sa croissance régulière.*

Remarque I. — Nous croyons utile d'insister sur une conséquence des résultats qui précèdent : nous avons vu antérieurement qu'il y avait des catégories étendues de fonctions entières ne satisfaisant à aucune équation différentielle rationnelle [1], pourvu que la décroissance des coefficients fût suffisamment rapide. Il résulte de ce qui précède que, quelle que soit la rapidité de décroissance des coefficients pour les fonctions entières d'ordre fini, la généralité de ces fonctions ne comprend aucune solution des équations différentielles linéaires rationnelles, ni même de catégories étendues d'équations différentielles rationnelles non linéaires.

C'est un résultat plus précis, mais moins général jusqu'à nouvel ordre, que celui que nous avons obtenu par extension d'un théorème connu de M. Cantor, aux équations différentielles rationnelles.

V.

Le théorème II peut s'étendre aux solutions générales ou non de certaines équations différentielles linéaires dont les coefficients sont des polynomes entiers en x.

Soit l'équation différentielle

$$A_0 \frac{d^n y}{dx^n} + A_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + A_n x = 0, \tag{1}$$

où $A_0, \ldots. A_n$ sont des polynomes entiers en x, que l'on peut supposer premiers entre eux.

[1] *Journal de Mathématiques*, 1902, p. 37.

On sait, et l'on voit sans peine, par le changement de variables

$$\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}=y_1, \qquad \frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}=y_2, \qquad \ldots, \qquad \frac{dy}{dx}=y_{n-1},$$

et l'application d'un théorème de Cauchy [1], que les seuls points critiques à distance finie des solutions de (1) sont les zéros de A_0.

Si A_0 se réduit à une constante, (1) n'a aucun point critique à distance finie. L'intégrale générale est une fonction entière : le théorème II s'applique.

Sinon, soit

$$A_0=(ax+b)^\mu \qquad (a\neq 0);$$

grâce à un changement de variables simples, on peut toujours supposer

$$a=1, \qquad b=0, \qquad A_0=x^\mu \quad (\mu \text{ entier}).$$

Soit r une racine de l'équation déterminante : on a une intégrale

$$Y=x^r u_0.$$

Supposons encore que (1) ait ses intégrales régulières, au sens de Fuchs : l'on sait qu'alors $\mu\leqq n$, A_i étant divisible par $x^{\mu-i}$, si $\mu\geqq i$. En multipliant tout par $x^{n-\mu}$, on peut supposer $\mu=n$. Cherchons l'équation différentielle à laquelle satisfait u_0; on a

$$A_k\frac{d^{n-k}Y}{dx^{n-k}}=A_k\sum C^l_{n-k}\frac{d^{n-k-l}u_0}{dx^{n-k-l}}r(r-1)\ldots(r-l+1)x^{r-l},$$

avec

$$A_k=A'_k x^{n-k} \qquad \text{et} \qquad l\leqq n-k,$$

A'_k étant un polynome entier.

On aura ainsi le terme

$$A'_k C^l_{n-k}\frac{d^{n-k-l}u_0}{dx^{n-k-l}}r(r-1)\ldots(r-l+1)x^{n-k+r-l},$$

avec

$$n-k-l\geqq 0.$$

Donc x^r sera en facteur, et le coefficient de $\frac{d^{n-k-l}u_0}{dx^{n-k-l}}$ est divisible par x^{n-k-l}. Supprimons le facteur x^r.

L'équation en u_0 sera encore une équation différentielle linéaire de la forme (1), avec $\mu=n$, ayant ses intégrales régulières. Mais la racine de l'équation déterminante qui correspond à x^r sera nulle.

---

[1] *Voir*, par exemple, *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique.*

La solution u_0 correspondante n'a plus de point critique à distance finie, et est monodrome dans tout le plan : c'est donc un polynome ou une fonction entière.

Dans le second cas, l'équation différentielle en u_0 est de celles auxquelles notre théorème II est applicable. Si u_0 est de genre fini, elle est à croissance régulière.

A titre d'exemple d'application des considérations précédentes on peut citer l'équation de Bessel.

Les mêmes considérations sont applicables au cas où il y a plus d'un point critique, mais où tous les points critiques à distance finie autres que $x = x_0$ (l'on peut toujours supposer comme tout à l'heure $x_0 = 0$) sont des pôles pour l'intégrale générale. On a un système de n intégrales indépendantes (1)

$$y_0 = (x - x_0)^r u_0,$$
$$y_1 = (x - x_0)^r (\theta_1 u_0 + u_1),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

avec

$$\theta_1 = \frac{1}{2\pi i}\log(x - x_0), \qquad \ldots;$$

u_0, u_1, ... sont des fonctions quasi-entières n'ayant à distance finie que des pôles : si u_0 est d'ordre fini, u_0 est à croissance régulière.

Nous pourrons ainsi énoncer le théorème suivant :

Théorème IV. — *Soit une équation différentielle linéaire*

$$A_0 \frac{d^n y}{dx^n} + A_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + A_n x = 0$$

dont les coefficients sont des polynomes et dont les intégrales sont régulières à distance finie au sens de Fuchs. Si tous les points critiques à distance finie autres que $x = x_0$ sont des pôles pour l'intégrale générale, il y a un certain nombre d'intégrales de la forme $(x - x_0)^r u_0$ où u_0 est une fraction rationnelle ou une fonction quasi-entière n'ayant d'autres points critiques à distance finie que des pôles (c'est-à-dire la somme d'une fraction rationnelle et d'une fonction entière) : u_0 ne peut être d'ordre fini que si sa croissance est régulière (au sens de M. Borel).

(1) Les considérations ci-dessus sont des généralisations de considérations dues à Halphen. — Voir Jordan, *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique*, t. III, 1887, p. 211.

L'équation de Bessel est de celles auxquelles ceci s'applique.

Si $A_0 =$ const., *l'intégrale générale est un polynome ou une fonction entière qui ne peut être d'ordre fini que si sa croissance est régulière* (1).

---

(1) Ce théorème ne doit évidemment être considéré que comme un cas particulier : il appelle bien des extensions.



ÉCLIPSE TOTALE DE SOLEIL DU 28 MAI 1900.

RAPPORT DE LA MISSION

ORGANISÉE

PAR L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE,

PAR M. HENRY BOURGET,

Maître de Conférences à l'Université et Astronome adjoint à l'Observatoire.

1. Une éclipse totale de Soleil eut lieu le 28 mai 1900. La totalité était visible en Europe, sur une mince bande de terrain, allant d'Ovar en Portugal à Santa-Pola près d'Alicante en Espagne.

L'Université de Toulouse pensant qu'il y avait grand intérêt à observer un phénomène aussi important et aussi rare, ayant lieu dans une région si voisine de la nôtre, voulut bien me faire l'honneur de me charger d'une mission, en m'adjoignant M. Carrère, mécanicien à l'Observatoire. Le Conseil de l'Université vota, en outre, un crédit suffisant pour nos frais de voyage, d'installation et de séjour.

La station choisie fut la petite ville d'Elche, située à côté d'un grand bois de palmiers, à 26^{km} au sud-ouest d'Alicante.

De son côté, l'Université de Montpellier organisait, dans les mêmes conditions, une mission analogue composée de MM. Lebeuf et Meslin, professeurs à la Faculté des Sciences. Les deux missions convinrent de se réunir et d'opérer côte à côte.

Les instruments, dont nous donnerons plus loin l'énumération, qui servirent à M. Lebeuf et à moi-même, furent obligeamment mis à notre disposition par M. Baillaud, directeur de l'observatoire de Toulouse. Je tiens à lui exprimer ici toute ma gratitude, non seulement sur ce point, mais encore pour toutes les facilités qu'il nous a données pour la préparation et l'exécution de notre mission.

Sauf quelques généralités indispensables, concernant notre installation commune, on ne trouvera dans les pages qui suivent que le Rapport de la mission de Toulouse. Des difficultés matérielles d'impression m'ont empêché de joindre, pour constituer un travail d'ensemble, mes notes à celles de MM. Meslin et Lebeuf. N'ayant pas voulu retarder outre mesure cette publication déjà bien tardive, j'ai dû publier mon rapport séparément, tout en prévenant le lecteur, car je ne voudrais pas qu'il s'élevât, dans son esprit, le moindre doute sur la bonne entente et la cordialité parfaite qui n'ont cessé de régner entre nous pendant le grand mois que nous avons passé ensemble à Elche.

2. Voici les instruments dont nous disposions :

1° M. Meslin avait emporté une chambre prismatique à réseau Rowland avec un héliostat, destinée à l'observation spectroscopique du phénomène et une lunette raccourcie de Steinheil pour la photographie de la couronne solaire.

2° M. Lebeuf devait déterminer la latitude de notre station avec un cercle méridien portatif d'Eichens. Ce cercle, prêté à l'observatoire de Toulouse par l'observatoire de Paris, avait été mis à notre disposition par M. Baillaud.

D'autre part, M. Lebeuf devait observer les contacts avec une excellente lunette de Secretan de 108^{mm} d'ouverture et de 165^{cm} de distance focale. Cette lunette, montée sur un pied équatorial métallique, fut pourvue par M. Carrère d'un oculaire solaire et d'un mouvement d'horlogerie appartenant à l'Université de Montpellier.

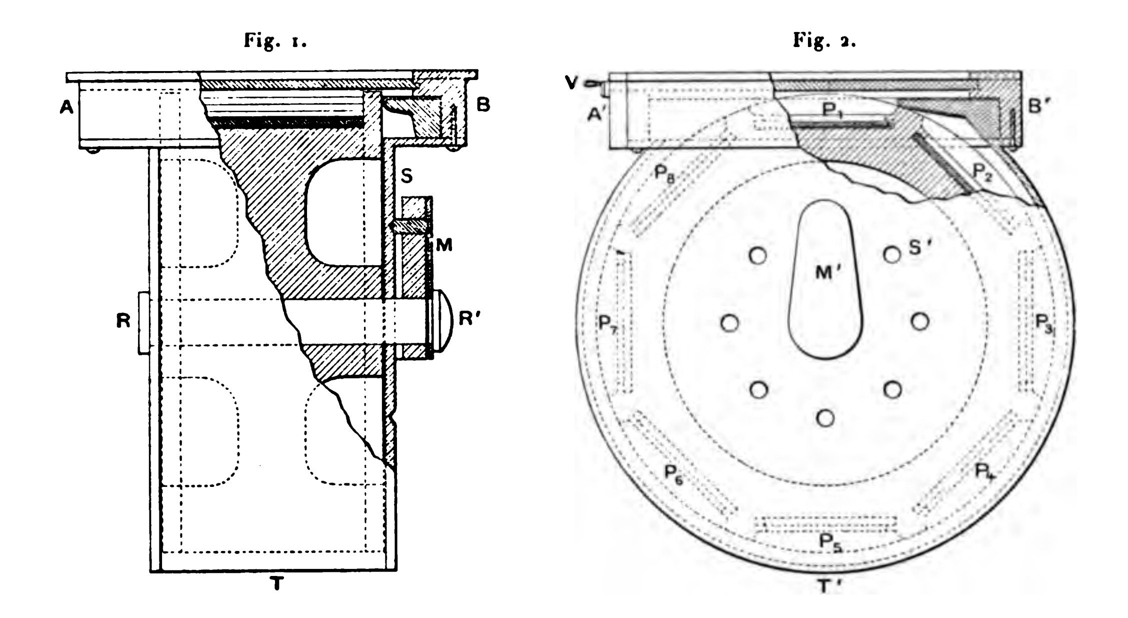
3° Deux chronomètres de temps sidéral, l'un de Fénon (n° 36) battant la demi-seconde et l'autre de Breguet (n° 999) battant les quatre dixièmes de seconde.

4° Une lunette photographique de MM. Henry, de 160^{mm} d'ouverture et de 90^{cm} de distance focale. Cette lunette, fixée sur un pied équatorial en bois, muni d'un mouvement d'horlogerie, devait me servir à prendre des photographies de la couronne solaire dans des conditions variées. A cet effet, M. Carrère avait très habilement combiné et construit un revolver photographique, permettant d'utiliser huit plaques $6\frac{1}{2} \times 9^{cm}$, sans perte de temps.

Les deux dessins ci-après représentent ce revolver (*fig.* 1 et 2).

Il consiste en une roue sur la jante de laquelle sont montées les huit plaques $P_1, P_2, \ldots, P_8$ dans de petits châssis métalliques vendus dans le commerce pour les photo-jumelles. Cette roue peut, à l'aide d'une manivelle M, M', tourner autour d'un axe R dont les extrémités reposent dans les parois d'un tambour T, T' enveloppant entièrement la roue. La rotation permet d'amener au plan focal de la lunette successivement chacune des plaques, la mise en place étant assurée par des coups de pointeau S, S' arrêtant légèrement une petite tige portée par la manivelle M, à chaque rotation. Dans la figure, la plaque P_1 est en place. La

lunette n'est pas représentée; le revolver s'installant à son extrémité par une prise que l'on voit en AB, A'B'. En V, on aperçoit la queue d'un volet protégeant les plaques contre la lumière venant de l'objectif. Le revolver, une fois chargé de ses plaques dans le laboratoire photographique, s'installe à la lunette



exactement comme un châssis ordinaire et à la place même de ce châssis. Un chercheur permettant de projeter l'image du Soleil sur un verre dépoli était monté sur cette lunette. Enfin, une petite chambre photographique 18×24, munie d'un objectif Dallmeyer, complétait cet instrument.

5° Un baromètre Fortin, un baromètre anéroïde et des thermomètres.

La lunette Secretan, les chronomètres, la lunette de MM. Henry et le baromètre Fortin appartiennent à l'Observatoire de Toulouse.

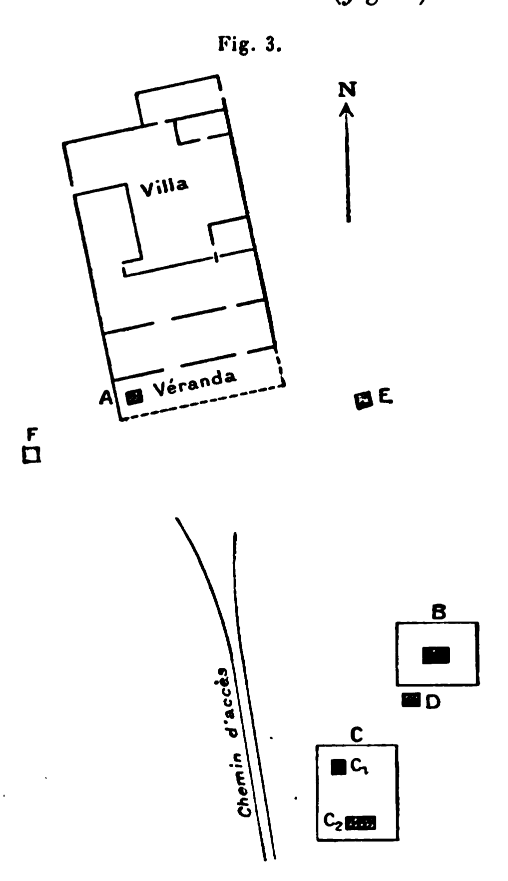
3. MM. Lebeuf et Carrère arrivèrent à Elche le 25 avril, et commencèrent par chercher un emplacement favorable aidés par l'alcade de cette ville, don Sebastian Canalès Murtula, dont la mission ne saurait trop louer l'obligeance cordiale et l'empressement, et par M. Issanjou, commerçant français établi à Alicante, qui se mit à leur disposition avec la plus grande complaisance.

Après avoir examiné bien des emplacements, on fit choix de la villa San-Antonio, située à 2^{km} d'Elche sur la route de Crevillente, au milieu de plantations d'oliviers et de caroubiers. Son propriétaire, señor Torregrossa y Pareno, la mit généreusement à notre disposition et ne cessa de veiller avec sollicitude sur notre installation.

Au sud de la villa, devant la maison, s'étendait un vaste emplacement découvert tout à fait convenable pour y installer nos instruments.

Le plan ci-dessous montre notre installation (*fig.* 3).

Fig. 3.



M. Meslin monta en A, sous la véranda protégée par des cloisons en planches, sa chambre prismatique et en D la lunette de Steinheil. Je m'installai en B sous une tente apportée de Toulouse, et en C sous une autre tente, M. Lebeuf établit les deux instruments dont il disposait.

Les deux tentes que j'avais cru devoir emmener avec moi furent pour nous la source de bien des ennuis. Il fallait, à chaque coup de vent, veiller sur les toiles; et elles étaient longues et très mal commodes à découvrir pour l'observation. Je pense qu'en pareille circonstance le mieux est d'avoir de simples abris démontables en planches recouvertes de toile ou de papier goudronné pour ne protéger que l'instrument lui-même; l'observateur trouvant toujours, sur place, le moyen d'organiser un abri supplémentaire si cela est nécessaire.

4. J'arrivai à Elche dans les premiers jours du mois de mai. Les tentes, les

piliers en briques et les instruments avaient déjà été montés par M. Carrère, avec une activité et des soins entendus, dont nous ne saurions trop le remercier.

Il restait à régler mon instrument. Malheureusement, pendant toute la première quinzaine du mois de mai, le temps fut très peu favorable et c'est à peine si nous eûmes trois belles soirées nécessaires pour ces opérations.

Je crois pouvoir recommander le mode suivant de mise en place. J'en ai été satisfait dans maintes circonstances ([1]).

On oriente, pendant le jour, le mieux possible l'instrument en azimut avec le Soleil et en hauteur avec un niveau d'angle, puis mettant le tube de la lunette bien vertical avec un fil à plomb, on règle la position des index d'ascension droite et de déclinaison à l'aide d'une valeur approchée de la latitude. Enfin, on finit le réglage de nuit à l'aide de la méthode de Scheiner rapide, sûre et précise. On fait, de jour, à loisir le réglage du mouvement d'horlogerie.

Le temps se découvrit complètement quelques jours avant l'éclipse et se maintint beau pendant toute la durée du phénomène.

Dans les derniers jours, M. Joubin, professeur de physique à l'Université de Besançon ([2]), vint se joindre à nous, voulut bien partager notre installation à la villa San-Antonio et, pendant l'éclipse, s'installa en E avec une lunette munie d'un dispositif pour déceler et mesurer la polarisation elliptique de la couronne.

Enfin, M. Moye, professeur à la Faculté de droit de Montpellier, et M. Tramblay, deux habiles astronomes amateurs, vinrent également observer avec nous. M. Moye se chargea de la lunette de Steinheil de M. Meslin et de l'observation sur le sol des célèbres bandes ondulantes, et M. Tramblay, en F, nota les phénomènes généraux extérieurs et les variations des thermomètres.

5. Voici comment j'avais préparé l'emploi des neuf plaques photographiques dont je disposais :

Plaques Lumière anti-halo.			Durée de pose.
$6\frac{1}{2} \times 9^{cm}$	1	Étiquette jaune.	6 secondes.
	2	Id.	4 »
	3	Id.	2 »
	4	Étiquette rouge.	1 »
	5	Étiquette bleue.	2 »
	6	Panchromatique.	3 »
	7	Étiquette jaune.	8 »
	8	Id.	8 »
18×24^{cm}	9	Étiquette bleue.	70 »

([1]) Notamment dans deux campagnes astronomiques faites en octobre 1901 et en juillet 1902 au sommet du Pic du Midi de Bigorre.

([2]) Actuellement, recteur de l'Académie de Grenoble.

La plaque 7 était recouverte d'un bristol perforé à trous espacés d'un millimètre, de façon à donner de la couronne une image formée de points séparés plus ou moins noirs et permettant de mesurer l'intensité relative des diverses régions de la couronne.

Je devais manœuvrer le revolver photographique et les mouvements lents de la lunette. M. Carrère m'assistait et était chargé d'ouvrir et de fermer l'obturateur de l'objectif.

J'avais donc préparé un programme *minimum*. J'ai cru prudent d'agir ainsi pour une première observation d'éclipse totale, eu égard surtout à la faible durée de la totalité. J'ai pensé que l'enregistrement des formes de la couronne, si importantes pour l'avenir de la théorie du Soleil, constituait à lui seul une observation d'intérêt assez grand, pour essayer de le faire à coup sûr dans les meilleures conditions possibles et sans crainte d'échec par suite d'un nombre trop grand d'appareils à manier dans un temps aussi court.

6. Le jour de l'éclipse, ce programme fut réalisé d'une manière très satisfaisante et sans accident. Pour ma part, je pense qu'il faut attribuer cette heureuse réussite à nos répétitions préliminaires d'abord et ensuite à ce que le phénomène n'a rien de subit ni de déconcertant. Il faut reconnaître que les contacts d'une éclipse s'observent bien mieux (à ne parler que des conditions subjectives) qu'une occultation d'étoiles par la Lune. La soudaineté de ce dernier phénomène en rend l'observation particulièrement déconcertante et incertaine.

Trois quarts d'heure avant la totalité, l'instrument fut mis en marche, et je commençai à suivre, sur l'écran du chercheur, l'image de la Lune et la diminution graduelle du croissant lumineux. Quelques secondes avant la totalité, ce mince croissant se déchira, pour ainsi dire, d'un seul coup, montrant le phénomène des *grains de Bailey*.

Immédiatement après, un coup de fusil de M. Lebeuf nous annonçait le second contact, et les photographies commencèrent.

Après l'exposition des neuf plaques, je pus contempler pendant 5 secondes environ l'éclipse dans toute sa beauté, réellement très grande aux yeux d'un observateur assistant pour la première fois à ce spectacle. La couronne resplendissait d'un blanc éblouissant; ressemblant, autant que j'en ai pu juger, au blanc que possède, avant le polissage, un miroir qu'on vient d'argenter par le procédé à la soude et au sucre. Une très belle protubérance était visible. Dans le ciel, autour du Soleil, brillaient Vénus, Mercure, les plus belles étoiles d'Orion et Sirius. L'obscurité n'était pas très grande, et l'on a pu lire pendant toute la totalité un chronomètre à pointage. Au couchant s'étendait une grande bande de ciel d'une teinte brique très particulière. M. Moye, à mes côtés, aperçut sur le

sol, avec une très grande netteté, les bandes ondulantes dont M. K. Exner a donné une explication simple.

7. Passons aux résultats fournis par les plaques photographiques. Ces plaques m'avaient été données par MM. Lumière avec leur libéralité bien connue des astronomes. Comme les émulsions lentes (étiq. jaune et étiq. rouge) n'existent pas dans le commerce avec couche anti-halo, MM. Lumière avaient eu la complaisance de me les préparer spécialement. J'avais, avant mon départ, essayé ces plaques sur le Soleil, avec l'objectif Dallmeyer, et j'en avais été très content. Elles sont parfaites pour toutes les opérations photographiques où la lumière n'a pas une intensité comparable à la lumière directe du Soleil. Mais, pour cet astre, avec un objectif aussi lumineux ($\frac{1}{6}$) que celui de MM. Henry, on a intérêt à passer au dos de la plaque, par mesure de précaution, une couche de collodion à la chrysoïdine ou de tout autre enduit anti-halo (1). En fait, les plaques exposées au début et à la fin de la totalité, aux moments où la lumière est très vive, montrent un halo empiétant sur le disque lunaire surtout au niveau des protubérances, dont la teinte est voisine de celle de la couche anti-halo des plaques employées.

Les plaques 1 et 2 présentent donc, en même temps qu'une couronne très lumineuse, un halo qui masque l'image des protubérances.

Sur la plaque 3, les protubérances se distinguent mieux, mais la couronne a moins d'extension.

La plaque 4 ne montre que les protubérances et encore sont-elles très faibles. Évidemment, une pose de 1 seconde avec les plaques à étiquette rouge est sûrement insuffisante pour la photographie du phénomène.

C'est sur la plaque 5 que les protubérances se voient de la manière la plus nette. J'ai constaté que cette plaque montrait toutes les protubérances relevées à l'œil, avec un spectroscope, par M. Fenyi le jour même de l'éclipse.

La plaque 6 a été voilée pendant le développement.

Je pensais pouvoir tirer de la plaque 7 quelques renseignements précieux sur les valeurs photométriques relatives des diverses régions de la couronne; mais, après développement, j'ai constaté que les images des régions de la couronne faites à travers les trous du bristol présentaient, dans leur étendue, de fortes variations de teinte. Les trous du bristol étaient donc trop grands relativement à la grandeur de l'image totale de la couronne. J'ai donc laissé de côté cette plaque, me proposant de reprendre cet essai à une prochaine occasion.

La plaque 8 est une des meilleures : les rayons coronaux y sont nets et fins, les deux dépressions polaires sont très accusées, et la couronne y présente bien l'aspect habituel aux époques de minimum de l'activité solaire.

---

(1) Depuis cette époque, MM. Lumière ont mis en vente de nouvelles plaques anti-halos.

Enfin, un examen attentif de la plaque 9 ne m'a montré, autour du Soleil, aucun astre autre que ceux qui devaient normalement s'y trouver.

Mercure, en particulier, s'y distingue très bien à l'extrémité d'un rayon coronal.

Je dois ajouter, pour l'intelligence de ce qui précède, que les sensibilités des plaques Lumière, étiquette bleue, étiquette jaune, étiquette rouge, sont proportionnelles aux nombres 1, 6, 15.

La planche d'héliogravure qui accompagne ce Rapport donne les images agrandies deux fois des plaques 2, 3, 5 et 8. La couronne y possède naturellement moins d'étendue et de finesse que sur les clichés eux-mêmes, et les protubérances faibles visibles sur le cliché 5 sont noyées dans la reproduction de la partie la plus lumineuse de la couronne. Telle qu'elle est, je pense qu'elle intéressera, cependant, les lecteurs. C'est une observation qui vient s'ajouter à celles que nous ont données les éclipses passées. Si l'on considère que la couronne est un phénomène observable seulement huit jours par siècle, on se rendra compte de l'importance d'une telle observation. Cela seul justifie pleinement la peine que nous avons dû prendre et les dépenses faites par l'Université de Toulouse.

TABLE DES MATIÈRES.

FIN DU TOME QUATRIÈME DE LA DEUXIÈME SÉRIE.

31325 PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS,
Quai des Grands-Augustins, 55.



POSE 4s. Pl. Lumière jaune



POSE 2s. Pl. Lumière jaune



[illegible]

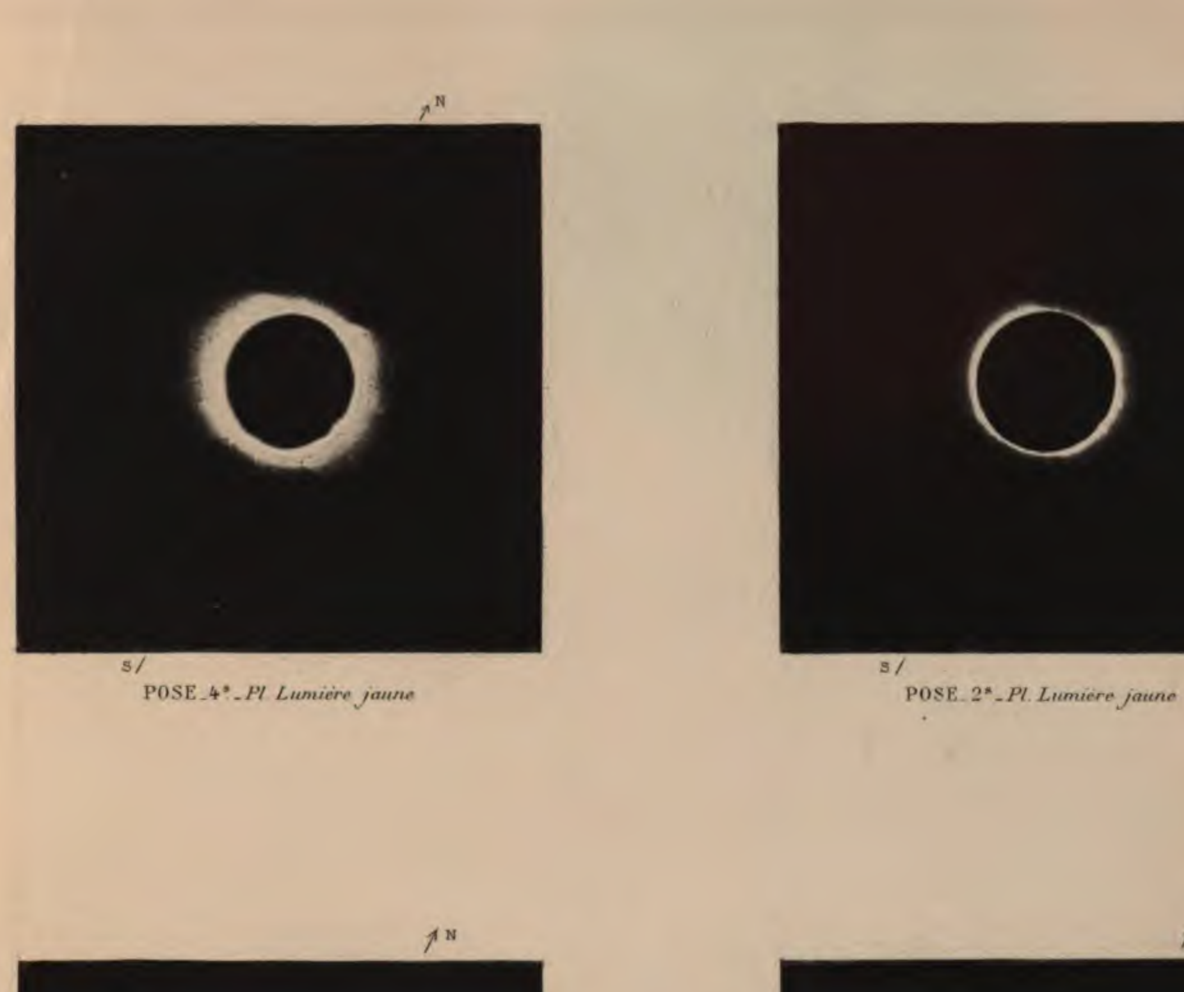


POSE 8s. Pl. Lumière jaune

ÉCLIPSE TOTALE DU SOLEIL DU 28 MAI 1900

MISSION DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

Elche (Espagne)



POSE_4ª_*Pl. Lumière jaune*

POSE_2ª_*Pl. Lumière jaune*



POSE_2ª_*Pl. Lumière bleue*



POSE_8ª_*Pl. Lumière jaune*

ÉCLIPSE TOTALE DU SOLEIL DU 28 MAI 1900

MISSION DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

Elche (Espagne)

Héliog. Schutzenberger








STORAGE AREA

